

4. Wellencharakter von Teilchen

4.1. Allgemeine Eigenschaften von Wellen

Gives die 3 fundamentalen Konzepte: Teilchen, Wellen, Felder

Welle: Ausbreitung eines "Erregungszustands" durch den Raum

1) mechanische Wellen: Störung im Medium

1 dim Seilwellen

2 dim Wasserwellen

3 dim Schallwellen

Seismische Wellen

2) elektromagnetische Wellen: kein Medium, osz. elektrisches und magnetisches Feld

3) Quantenmechanik: Teilchenwellen oder Matrixwellen

Propagation einer Welle: die 'Störung' des Mediums wandert, nicht das Medium

Störung kostet Energie \rightarrow Welle hat Energie $\propto \text{Ampl}^2$

Energie transport einer Welle

elektromagnetische ebene Welle $E = E_m \sin(kx - \omega t)$

$B = B_m \sin(kx - \omega t)$

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$ $\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

Faraday Ind. Gesetz

Maxwells Ind. Gesetz

$$E_m / B_m = c$$

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Geschwindigkeit der em. Welle

Rate des Energietransports pro Fläche

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}} \quad [\text{W/m}^2] \quad \text{Poynting Vektor}$$

Johann Henry Poynting 1852-1914

fi ebene em. Welle:

$$S = \frac{1}{\mu_0} E B = \frac{1}{c \mu_0} E^2$$

Zirkularität der Welle \equiv mittlerer Rate des Energie-
transports

$$\begin{aligned} \bar{I} = \bar{S} &= \frac{1}{c \mu_0} E_m^2 \underbrace{\overline{\sin^2(kx - \omega t)}}_{1/2} = \frac{1}{c \mu_0} \frac{E_m^2}{2} \\ &= \frac{1}{c \mu_0} E_{\text{rms}}^2 \end{aligned}$$

elektrische Energiedichte $\epsilon_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$

magnetische " $\epsilon_H = \frac{1}{2 \mu_0} B^2$

fi ebene Welle: Energiedichte $\epsilon = \epsilon_E + \epsilon_H = \frac{E^2}{c^2 \mu_0}$
oder $c(\epsilon_E + \epsilon_H) = \frac{E^2}{c \mu_0} = S$

(wie bei Schwarzschildkörperstr.
beurteilt)

wo unterscheiden generell:

- longitudinale Wellen: Oszillation in Ausbreitungsrichtung, z.B. Schallwellen \leftrightarrow lokale Druckschwankungen
- transversale Wellen: Wasserwellen
Schall im Festkörper (also seismische Wellen)
elektromagnetische Wellen

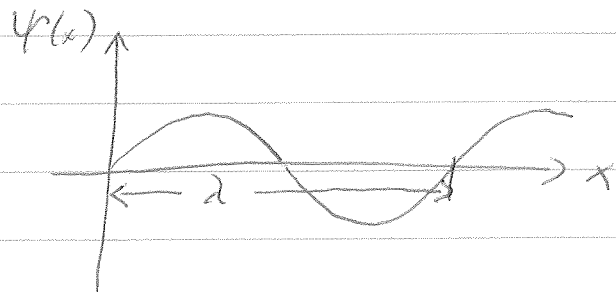
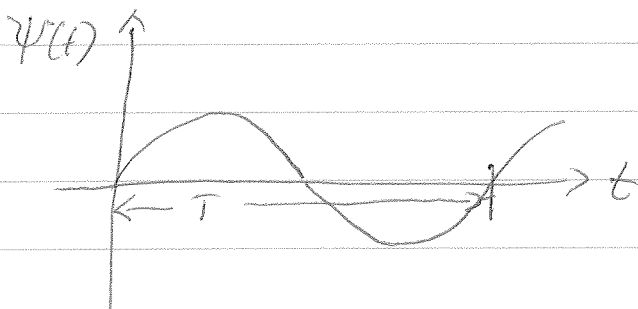
Charakterisierung einer Welle: Amplitude als
 Funktion von Ort und Zeit, die
Wellenfunktion

einfachster Fall: ebene Welle in x-Richtung

$$\Psi(x, t) = \Psi_0 \sin(kx - \omega t) \quad \Psi_0 = \text{Amplitude}$$

x-Abh. der Amplitude charakterisiert durch Wellenzahl k oder Wellenlänge λ mit $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

zeitl. Abh. der Amplitude charakterisiert durch Frequenz $\nu = 1/T$ bzw. Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$



generell gibt es noch eine Phase, die durch Randbedingungen festgelegt wird. Also z.B. zu Zeit $t=0$ sei am Ort $x=0$ die Amplitude gleich 0 (siehe oben)

Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle

Wie schnell bewegt sich Wellenbild mit t ?

dh. Wie schnell wandern Punkte gleicher Phase?

$$kx - \omega t = \text{konst} \quad x = \frac{\text{konst}}{k} + \frac{\omega}{k} t$$

$$dx/dt = \left| v_{\text{Phase}} = \frac{\omega}{k} \right| = \lambda \cdot \nu = \lambda/T$$

$\Psi = \Psi_0 \sin k(x - v_{\text{ph}} t)$ - Welle läuft nach rechts, d.h. in pos. x-Richtung

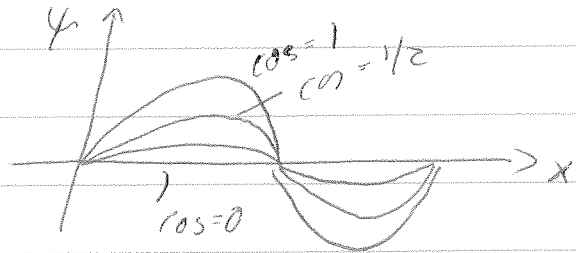
+ : Welle läuft in neg. x-Richtung

Superpositionsprinzip: Amplituden von Wellen addieren sich z.B. Seilwellen, Wasserwellen (Bojwelle plus andere Wellen) ..., gilt solange lineares Kraftgesetz gültig (kleine Amplituden)

spezielles Superpositionsbeispiel: stehende Welle, ist Superposition von rechts- und linksläufiger Welle gleicher Frequenz und Wellenlänge

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &= \Psi_0 (\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)) \\ &= \Psi_0 (\sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t + \sin kx \cos \omega t + \cos kx \sin \omega t) \\ &= 2\Psi_0 \sin kx \cos \omega t\end{aligned}$$

$\Psi_{\max}(x) = 2\Psi_0 \sin kx$ Antiknoten & Knoten
z.B. schwingende Saite



Wellengleichung: die Forderung eines Mediums für harmonischen Wellen ist

verknüpft mit einer Differentialgleichung für die Amplitude der Störung von der Form

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad \text{in 1 Dimension}$$

$$\text{bzw.} \quad v^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) \quad \text{in 3 Dimensionen}$$

$$= v^2 \Delta \Psi \quad \text{Laplace Operator } \Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$$

↳ Phasengeschw.

eine Klasse von Lösungen $\Psi(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$

mit beliebigem f, g

lineare Wellengleichung \rightarrow Superposition

ebene Welle in 3 Dimensionen

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

↳ Wellenzahl \vec{k} \parallel \vec{v}

Kugelwelle mit Zentrum bei $\vec{r} = 0$

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{\Psi_0}{r} \cos(kr - \omega t) \quad \text{d.h. Wellenfronten sind Kugeln}$$

↳ $\vec{k} \parallel \vec{r}$

wegen Energieerhaltung

Wellengleichung für elektromagnetische Wellen:

Maxwell Gleichungen in Vakuum $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ \leftarrow Vakuum: $\rho = 0$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ \leftarrow $j = 0$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right)$$

$$a \times (b \times c) = b(ac) - c(ab)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = - \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} = - \Delta \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$$- \Delta \vec{E} = - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

bzw

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Delta \vec{E} \\ \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Delta \vec{B} \end{aligned}}$$

und analog

Typische Wellenphänomene:

