

## 5. Die Schrödinger-Gleichung

### 5.1. Wellengleichung für "klassische" Wellen

Eine Welle wird durch eine "Wellenfunktion" beschrieben. In 1 Dimension z.B.  $\Psi(x,t)$ , die als Lösung einer Wellengleichung erhalten wird. Verschiedene Typen von Wellen, die durch nichtdispersive Medien (keine Dämpfung) propagieren, werden durch eine lineare Wellengleichung beschrieben (siehe 4.1.)

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad \text{z.B. em Wellen (Beweis siehe Kapitel 4)}$$

Schallwellen

schwingende Seite

$v$  = Phasengeschwindigkeit

Funktionen vom Typ  $\Psi = f(x \pm vt)$  sind Lösungen d.h. lineare Wellenfunktion

in 3 Dimensionen:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad \text{mit } \Psi(x,y,z,t)$$

Definiere Laplace Operator  $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\approx \Delta \Psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

z.B. für harmonische Bewegung  $\rightarrow$  harmonische Wellenfunktionen wie ebene Welle

5-2

1-dimensional  $\Psi_1(x) = A \cos(kx - \omega t)$  uipos. x  
oder  $\Psi_2(x) = A \sin(kx - \omega t)$  andere  
Randbedingung

oder  $\Psi_3(x) = A \exp i(kx - \omega t)$   
mit Benutzung von  
 $\cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t) = \exp i(kx - \omega t)$   
 $\Psi_3(x)$  komplexe Wellenfunktion  $i = \sqrt{-1}$   $i^2 = -1$

Quadrat einer komplexen Wellenfunktion:

beliebige komplexe Funktion  $\Psi = A + iB$   
 $\Rightarrow$  konjugiert komplexe Funktion  $\Psi^* = A - iB$   
und

$$|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi = A^2 + B^2 \leftarrow \text{Intensität d. Welle}$$

Beispiel: ebene Welle  $\Psi = \exp i(kx - \omega t)$

$$\Psi^* = \exp -i(kx - \omega t)$$

$$|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi = \exp(0) = 1$$

## 5.2. Wellengleichung für Teilchenwellen

Wellengleichung für nicht-relativistische Teilchen  
benannt nach Erwin Schrödinger (1887-1961), der  
sie 1925 zuerst formulierte

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \Psi \quad \text{oder} \quad \boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi = E\Psi}$$

Teilchen der Masse  $m$  bewegt sich in einem  
Potential  $V$  und hat (totale) Energie  $E = V + T$   
(da nicht relativistisch)

Schrödinger-Gleichung kann nicht hergeleitet werden (siehe <sup>aus</sup> Maxwell Gleichungen); kann in ihre Form motiviert werden und Gültigkeit ist durch erfolgreiche Beschreibung der Natur demonstriert.  
 Bed: i) Energie, ii) de Broglie Urwahl iii) <sup>Stabilität u. Konvergenz</sup> "Ordnung" Lösungen  
 1-dimensionale, zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

- erhält Energie  $E = V + T$ ; bemerke de Broglie Postulat  $\lambda = h/p$  und mit  $k = \frac{2\pi}{\lambda} \sim$   
 $T = p^2/2m = \hbar^2 k^2/2m$

z.B. ebene Welle  $\Psi = \sin(kx - \omega t)$

$$\partial^2 \Psi / \partial x^2 = -k^2 \sin(kx - \omega t) = -k^2 \Psi$$

setze in Schrödinger-Gleichung ein

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} (-k^2)}_{p^2/2m = T} + V = E$$

Superpositionssprinzip soll gelten:  
 $\Psi_1, \Psi_2$  Lösungen  $\Psi_1 + \Psi_2$  Lösung  
 wichtig für Wellenpaket! und Teilchen, das dadurch beschrieben!

in 3 Dimensionen  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$

d.h.  $\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi = E \Psi}$  3-dim., zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

Das ganze Feld der Quantenmechanik basiert auf dieser Gleichung. Um ein physikalisches Problem zu lösen, in dem der Wellencharakter eines Teilchens eine Rolle spielt (gegeben durch rd. Skala im Vergleich zu  $\lambda$ )  $\rightarrow$  "Lösen der Schrödinger-Gleichung"

grundsätzlich der Fall für Probleme auf atomarer  
oder subatomarer Ebene

Elektronen im Atom

Elektronen und Atomkerne im Molekül

Austragen von Atomen u. Molekülen

Mukleonen im Atomkern

Radioaktiver Zerfall ... etc.

Wichtigster Unterschied zwischen all diesen Proble-  
men: wähle korrektes Potential  $V(x)$  oder  
 $V(x, y, z) \leadsto$  "löse" Schrödingergleichung

"lösen" : ① finden der Wellenfunktion  $\psi$ , die die  
Gleichung erfüllt.

② Prüfen der Lösung in Schrödinger-  
gleichung führt zu totaler Energie  $E$ , die  
mit dieser Lösung verbunden ist.

a) Schrödingergleichung ist eine "Operator-Gleichung"  
≡ bestimmte "Operatoren" wirken auf Funktion  $\psi$

$$\text{z.B. } \underbrace{-\frac{\hbar^2 \partial^2}{2m \partial x^2}}_{\text{Operator}} \underbrace{(\psi)}_{\text{Funktion}}$$

speziell: Operator der kinetischen Energie =  $\frac{\text{Impulsoperator}^2}{2m}$

(nicht relativistisch)

d.h. um Impuls<sup>2</sup> einer Welle zu finden

$p^2 = \left(\frac{\hbar}{\lambda}\right)^2 = \hbar^2 k^2 \leadsto$  bilde 2. Ableitung der Wellenfunktion  
nach  $x$  und multipliziere mit  $-\hbar^2$

z. B.  $\Psi = \exp(ikx)$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = ik \exp(ikx)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = (ik)^2 \exp(ikx) = -k^2 \Psi \quad -\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = k^2 \hbar^2 \Psi$$

"Impulsoperator"  $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$  (mehr später)

Operator der potentiellen Energie  $V$  agiert (wirkt) auf Wellenfunktion  $\Psi$ :  $V\Psi$

z. B. für Coulomb Potential  $V = \frac{\text{konst}}{r} = \frac{\text{konst}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

und

$$V\Psi = \frac{\text{konst} \cdot \Psi(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

b) Schrödingergleichung ist eine "Eigenwert-Gleichung"

Definition: eine Funktion  $\Psi$  ist eine "Eigenfunktion" eines Operators  $\hat{Q}$ , wenn die Operation von  $\hat{Q}$  auf  $\Psi$  dazu resultiert, die selbe Funktion  $\Psi$  mal einer Konstante  $c$  zu reproduzieren, d.h.

$$\hat{Q}\Psi = \pm c\Psi \quad c: \text{positive, reelle Konstante}$$

Jede Funktion  $\Psi$ , die die obige Gleichung erfüllt, ist eine "Eigenfunktion" des Operators  $\hat{Q}$  und die Konstante  $\pm c$  heißt der "Eigenwert" der mit  $\Psi$  assoziiert ist.

Schrödingergleichung:  $\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V\right)}_{\text{Operator} \equiv \text{Hamiltonoperator } H} \Psi = \underbrace{E}_{\text{Eigenwert} \equiv \text{Energieeigenwert}} \Psi$

einfache Beispiele: finde mögliche Eigenfunktionen und zugehörige Eigenwerte des Operators  $\hat{Q} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ . Eigenwertgleichung  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \pm c \psi$

nur periodische Funktionen sind Kandidaten

$\psi$	$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$	Eigenwert
$\sin x$	$-\sin x$	-1
$\cos x$	$-\cos x$	-1
$\sin^2 x$	$2 - 4 \sin^2 x$	$\neq \pm c \psi \leftarrow$ keine Eigenfunktion
$e^{2x}$	$4e^{2x}$	+4
$e^{ix}$	$-e^{ix}$	-1
$\sin(ux)$	$-u^2 \sin(ux)$	$-u^2$

### 5.3. Wahrscheinlichkeitsdichte und Wahrscheinlichkeit

wie u.U. komplexe Wellenfunktion ist keine direkte Observable. Die Interpretation der Wellenfunktion wurde 1926 durch Max Born gegeben:

Das Quadrat der Wellenfunktion  $|\psi(x)|^2 = \psi^*(x)\psi(x)$  ist die Wahrscheinlichkeitsdichte  $= P(x)$   
 $\equiv$  Wahrscheinlichkeit pro Einheit von  $x$ , das durch  $\psi$  beschriebene Teilchen in einem Ortsintervall zu finden.

Wahrscheinlichkeit ein Teilchen zwischen  $x_1$  und  $x_2$

Zu finden

$$P_{x_1, x_2} = \int_{x_1}^{x_2} P(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \Psi^*(x) \Psi(x) dx$$

Wahrscheinlichkeit, das Teilchen irgendwo zu finden,  $-\infty \leq x \leq \infty$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) \Psi(x) dx \quad \text{wenn Wellenfunktion } \Psi \text{ 1 Teilchen beschreibt}$$

$$\equiv 1 \quad \text{und Wahrscheinlichkeit}$$

Teilchen irgendwo zu finden gleich 1 sein.  $\rightarrow$  bestimmt Normierung der Wellenfunktion

Für bestimmte Variable oder Operatoren sei Wellenfunktion  $\Psi$  eine Eigenfunktion. (z.B. für den Operator der totalen Energie  $H = T + V$ )  $\Rightarrow$  bedeutet, dass Variable für eine gegebene Wellenfunktion  $\Psi$  einen präzisen Wert hat, nämlich den Eigenwert.

Üblicherweise wird das nicht gleichzeitig der Fall sein für dieselbe Funktion  $\Psi$  und andere Variable (Operatoren).

z.B. sagt uns die Heisenberg'sche Unschärferelation, dass Impuls und Ort nicht zugleich präzise bestimmt sind für ein wellenartiges Teilchen, sondern dass  $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{1}{2} \hbar$

Für solche Variable gibt es keine scharfen Eigen-

wert. Wir können jedoch aus der Wellenfunktion einen mittleren Wert berechnen.

Vorschrift Mittelwert zu berechnen:  
normalerweise

$$\langle x \rangle = \frac{u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots}{u_1 + u_2 + \dots} = \frac{\sum u_i x_i}{\sum u_i}$$

wobei  $n_i$  die Zahl der Fälle ist, in denen Wert  $x_i$  gefunden wird. Für eine kontinuierliche Variable  $x$  entspricht  $n_i$  die Wahrscheinlichkeitsdichte.

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x |\Psi|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx}$$

wäre korrekt für ein klassisches Problem. In der Quantenmechanik ist die Größe  $x$  generell ein Operator  $\hat{x}$  und die Gleichung muss leicht korrigiert werden

$$\langle \hat{x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \hat{x} \Psi dx = \text{Erwartungswert von Operator } \hat{x}$$

(beachte  $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \Psi dx \equiv 1$ )

Operator  $\hat{x}$  kann z. B.  $x$ -Koordinate sein, dann spielt Reihenfolge im Integral allerdings keine Rolle

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* x \Psi dx$$

Mittelwert oder Erwartungswert für  $x$ -Koordinate eines Teilchens beschrieben durch  $\Psi(x)$



analog gilt für den Impuls

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{p} \psi dx$$

Was ist Impulsoperator  $\hat{p}$ ? Aus der Schrödinger-Gleichung für 1-dimensionalen Fall

$$\text{Operator der kinetischen Energie } \hat{T} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

$$\text{d.h. (Impulsoperator)}^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\text{Impulsoperator (in x-Richtung)} \hat{p}_x = \pm i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

Wichtig ist Position des Operators für Berechnung des Mittelwerts (Erwartungswerts) um Bedeutung

$$\langle p_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi dx$$

#### 5.4. Einfache Anwendungen der Schrödinger-Gleichung

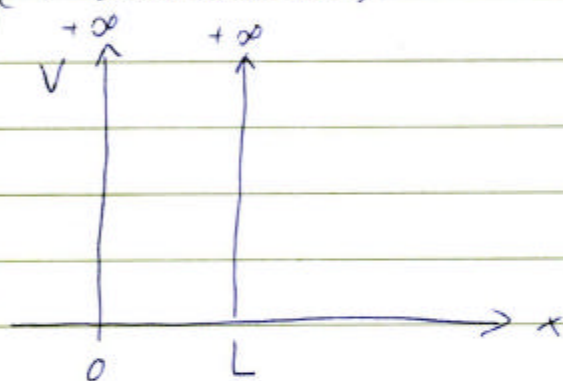
a) "freies Teilchen"  $\leftrightarrow$  keine Kräfte <sup>(netto)  $\sum \vec{F} = 0$</sup> ,  $V(x) = \text{konst.}$   
kann Skala so wählen, dass  $V=0$

$$\begin{aligned} \text{in 1 Dimension } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} &= E \psi(x) \quad \text{oder} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi \quad \text{mit } \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{p^2}{\hbar^2} = k^2 \\ &= -k^2 \psi \end{aligned}$$

mögliche Lösungen  $\Psi_1(x) = A \sin kx$   
 $\Psi_2(x) = B \cos kx$   
 $\Psi_3(x) = C \exp(ikx)$  oder linear komb.

Energieeigenwerte:  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  da  $k$  kontinuierlich alle Werte annehmen kann, nimmt auch  $E$  kontinuierlich alle Werte an

b) Teilchen in unendlich tiefem Potential (1 Dimension)



$V = \infty$  für  $x < 0$  und  $x \geq L$

$V = 0$  für  $0 < x < L$

Teilchen ist zwischen  $x=0$  und  $x=L$  gefangen

Teilchen "im Kasten"

innerhalb des Kastens ist Lösung identisch mit a) aber zusätzlich gibt es Randbedingungen: Teilchen kann nirgends außerhalb des Bereichs  $0-L$  sein  
 $\leadsto$  Wellenfunktion muß verschwinden für  $x \leq 0$  und  $x \geq L$   $\leadsto$  Wahrscheinlichkeit  $\Psi^* \Psi$  gleich Null.

d.h.  $\Psi(x=0) = 0$  und  $\Psi(x=L) = 0$

eliminiert  $\cos kx$

für  $\Psi = A \sin kx \rightarrow \Psi(x=0) = 0$  immer erfüllt

$\Psi(x=L) = A \sin kL = 0$  für  $kL = n\pi$

oder  $k_n = \frac{n\pi}{L}$

↪ nur bestimmte Werte von  $k$  möglich analog zu stehender Welle auf schwingender Saite (an beiden Enden befestigt).