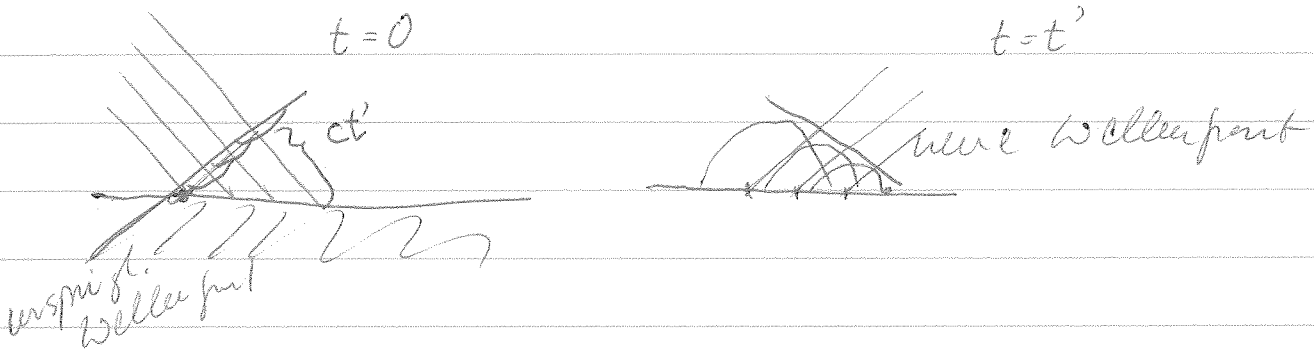
Reflektion und Brechung (Refraktion) \leftrightarrow an Medien-
grenzen

Dispersion (wenn k von ω abhängt, Dispersions-
relation $\omega(k)$)

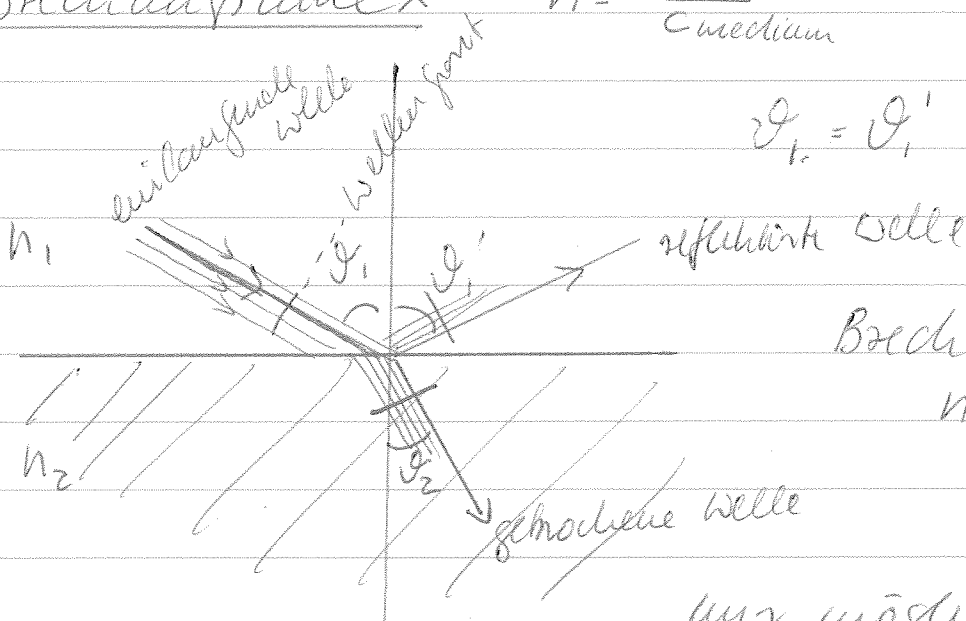
Biegung (Diffraktion) und Interferenz \leftrightarrow an Hindernissen

Huygenssches Prinzip (in der Version von Fresnel):
 jeder Punkt einer Wellenfront (Orte gleicher Phase) kann als Ausgangspunkt einer Kugelwelle betrachtet werden. Die Wellenamplitude zu einem späteren Zeitpunkt erhält man durch Superposition aller dieser Kugelwellen.
 vereinfacht: Grenzfläche der Kugelwellen \rightarrow neue Wellenfront

Reflexion $B_e = B_A$ wenn Welle nicht in Medien mit niedrigeren n (z. B. Metalle)



an Grenze zweier Medien mit unterschiedlichen Brechungsindex $n = \frac{c}{c_{\text{medium}}}$



$\theta_i = \theta_i'$ Reflexion

Brechung:

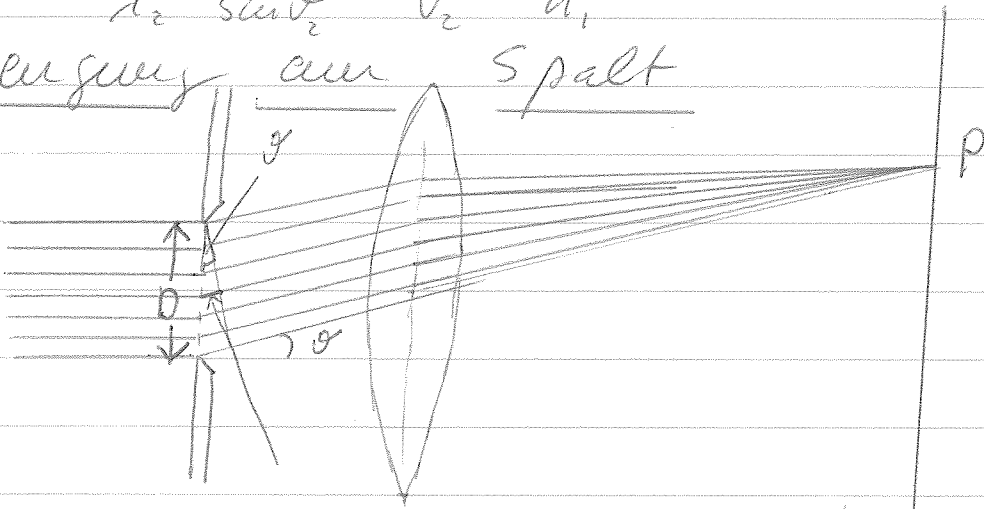
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (\text{Snellius})$$

nur möglich wenn $\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 < 1$

Sonst Totalreflexion

erklärt durch Huygens (1678): Überlagerung
(Interferenz) von Wellen, so daß $\lambda_1/v_1 = \lambda_2/v_2$
oder $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$

Biegung am Spalt



Spaltbreite D , Wellenlänge λ
Maxima am Schirm \rightarrow Wellen Schirm
in Phase

Minima: Phasendiff. zwischen Strahl durch Mitte
des Spalts und Strahl an der Kante π

$$\sin \vartheta_{\min} \cdot \frac{D}{2} = \frac{\lambda}{2}, \dots \quad (\text{Phasendiff.} = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ Weglängendiff.})$$

$$\text{bzw. } \sin \vartheta_{\min} = \frac{n\lambda}{D} \quad n \text{ ganzzahlig} \quad \phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x \sin \vartheta$$

\Rightarrow Fig 4-1

Maxima: halbweg zwischen Minima
also $\sin \vartheta_{\max} = \frac{n}{2} \frac{\lambda}{D}$ n ungerade

$$D = \lambda \quad 1. \text{ Min bei } 90^\circ$$

$$D = 10\lambda \quad 6$$

$$100\lambda \quad 0.6^\circ$$

ausgeprägtes Interferenzmuster für $D \approx \lambda$

für $D \gg \lambda$ Min. & Max sehr nahe, aber Intensität
fällt steil ab; für $D \ll \lambda$ keine Interferenz

$$\frac{I_{\vartheta}}{I_0} = \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 = \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi D}{\lambda} \sin \vartheta \right)}{\left(\frac{\pi D}{\lambda} \sin \vartheta \right)} \right)^2 \quad \text{mit } \alpha = \frac{\phi}{2} \text{ für } \Delta x = 0$$

so fällt Einhüllende der Intensität mit Maxima und Minima wie beschrieben.

d. h. Intensität des zweiten, dritten, ... Maximums fällt mit $\left(\frac{1}{(n + \frac{1}{2})\pi} \right)^2$

einzelnes Hohlrohr's : äquivalent wie Spalt
kreisförmige Apertur a :

1. Min. bei $\sin \vartheta_{\min} = 1,22 \frac{\lambda}{d}$



numerischer Faktor
durch Integration Flächenelemente,
die im gleichen Winkel beitragen

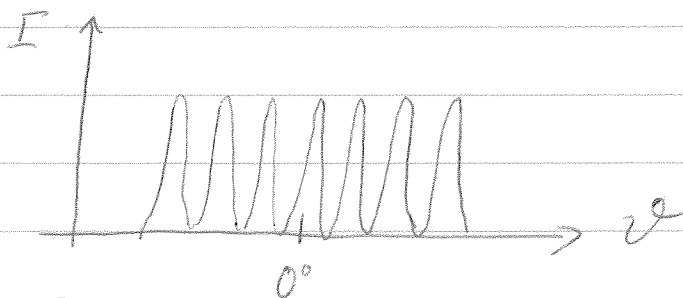
Doppelspalt: (Young Experiment 1801)