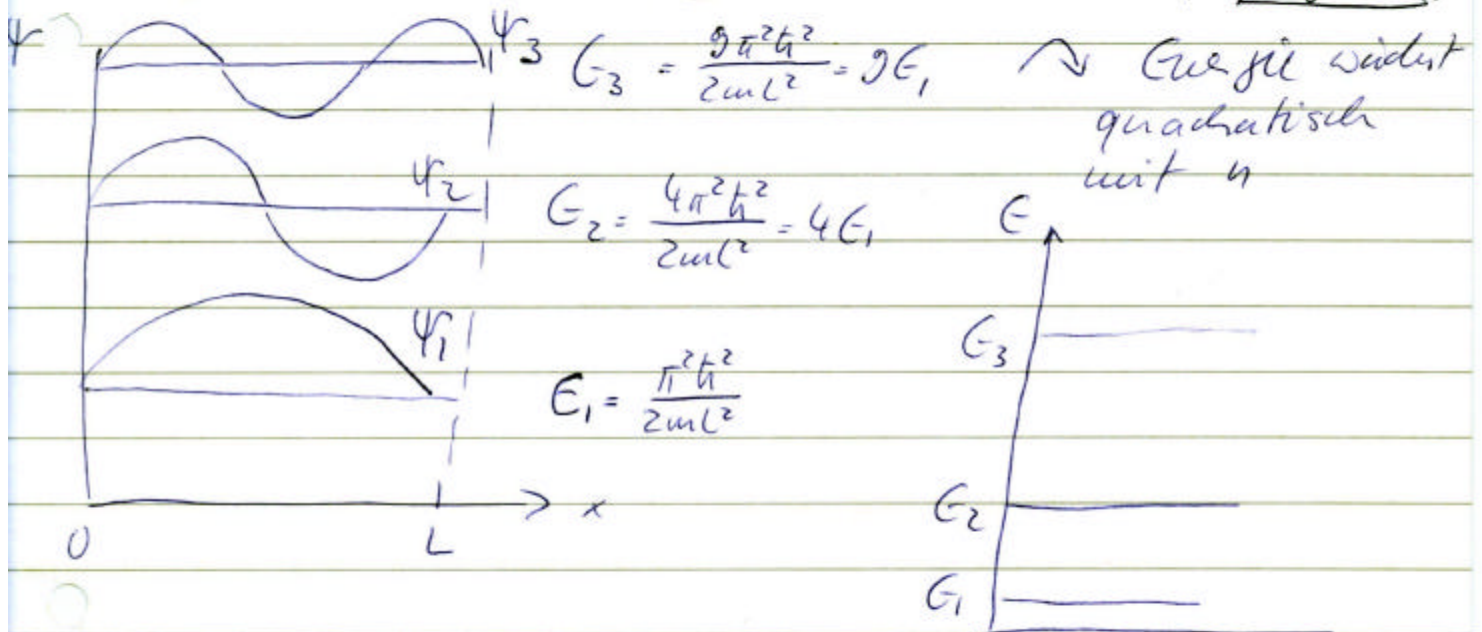
d.h. auch Energie kann nur bestimmte, durch  $k$  gegebene Werte annehmen

$$E_n = \frac{k_n^2 \hbar^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2L^2 m} = \frac{n^2 \hbar^2}{8mL^2}$$

$E_n$  sind die Energieeigenwerte für Wellenfunktionen

$$\Psi_n = A \sin k_n x = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

⇒ Fig. 5-1



Normierung der Wellenfunktion:

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = \int_0^L \Psi^* \Psi dx = \int_0^L A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \equiv 1 \\
 &= A^2 \frac{L}{2} \quad \leadsto A = \sqrt{\frac{2}{L}}
 \end{aligned}$$

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

z.B. finde Wahrscheinlichkeit das Teilchen zwischen

5-12

$x = L/2$  und  $x = L$  ist :

$$P_{\frac{L}{2}-L} = \int_{L/2}^L \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \frac{L}{4} = \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

steht Wellen 5-12-a  
Teilchen im Kasten  $\rightarrow$  Unscharfrel. 5-12b

5-12-a

Interpretation als stehende Welle

de Broglie Wellenlänge  $\lambda = \frac{h}{p}$  und  
Bedingung dass  $n \frac{\lambda}{2} = L$

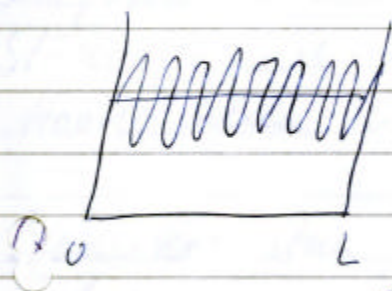
$$\sim p = \frac{nh}{2L}$$

und kin. Energie  $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$

stehende Welle Summe von rechts- und links-  
läufiger Welle  $\exp(ikx)$  und  $\exp(-ikx)$

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sqrt{\frac{2}{L}} \left( \frac{\exp(ikx) - \exp(-ikx)}{2i} \right)$$

Klassisches Limit: für  $n$  sehr groß



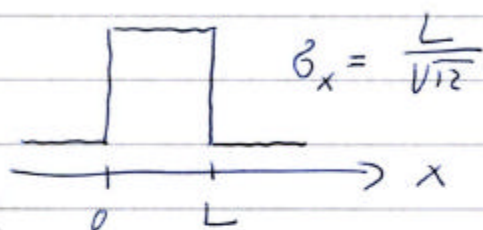
Wahrscheinlichkeit  $\frac{dP}{dx} = \frac{1}{L}$

und Wahrscheinlichkeit Teilchen in  
Zuhal  $\Delta x$  zu finden is

$$\int_x^{x+\Delta x} dx \frac{dP}{dx} = \frac{1}{L} \int_x^{x+\Delta x} dx = \frac{\Delta x}{L}$$

## Konsistenz u. Unschärferelation

Abschätzung: Standardabweichung einer  
gleichm. Wahrscheinlichkeitsverteilung von  
 $x=0$  bis  $x=L$



$\leadsto$  Unschärfe im Impuls

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{\sqrt{12}\hbar}{2L}$$

$\leadsto$  minimale kinetische Energie

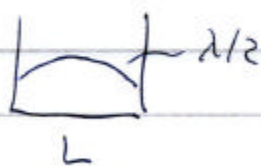
$$E_{\text{kin}} < T^{\text{min}} > = \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{3\hbar^2}{mL^2}$$

keine abh. kinetische Energie genau; niedrigster  
Zustand  $E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$  größer um ca. 50% als  
Minimum das durch Unschärferelation bedingt

Energie genau bekannt, also auch  $p^2$  und Absolut  
betrag von Impuls, aber nicht Vorzeichen!