Spalte von Breite a und Abstand $d \Rightarrow$ Fig. 4-2

Maxima bei $d \sin \vartheta_{\max} = m \lambda$

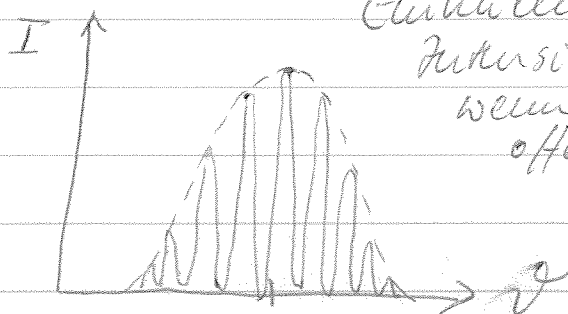
$$d \sin \vartheta_{\max} = m \lambda$$

für $a \ll \lambda$



Spalte endlicher Breite

z.B. $d = 50 \lambda$ $a = 5 \lambda$



Einhüllende:
Intensitätsverteilung
wenn nur 1 Spalt
offen

u.U. Demo Beugung am Gitter

weißes Licht
 monochromatisches Licht

1. Gitter m. 25 / mm
 (Raußgitter) → viele Ordn.
 2. Rolandgitter 572 / mm
 → 0., 1., 2. Ordnung

Beugung am Gitter

große Anzahl paralleler Spalte
 → Beugungsgitter ⇒ Fig 4-2
 wie Doppelspalt Maxima bei

$$\sin \theta_{\text{max}} = \frac{m \lambda}{d} \quad (\text{Hauptmaxima})$$
 entscheidender Unterschied: je mehr Spalte das Gitter hat, desto schärfer und schmaler werden Maxima

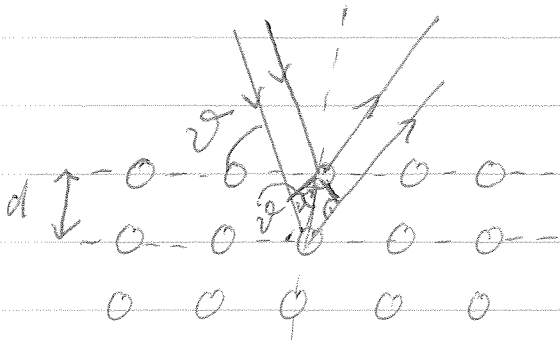
Röntgenbeugung am Kristall

In Kap. 3 hatten wir Ursprung der Röntgenlinien gesehen. Energie hängt stark von Z ab, typischer Wert Mitte des Periodensystems

$$E_x = 40 \text{ keV} \quad \lambda_x = \frac{hc}{E} = \frac{1240 \text{ eV nm}}{4 \cdot 10^4 \text{ eV}} = 0.03 \text{ nm} = 0.3 \text{ \AA}$$

Röntgenwellenlänge vergleichbar mit Größe eines Atoms und daher ist Röntgenstrahlung (Beugung) am Kristallgittern vergleichbar mit Beugung von Licht an Beugungsgitter

Atomabstände im Kristall: einige \AA
 d.h. $\lambda_x =$ einige 10 Gitterabstände, ideal im Fachraum zu sehen. (Vorschlag: Max von Laue (1873-1960) um 1912). Da Wellenlänge viel kleiner als bei sichtbarem Licht → viel bessere Auflösung



konstruk. Reflexion wenn

$$m\lambda = 2d \sin \theta$$

Bragg-Gleichung

d : Abstand von 2 Gitterebenen
im Kristall

nach W. L. Bragg (1890-1971) der sie mit seinem
Vater W. H. Bragg (1862-1942) ablichtete und die
gemeinsam die Theorie und Technik der Röntgen-
Beugung zum Studieren von Kristallgittern 1912-
1913 entwickelten.

In Realität ziemlich schwierig, in einem Kristall
als 3-dim. Objekt gibt es viele mögliche Stree-
ebenen (siehe Fig. 4-3) \rightarrow Aufklärung Kristall-
struktur, z.B. NaCl kubisch Beispiel \Rightarrow Fig. 4-6
idealerweise Einkristall

polykristallin: anstatt regelmäßigem Punktmuster
Kreise (siehe auch Fig 4-6) wobei jeder Kreis
eine Beugungsordnung (m) entspricht, d.h. aus
einem Satz von parallelen Ebenen.

siehe auch Aufklärung der DNA Struktur durch
Watson und Crick 1953. Seit 1960 Proteine ...

4-11

Röntgenbeugung am Kristall
(Zusammenfassung)

Typische Wellenlänge $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{\Delta E}$

$$hc = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$$

Röntgenstrahlen durch Übergänge zwischen den inneren Atomschalen schwerer Elemente (z. B. Cu) = die harte Röntgenstrahlung

Oder Bremsstrahlung = kontinuierlich

$$40 \text{ keV} \rightarrow \lambda = 0.03 \text{ nm} = 0.3 \text{ \AA}$$

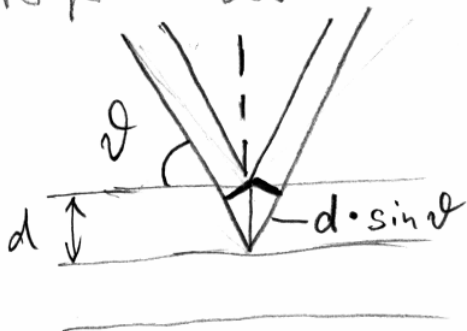
Gitterabstand im Kristall: einige \AA

Bragg-Reflexion

Gitterebenen bieten viele Streuzentren
 \rightarrow Überlagerung

Ebene \Rightarrow Einfallswinkel = Ausfallswinkel
für paralleles (unendl. ausgedehntes)
Strahlenbündel

Interferenz der Ebenen \Rightarrow Bragg-Bedingung



$$2d \sin \vartheta = m \cdot \lambda$$

4-12

Röntgenbeugung - Methoden

Einkristall und Röntgen spektrum

(= Band von Wellenlängen)

→ von Laue-Diagramm (Fig. 4.4)

Ermittlung von Kristallstrukturen,
Symmetrien

Polykristalline Substanz, monochromatische
Strahlung

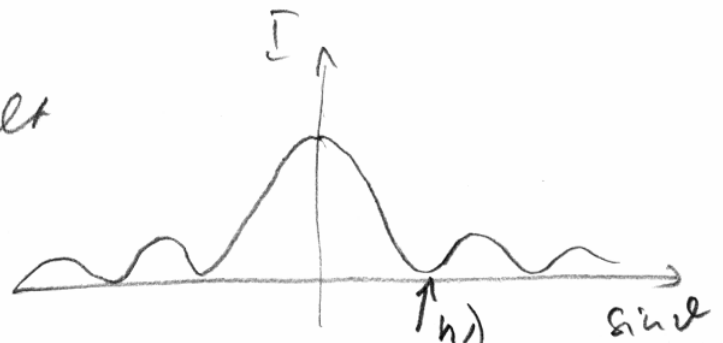
→ Debye-Scherrer-Diagramm (Fig. 4.5)

Kristallisierte Biomoleküle

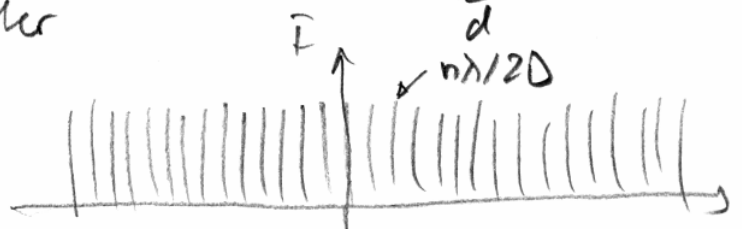
⇒ Molekülstruktur

Wie funktioniert es?

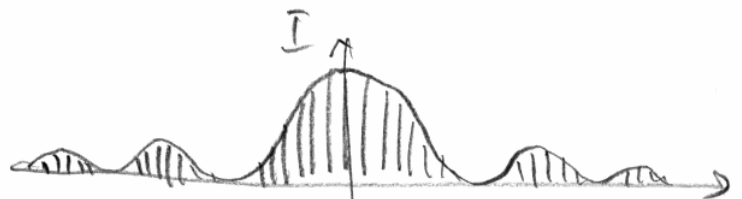
Beugung am Spalt



am Gitter
(viele Punkte)



an vielen Spalten
als Gitter



4.2 Materiewellen - De Broglie-Wellenlänge

Das Bohrsche Atommodell zeigt 1913, dass stabile, nicht nach klassischem Gesetz Energie abstrahlende Elektronen-Bewegungen existieren. Warum scheint im Atom eine „spezielle“ Mechanik zu existieren?

(1892-1987!)