stehende Welle ist Überlagerung von rechts- und  
linksläufiger Wellen  $\leadsto$  Unschärfe im Impuls

$$\Delta p = p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2L}$$



$$\text{damit ist } \Delta p \Delta x = \frac{h}{2L} \frac{L}{\sqrt{12}} = \frac{\pi\hbar}{2\sqrt{3}} > \frac{\hbar}{2}$$

genauer:  $\langle x^2 \rangle = \int \Psi^* x^2 \Psi dx$  etc. siehe  
später

## c) harmonischer Oszillator

harmonische Bewegung: Pendel, Komp. Feder  
 sehr gängiges Problem in der Physik (Natur)  
 charakterisiert durch rückstellende Kraft

$$F = -kx \quad \text{Hooke'sches Gesetz} \quad \text{"einfache harmonische Bewegung"}$$

nach Newtons 2. Gesetz  $ma = -kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$

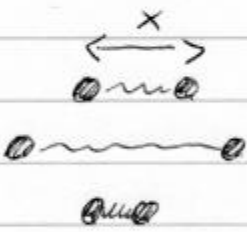
$$\leadsto m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \text{lösungen vom Typ}$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

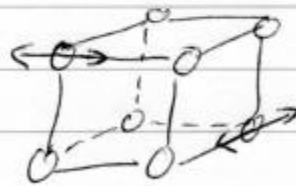
mit Oszillationsfrequenz  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  und  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$   
 und Amplitude  $A$

einfache harmonische Bewegung sehr wichtig, da  
 für kleine Störungen die meisten rückstellenden  
 Kräfte dem Hooke'schen Gesetz entsprechen.

Quantensysteme, die harmonische Oszillationen  
 ausführen

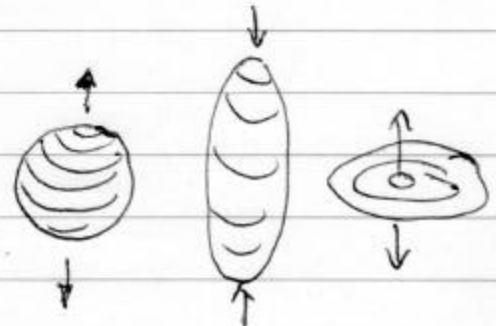
- 2-atomige Moleküle   $x$  ist Abstand  
 zwischen den  
 2 Atomen

- Atome im Kristall  
 (siehe Schwarzkörper-  
 strahlung)



$x$ : Position  
 eines Atoms

- Vibration eines Atoms  
 um Gleichgewichtsform



alles Systeme mit Dimensionen, so daß

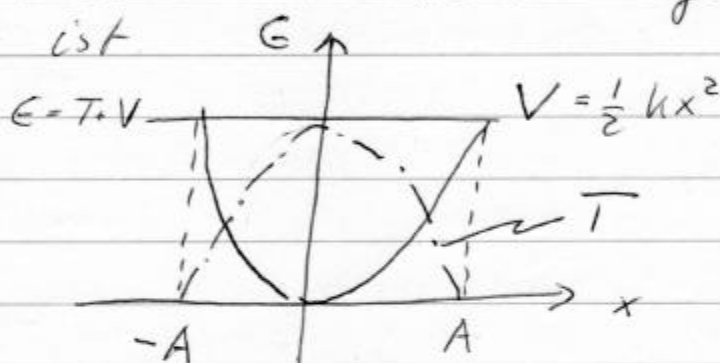
5-14

de Broglie Wellenlänge eine nicht vernachlässigbare Rolle spielt  $\leadsto$  muß vibrierendes Positionsmass des System als Teilchenwelle darstellen

$\leadsto$  lösen der Schrödinger Gleichung für harmonisches Potential

$$F = -kx \quad V(x) = -\int_0^x F(x') dx' = k \int_0^x x' dx' = \frac{1}{2} kx^2$$

Energie im klassischen Oszillator  $E = T + V = \frac{1}{2} kA^2$   
wobei  $A$  die max. Auslenkung am Umkehrpunkt ist



Schrödinger Gleichung  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{1}{2} kx^2 \right) \Psi = 0$

einfachste Funktion, die diese Gleichung erfüllt:

Gaussfunktion  $\Psi(x) = A \exp(-ax^2)$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -2ax(A \exp(-ax^2))$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 4a^2 x^2 (A \exp(-ax^2)) - 2a (A \exp(-ax^2))$$

$$\frac{2m}{\hbar^2} \left( E - \frac{1}{2} kx^2 \right) = 2a - 4a^2 x^2 \quad \text{also} \quad E = \frac{a\hbar^2}{m}$$

$$\text{und } 4a^2 = \frac{mk}{\hbar^2} \quad \leadsto \quad a = \frac{\sqrt{mk}}{2\hbar} = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

$$\text{damit wird } E = \frac{1}{2} \hbar \omega$$

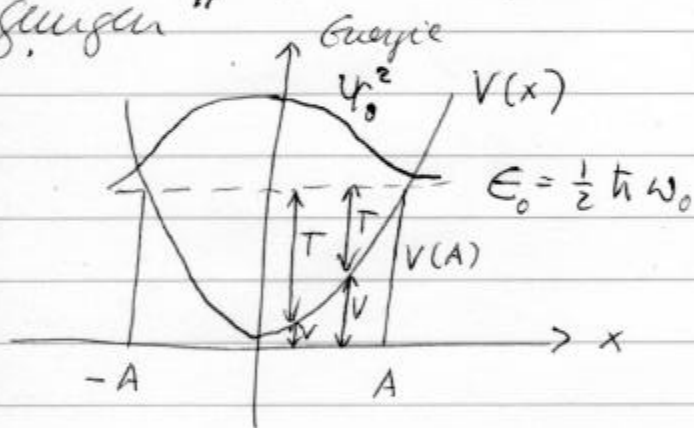
Koeffizient  $A$  aus der Normierungsbedingung

5-15

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = 1 \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\leadsto \Psi = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

dies ist die energetisch niedrigste Lösung der Schrödinger-Gleichung im harm. Potential, also repräsentiert diese Wellenfunktion den Grundzustand d. harmonischen Oszillators  $\Psi_0$  mit Grundzustandsenergie  $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0 > 0$  unabhängig von der Temp. ist das die minimale Energie, sogenannte "Nullpunktschwingungen"



kleine aber endliche Wahrscheinlichkeit Teilchen jenseits des klassischen Umkehrpunkts zu finden!

Teilchen dringt etwas in die klassisch verbotene Region ein, wie weit? für  $|x| > A$  wird  $V(x) > E$ ; - fehlende Energie kann für kurze Zeit wegen Heisenberg'scher Unschärfenrelation "ausgeliehen" werden

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2 \quad \Delta E = V(x) - E$$

$$\Delta t = \frac{\hbar/2}{V(x) - E}$$

$$\text{Geschwindigkeit } v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$$

$$\text{Distanz } \Delta x = \frac{1}{2} v \Delta t =$$

$$\frac{1}{2} \frac{\hbar/2}{V(x) - E} \sqrt{\frac{2(V(x) - E)}{m}} = \frac{\hbar/2}{\sqrt{2m(V(x) - E)}}$$

aber da  $V(x)$  nicht konst., ist  $v$  nicht konst.,  $\rightarrow$



Integration nötig  $\int dx \frac{1}{\sqrt{V(x)-E}}$  ...

harmonischer Oszillator im Grundzustand und Orts - Impuls Unschärferelation: siehe

Kap. 4-3 c) S. 4-23

$$\delta\psi(x) = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} \quad \delta\psi^2(x) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \quad \left. \begin{array}{l} \delta\psi^2(x) \delta\psi^2(\hbar) = \frac{1}{2} \\ \text{und da} \end{array} \right\}$$

$$\delta\psi(\hbar) = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}} \quad \delta\psi^2(\hbar) = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}} \quad \left. \begin{array}{l} p = \hbar k \\ \delta p(x) \delta p(p) = \frac{\hbar}{2} \\ \text{minimal} \end{array} \right\}$$

↑ Wahrscheinlichkeit  $p$

generelle Lösungen der Schrödingergleichung im harmonischen Potential:

$$\Psi_n(x) = A f_n(x) \exp(-ax^2) \quad a = \frac{m\omega}{2\hbar} \quad (\text{siehe oben})$$

$$\text{mit } f_n(x) = \sqrt{2^n n!} H_n(x)$$

↳ Hermitesche Polynome

$n$	$H_n(x)$	$E_n$
0	1	$\frac{1}{2} \hbar \omega$
1	$2cx$	$\frac{3}{2} \hbar \omega$
2	$4c^2x^2 - 2$	$\frac{5}{2} \hbar \omega$
3	$8c^3x^3 - 12cx$	$\frac{7}{2} \hbar \omega$

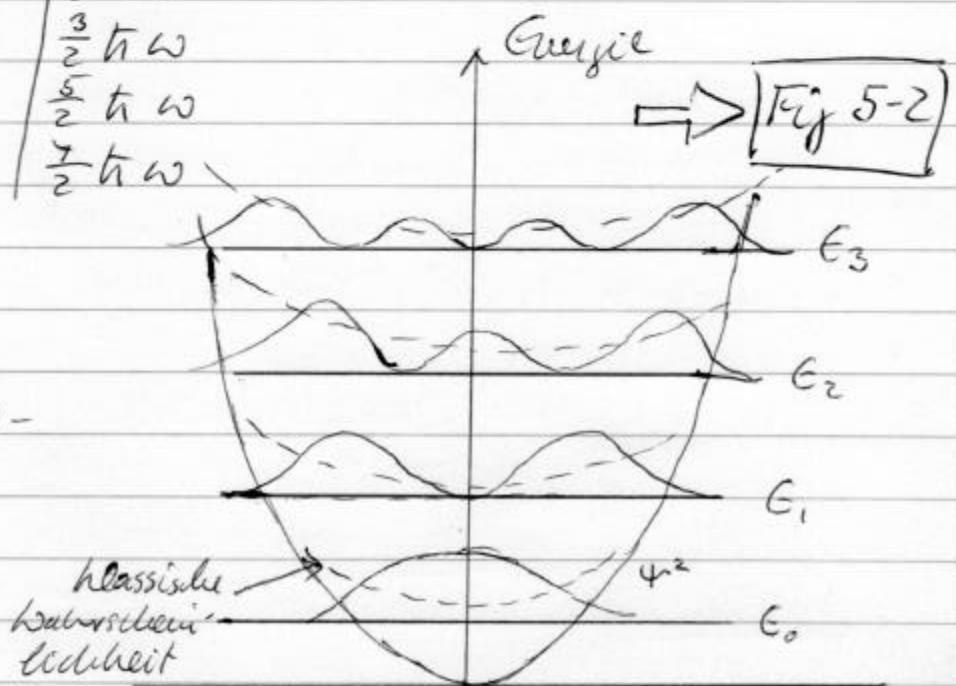
mit  $c = \sqrt{\frac{km}{\hbar^2}} = \frac{m\omega}{\hbar^2}$

$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$   
Abstand zwischen  
benachbarten Energie-  
niveaus

$$E_{n+1} - E_n = \hbar \omega$$

Konstant

klassische  
Wahrscheinlich-  
keitsverteilung



beachte Wahrscheinlichkeitsdichte  $|\Psi|^2$ :

a) oszilliert zwischen klassischen Umkehrpunkten und fällt jenseits exponentiell ab wie  $\exp(-2\alpha x^2)$

b) je grösser  $n$ , desto mehr sieht  $|\Psi_n|^2$  aus wie die klassische Wahrscheinlichkeitsdichte

"Korrespondenzprinzip":  $\Rightarrow$  Fig 5-3  
für  $n=69$

für große Quantenzahlen  $n$  Übereinstimmung mit der klassischen Physik

beachte "makroskopisches Teilchen" mit Masse  $m=1g$ , Geschwindigkeit  $v=10^{-6}m/s$ , eingespent in Region von  $1cm$  Breite. Was ist Quantenzahl  $n$ ?

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = E = \frac{\hbar^2 k^2}{8mL^2} \quad n = \sqrt{\frac{8mL^2 E}{\hbar^2}} = \sqrt{\frac{4m^2 L^2 v^2}{\hbar^2}} = \frac{2mLv}{\hbar}$$

$$n = \frac{2 \cdot 10^{-3} kg \cdot 0.01 m \cdot 10^{-6} m/s}{6.6 \cdot 10^{-34} J s} \approx 3 \cdot 10^{22} !$$

also pro cm  $3 \cdot 10^{22}$  Oszillationen, wäre sichtbar mit Ortmessung, die Auflösung  $< 10^{-24}m$  hat.

Zurück zu Quantenoszillator im Grundzustand:

$$\text{Erwartungswerte } \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) x \Psi(x) dx$$

$$= \int \underbrace{A^2 \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{\hbar}\right)}_{\text{gerade F.}} x \underbrace{dx}_{\text{ungerade F.}} = 0$$

$$\text{genauso } \langle p_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi(x) dx = 0$$

5-18

$$\text{mit } \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-ax^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

$$\text{mittlere pot. Energie } \langle V \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) \frac{1}{2} kx^2 \Psi(x) dx = \frac{1}{4} \hbar \omega$$

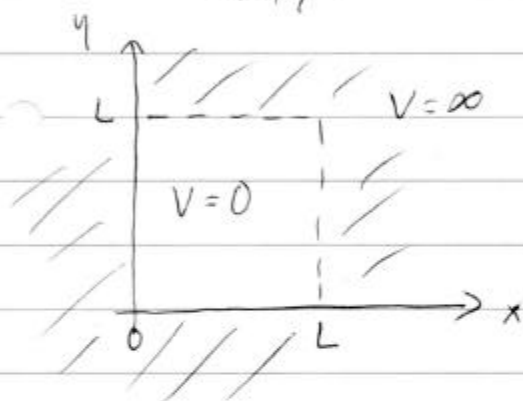
$$\begin{aligned} \text{mittl. kin. Energie } \langle T \rangle &= \frac{\langle p_x^2 \rangle}{2m} = \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) \left( -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi(x) dx \\ &= \frac{1}{4} \hbar \omega \end{aligned}$$

$$\langle E \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle = \frac{1}{2} \hbar \omega = E_0 \text{ Eigenwert}$$

d) Teilchen in 2-dimensionalen Kastenpotential  
 → im Prinzip ähnelnde wie zuvor, aber  
 wichtiges neues Phänomen "Entartung"