Louis de Broglie hat 1923/24 die Idee, die Ansätze von Planck und von Einstein zu vereinigen. (Im Privatlabor des Bruders Maurice arbeitend, 1923 Dissertation.)

Ausgangspunkt, das Licht persistent Wellen- und Teilchen eigenem Charakter zu haben scheint. (siehe Maxwell-Gl., Compton-Effekt, Photoeffekt, usw.)

Planck: $(\Delta)E = h\nu$

De-Broglie: Einen periodischen Vorgang jedem isolierten Energiezustand zuordnen.

$$E_0 = m_0 c^2 \stackrel{!}{=} h\nu_0 \quad (\text{in } S')$$

$$\psi(t') = \text{„cos“}(-\omega_0 t')$$

allgemeine periodische Funktion.

Lorentz-Transformation

(Welle bei $x'=0$)

$$\Rightarrow E = \gamma E_0 = \gamma m_0 c^2 = \gamma h\nu_0$$

4-14

$$\text{und } t' = \gamma \left(t - \frac{v x}{c^2} \right) \quad \begin{array}{c} -\omega_0 t' \\ \downarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \psi(t) = \text{„cos“} \left(\underbrace{\frac{\gamma \omega_0}{c^2} \cdot v \cdot x}_k - \underbrace{\gamma \omega_0 t}_\omega \right)$$

Welle mit Frequenz $\nu = 2\pi\omega = \gamma\nu_0 = \gamma \frac{m_0 c^2}{h}$

$$\text{und Wellenlänge } \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi \cdot c^2 \cdot h}{\gamma \cdot 2\pi m_0 \gamma^2 \cdot v}$$

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Wellenlänge entspricht dem relativistischen

Impuls $p = \gamma m_0 v$

$$\text{Ausbreitungsvektor } \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vec{e} = \frac{2\pi}{h} \cdot p \vec{e} = \frac{2\pi}{h} \cdot \vec{p}$$

$$\text{(Winkel)frequenz } \omega = \frac{2\pi}{h} \gamma m_0 c^2 = \frac{2\pi}{h} \cdot E$$

$$\Rightarrow \text{Materiewelle } \psi(\vec{r}, t) = \psi_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

beschreibt Ausbreitung eines „isolierten Energiepakets“

(= Teilchen + ...) mit $E = \hbar\omega$ (rel. Gesamtenergie)

$$\vec{p} = \hbar\vec{k} \quad (\text{rel. Impuls})$$

De Broglie zeigt, dass diese Annahme mit mechanischen Grundgesetzen verträglich ist.

Vollständig relativistische Herleitung! (Bild 4-6)

4-15

Über die Wellengleichung haben in den folgenden Jahren Erwin Schrödinger (1887-1961) und W. Heisenberg (1901-1976)

sehr weitgehende Aussagen gemacht.

$\psi(\vec{r}, t)$ muß (für $E \neq 0$) komplex sein.

(Es gelingt oft, den Imaginärteil in die Zeitabhängigkeit zu schieben, genau gesagt für gebundene Teilchen.)

— X →

Die Ideen wurden experimentell (≈ zeitgleich mit Heisenbergs und Schrödingers Arbeiten) durch Davisson + Germer in den Bell Telephone Lab's (N.Y.) bestätigt.

Nachweis elastischer gestreuter Elektronen an einer Einkristall-Oberfläche (Fig. 4-7).

Für Beugungsexperimente geeignete Teilchen:

Elektronen (Oberfläche - LEED-Verfahren)

Neutronen (durchdringen Material)
(Fig. 4-8)

An mechanischen Strukturen wurde zunächst mit Elektronen (Fig. 4-9) später mit Atomen gearbeitet.

4-15 (a)

X

Nichtrelativistisch

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \begin{cases} \frac{h}{\sqrt{2me}} & \frac{1}{\sqrt{E/e}} \\ \frac{h}{\sqrt{2mk}} & \frac{1}{\sqrt{E/k}} \end{cases}$$

Elektronen: $\lambda = \frac{1.23 \text{ nm}}{\sqrt{E/eV}}$

$$e = \frac{1 \text{ eV}}{1.7}$$

$$k = \frac{1 \text{ K}}{1.7}$$

Neutronen: $\lambda = \frac{0.0286 \text{ nm}}{\sqrt{E/eV}}$

Atome: $\lambda = \frac{0.0287 \text{ nm}}{\sqrt{A} \sqrt{E/eV}} = \frac{3.09 \text{ nm}}{\sqrt{A} \cdot \sqrt{T/K}}$

z.B. Na: $A=23$ (Massenzahl)