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi(x,y) + V(x,y) \Psi(x,y) = E \Psi(x,y)$$

mit  $V(x,y) = 0$  für  $0 \leq x \leq L$  und  $0 \leq y \leq L$   
 $V(x,y) = \infty$  sonst



$\Psi(x,y) = 0$  außerhalb der  
 Region in der  $V=0$

innerhalb: Separation  
 der Variablen  $x, y$

$\Psi(x,y) = f(x) g(y)$  Produkt aus zwei Funktionen,  
 mit nur von  $x$  abhängig, die  
 andere nur von  $y$

Schrödingers Gleichung zerfällt in zwei Gleichungen in jeweils nur einer Dimension:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{f(x)} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{1}{g(y)} \frac{d^2 g(y)}{dy^2} \right) = E = \text{const.} \leftrightarrow \begin{array}{l} x\text{-abhängiger Teil} \\ y\text{-abhängiger Teil} \end{array}$$

müssen je für sich  
konstant sein

mit Lösungen  $f(x) = A \sin k_x x$  mit  $k_x = \frac{n_x \pi}{L}$   $n_x = 1, 2, 3, \dots$   
 und  $g(y) = B \sin k_y y$  mit  $k_y = \frac{n_y \pi}{L}$   $n_y = 1, 2, 3, \dots$

$$\Psi(x,y) = C \sin k_x x \sin k_y y = C \sin \frac{n_x \pi x}{L} \sin \frac{n_y \pi y}{L}$$

5-20

Normierung geht über Doppelintegral

$$P = \int_0^L dy \int_0^L dx C^2 \sin^2\left(\frac{n_x \pi x}{L}\right) \sin^2\left(\frac{n_y \pi y}{L}\right) = 1$$

$$C = \frac{2}{L}$$

und Energieeigenwerte  $E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2)$

nehme  $E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$   
 Grundzustand  $n_x=1, n_y=1$   $E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2} = 2E_0$

1. angeregter Zustand  $n_x=1, n_y=2$  oder  $n_x=2, n_y=1$

$$E = (4+1)E_0 = 5E_0$$

d.h. es gibt zwei Sätze von Quantenzahlen, die zu einem Zustand der gleichen Energie führen  $(n_x, n_y)$   $(1,2)$  und  $(2,1)$   
 $\leftrightarrow$  Zustand ist zweifach "entartet"

$\Rightarrow$  Fig. 5-5

$(4,1)$  u.  $(1,4)$   $17E_0$

$(3,2)$  u.  $(2,3)$   $13E_0$

$(3,1)$  u.  $(1,3)$   $10E_0$

$(2,2)$   $8E_0$

$(1,2)$  u.  $(2,1)$   $5E_0$

$(1,1)$   $2E_0$

$(n_x, n_y)$

Zustand mit  $E = 50E_0$  sogar

dreifach entartet

$n_x=5, n_y=5$

und

$n_x=1, n_y=7$

und

$n_x=7, n_y=1$

} sehr unterschiedliche Wahrsch. dichte

$\Rightarrow$  Fig 5-5

## 5.5 Zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

für elektromagnetische Welle haben wir Wellengleichung  $\Delta \Psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$  und daraus

resultiert ebene elektromagnetische Welle

$$\Psi(x, t) = A \exp i(kx - \omega t)$$

für Teilchenwelle hatten wir bisher nur zeitunabhängigen Teil betrachtet

Für ein freies Teilchen lautet zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$$

dabei ist  $\Psi(x, t)$  die ort- und zeitabhängige Wellenfunktion, (kann nicht abgeleitet werden).

diese Gleichung wird erfüllt durch Wellenfunkt.

$$\Psi(x, t) = B \exp i(kx - \omega t)$$

$$= \Psi(x) \exp(-i\omega t) \quad \text{mit } E = \hbar\omega \quad \text{und} \\ p = \hbar k \quad \text{und } T = E = \frac{p^2}{2m}$$

für Teilchen, das sich in Potential bewegt gilt generell

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(x, t) + V(x, t) \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} \right]$$

3-dimensionale zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

Wir hatten vorher gesehen dass dies auch gleich  $E \Psi$  ist, d.h. es gibt eine zweite

Eigenwertgleichung  $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E\Psi$   
 und die physikalische Bedeutung von  
 $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$  ist, daß es Operator  $\hat{E}$  der totalen  
 Energie ist.

analog wie 1 Dimension

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V\right) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = E\Psi$$

wieder Produktansatz (wie bei 2-dim. Kasten)

$$\Psi(x,t) = \psi(x) \varphi(t)$$

fi Fall  $V=0$  hatten wir

$$\Psi(x,t) = B \exp i(kx - \omega t) = \underbrace{B \exp i(kx)}_{\psi(x)} \underbrace{\exp(-i\omega t)}_{\varphi(t)}$$

Wenn  $V$  nicht zeitabhängig, können wir schreiben

$$\varphi(t) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V\psi(x) \right] = \psi(x) i\hbar \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} \quad /: \psi(x)\varphi(t)$$

$$\underbrace{\frac{1}{\psi(x)} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V\psi(x) \right]}_{\text{hängt nur von } x \text{ ab}} = \underbrace{\frac{i\hbar}{\varphi(t)} \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}}_{\text{hängt nur von } t \text{ ab}}$$

nur möglich, wenn jede Seite für sich konstant  
 ist  $\equiv E$

- linke Seite hatten wir bereits behandelt als  
 zeitunabhängige Schrödingergleichung  $\rightarrow$   
 gibt Lösungen für den ortabhängigen Teil der  
 Wellenfunktion
- rechte Seite ganz einfache Differentialgleichung  

$$\frac{i\hbar}{\varphi(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt} = E \quad \text{bzw} \quad \frac{i\hbar}{\varphi(t)} d\varphi = E dt$$

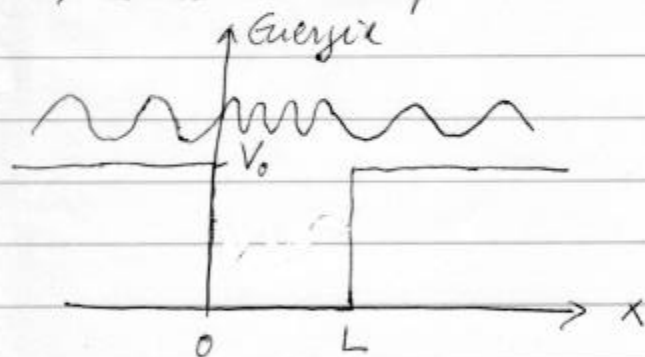
allgemeine Lösung in  $\varphi(t) = -\frac{iE}{\hbar}t + \text{Konst.}$   
 $\varphi(t) = \text{Konst.} \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right) = \text{Konst.} \exp(-i\omega t)$

Im Fall, daß  $V$  nicht zeitabhängig ist, ist der zeitabhängige Teil der Wellenfunktion immer  $\exp(-i\omega t)$ . Konst. wird in generelle Normierung aufgenommen. Wenn wir uns für totale Wellenfunktion interessieren, lösen wir die zeitunabhängige Schrödingergleichung und multiplizieren das resultierende  $\psi(x)$  oder  $\psi(x, y, z)$  mit  $\exp(-i\omega t)$

## 5.6. Potentialstufen und -Barrieren, endliches Kastenpotential

---

a) endlich tiefes Kastenpotential



$$V=0 \text{ für } 0 < x < L$$

$$V=V_0 \text{ für } x \leq 0 \text{ und } x \geq L$$

Region 1 | Region 0 | Region 2

Fall 1:  $E > V_0$

im Prinzip wie freies Teilchen, aber einige interessante Unterschiede

Region 0:  $\psi_0(x) = A \exp(ik_0 x) + B \exp(-ik_0 x)$

mit  $k_0 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$  (siehe oben)

Region 1, 2: Lösung wie freies Teilchen bei  $V=0$  ab



mit unterschiedlicher Wellenzahl (Verschiebung des Energie Nullpunkts wäre völlig äquivalent)

$$\Psi_1(x) = C \exp(ik_1 x) + D \exp(-ik_1 x) \quad \text{mit } k_1 = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}$$

sieht aus wie Teilchen mit niedrigerer Energie relativ zu Region 0, daher oszilliert es langsamer  
identisch  $\Psi_2(x) = G \exp(ik_1 x) + F \exp(-ik_1 x)$

Bestimmung der 6 Konstanten:

Wellenfunktion muß an Grenzen der Regionen stetig sein, ebenso die erste Ableitung (Impuls)

↳ legt 4 Konst. fest

Zusätzlich: Anfangsbedingung, z.B. Teilchen kommt von einer Quelle bei  $x < 0$ , dann kann Teilchen in Region 2 nur nach pos.  $x$  propagieren, also  $F = 0$

letzte Konstante: Normierung der Wellenfunktion

Neu: Reflektion und Transmission

Teilchen werde zu  $t=0$  von einer Quelle bei  $x < 0$  in positive  $x$ -Richtung emittiert

$$\Psi_1 = C \exp(ik_1 x)$$

zu Zeit  $t$ , erreicht Teilchen  $x=0$ , die Potentialstufe

- ein Teil der Welle propagiert weiter in positive  $x$ -Richtung  $\Psi_0 = A \exp(ik_0 x)$

- ein Teil wird reflektiert in negative  $x$ -Richtung

$$\Psi_1 = C \exp(ik_1 x) + D \exp(-ik_1 x)$$

Wahrscheinlichkeit (Transmission) + Wahrscheinlichkeit (Reflektion) = 1  $\Leftrightarrow A^2 + D^2 = 1$

Fall 2:  $E < V_0$

Lösungen für Region 0 wie Fall 1

$$\text{Region 1, 2: } \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \psi$$

Teilchen ist im Potentialwell gefangen, dringt aber etwas in die klassisch verbotene Region ein (siehe harmon. Oszillator)

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = k^2\psi \text{ mit } \beta \text{ reell hat Lösungen der Form}$$

$$\psi = C \exp(kx) + D \exp(-kx)$$

$$\text{da } \psi_1 \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow -\infty \quad \psi_1 = C \exp(kx)$$

$$\psi_2 \rightarrow 0 \quad x \rightarrow \infty \quad \psi_2 = D \exp(-kx)$$

$$\text{mit } k = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

Teilchen ist außerhalb des Potentialkastens auf Region der Breite  $\Delta x = 1/k$  lokalisiert

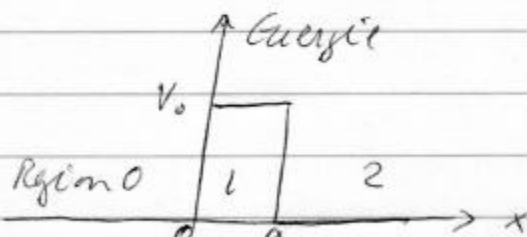
(Standardabweichung von  $\exp(-kx)$  ist  $\sigma_x = 1/k$ )

mit Orts-Impulsunschärfe wird damit für mittlere kinetische Energie  $\langle T \rangle \approx \frac{V_0 - E}{4}$  und Teilchen propagiert mit Bahnm

(Ergänzung 5-25a)

b) Potentialstufe:

ganz analog



wenn ein Teilchen fließt von negative  $x$ -Richtung ein; bei  $x=0$  wird es mit gewisser Wahrscheinlichkeit reflektiert: ebene Welle in negative  $x$ -Richtung

$$B \exp(-ik_0x)$$

und mit endlicher Wahrscheinlichkeit propagiert es

5-25a

Energieeigenwerte für endlich tiefes Kastenpotential



innerhalb  $\psi_0 = A \cos \frac{k}{2} x$   
 außerhalb  $\psi_1 = D \exp(-\beta x)$

bei  $x = \frac{L}{2}$   $A \cos \frac{kL}{2} = D \exp(-\beta \frac{L}{2})$

und  $-kA \sin(\frac{kL}{2}) = -\beta D \exp(-\beta \frac{L}{2})$

oder

$$\tan\left(\frac{kL}{2}\right) = \frac{\beta}{k}$$

(Randbed. bei  $x = -L/2$  nicht  
 weit entwickelt; schon verwendet  
 nur  $\sin$  zu eliminieren)

benutze  $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$  und  $\beta = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$

$$\tan\left(\frac{L\sqrt{2mE}}{2\hbar}\right) = \sqrt{\frac{V_0 - E}{E}}$$

transzendentale Gl.

Lösung numerisch oder graphisch

setze  $\xi = \frac{L\sqrt{2mE}}{2\hbar}$  und  $W = \frac{mV_0 L^2}{2\hbar^2}$ ; max  $\xi$  ist  $\sqrt{W}$

$$\Rightarrow E = \frac{2\hbar^2 \xi^2}{mL^2} \quad \text{und} \quad \tan \xi = \frac{\sqrt{W - \xi^2}}{\xi}$$

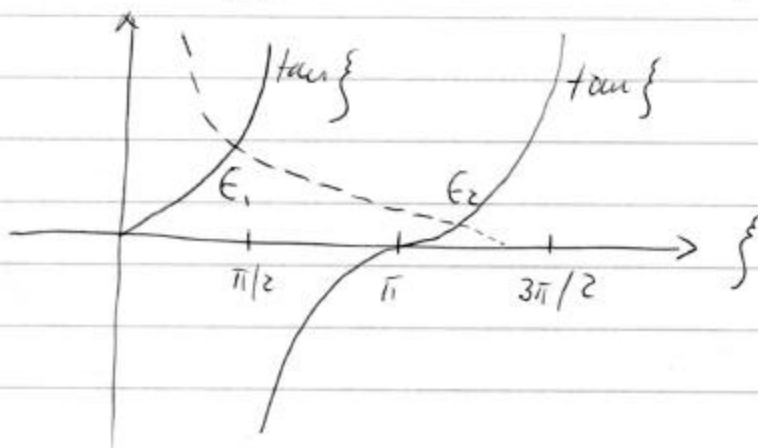


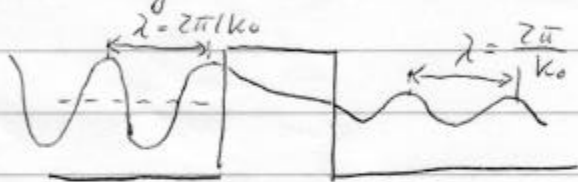
Fig 7-13

Bem: ~~klein~~  $\xi$   
 unendliche tiefen Kasten  
 $E_1$  bei  $\xi = \pi/2$

in Region 1 wieder  $\Psi_1 = C \exp(-k_1 x)$   $k_1 = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$   
 je nach Höhe und Breite der Barriere  
 ist Wellenfunktion bei  $x=a$  klein aber endlich  
 → endliche Wahrscheinlichkeit die Barriere  
 zu durchdringen und auf der anderen Seite  
 wieder aufzutreten

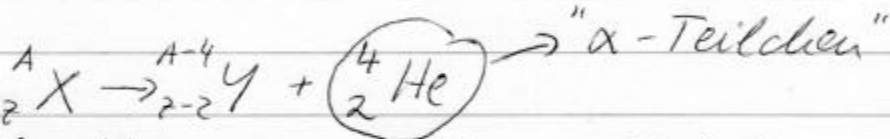
"Tunneleffekt"

in Region 2 wieder ebene Welle  $\Psi_2 = D \exp(ik_0 x)$

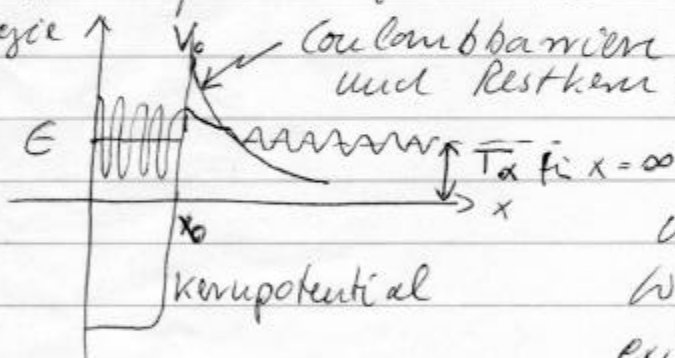


Beispiele:

•  $\alpha$ -Zerfall



Energie



Coulombbarriere zwischen  $\alpha$ -Teilchen  
 und Restkern Y  $V = \frac{e^2 Z(Z-2)}{x}$

nehmen an mit gewisser  
 Wahrscheinlichkeit  
 existiert im Kern X ein

$\alpha$ -Teilchen mit Energie  $E > 0$

mit Barriere  $\Psi = A \exp(-\beta x)$   $\beta = \sqrt{\frac{2m(V_0 - T_\alpha)}{\hbar^2}}$

für  ${}^{238}\text{U}$ :  $V_0 \approx 35 \text{ MeV}$

Tunnelwahrscheinlichkeit  $P \approx A^2 \exp(-2\beta a)$

mittl. Distanz vom Kern ( $x=0$ ) bis die kinetische

Energie  $T_\alpha$  gleich potentieller Energie

$T_\alpha = \frac{Z(Z-2)e^2}{r}$  Energieerhaltung

also  $P \approx A^2 \exp\left[-4Ze^2 \sqrt{2m(V_0 - T_\alpha)} / \hbar T_\alpha\right]$   $Z \gg 2$

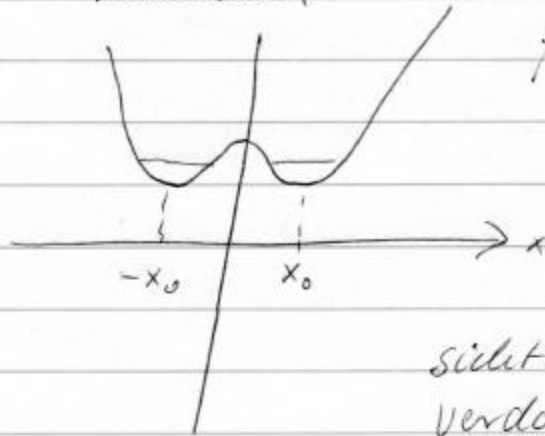
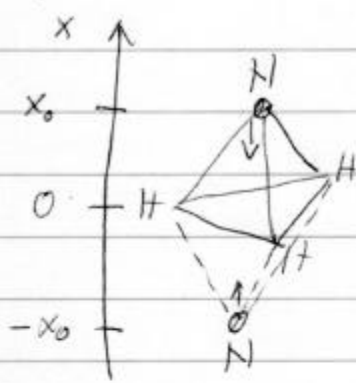
$t_{1/2} \propto 1/P$  mit  $V_0 \gg T_\alpha$  wird

$\ln t_{1/2} \approx C_1 + \frac{C_2 Z}{T_\alpha}$

kleine Änderung  $T_\alpha$   
 → riesige Änderung  $t_{1/2}$   
 pro 1 MeV  $T_\alpha$   $t_{1/2}$  um  $10^5$

Fig. 5-6

## b) Ammoniak - Inversion



Tunneln  
führt zu  
Niveaufpaltung



im Spektrum  
sichtbar als Inversions-  
verdopplung jeder  
Linie

## c) Rast-Tunnelmikroskop

(Scanning Tunneling Microscope STM)

Elektronen werden durch Potentialbarriere (Wahl-  
funktion, siehe Photoeffekt) in Materialoberfläche  
gehalten. Madelartiger Proben wird Größenordnung  
1 nm über Oberfläche gehalten  $\rightarrow$  Elektronen tunneln  
von Material zu Madel  $\rightarrow$  Strom, der sensitiver  
Mass  $\mu$  Breite der Barrieren (Abstand Madel-  
Oberfläche) ist. Feedback-Mechanismus hält  
durch Bewegung der Madel Strom konstant  $\rightarrow$   
Bewegung vermisst Oberflächenstruktur mit Genau-  
igkeit  $< 0.01 \text{ nm} \approx 1/100$  Atomburchmesser!

(Gerd Binnig und Heinrich Rohrer, IBM, Nobel-  
preis 1986)

typische Zahlen  $\alpha = \sqrt{\frac{2m_0(u_0 - e)}{\hbar^2}}$   $m_0 c^2 = 0,511 \text{ MeV}$   
 $= 7,3 \cdot 10^9 / \text{m}$   $u_0 - e = 2 \text{ eV}$   
 $\hbar c = 197 \text{ MeV fm}$

für Änderung der Distanz  $\Delta L$  um  $0,1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$

Änderung der Tunnelwahrscheinlichkeit

$$\frac{\Delta P}{P} = -\alpha \Delta L = -7,3 \cdot 10^9 / \text{m} \cdot 0,1 \cdot 10^{-10} \text{ m} = -0,073 \quad 7,3\% \text{ Stromänderung}$$

## d) Tunneldiode