4-16

Überlagerung bei der Interferenz:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r}, t) + \psi_2(\vec{r}, t)$$

$$I = |\psi(\vec{r}, t)|^2 = |\psi_1(\vec{r}, t)|^2 + |\psi_2(\vec{r}, t)|^2$$

$$+ \underbrace{\psi_1 \psi_2^* + \psi_1^* \psi_2}_{\left(e^{ik(s_1-s_2)} + e^{-ik(s_1-s_2)} \right)}$$

$$= 2 \cos [k(s_2 - s_1)]$$

Überlagerung von Wellenfronten (Fig. 4-9).

Ab den '90er Jahren auch Atome

- Mikrofabrikation von Filtern

- Langsame "monochromatische" Atomstrahlen

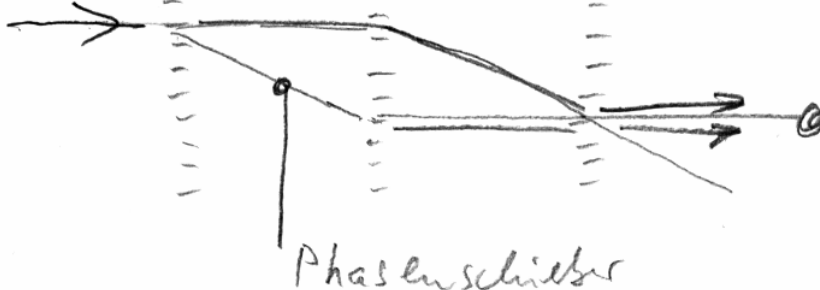
$$\lambda_{DB} \approx 0,1 \text{ nm}$$

Spur Spaltabstand (Fig. 4-10)

Apparatur Fig. 4-11

Gitterbeugung (Na-Atome) Fig. 12

Neutronen-Interferometrie (Mach-Zehnder-Interferometer)



4-17

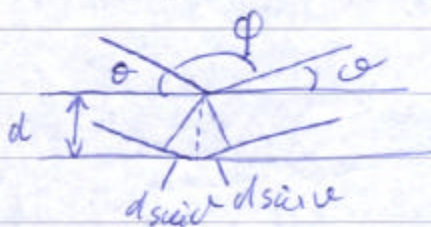
Interferenz findet auch statt,
wenn immer nur 1 Teilchen sich
der Apparatur befindet (geringe
Intensität). D.h. das Teilchen befindet
sich nach der Strahl aufspaltung
durch Beugung entweder auf dem
einen oder dem anderen Weg. (Fig. 4-14)

Elektronen lassen sich wie Licht zur
Abbildung von Objekten benutzen,
aber die Wellenlänge kann sehr
viel kleiner werden. → Elektronenmikroskop
(Fig. 4-15) und Rasterelektronen-
mikroskop (sehr kleiner Strahl durch
Fokussierung), Fig. 4-16+17.

Zusammenfassung Kap. 4.2.

de Broglie Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc}$ kann jedem Teilchen mit Impuls p zugeordnet werden

1. exp. Nachweis: Davisson & Germer 1926
Streuung von Elektronen ($T \approx 50 \text{ eV}$) am Ni-Kristall. Interferenz konstruktiv wenn Bragg-Bedingung erfüllt $\Delta x = a \sin \phi = n \lambda$



Konstr. Interferenz wenn $\Delta x = 2d \sin \phi = n \lambda$ Streuung an Gitterebene II Einfluss

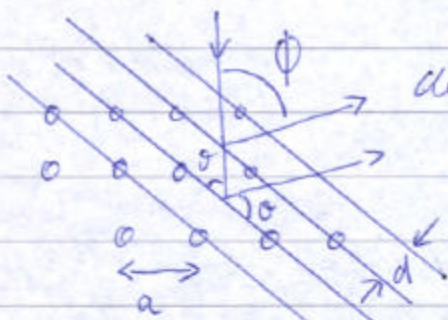
$\phi + 2\phi = 180^\circ \quad \phi/2 + \phi = 90^\circ$

$\Delta x = 2d \cos(\phi/2) = n \lambda$

allgemeiner:

$\frac{d}{a} = \cos \phi = \sin(\phi/2)$ kubischer Kristall

$\rightarrow \Delta x = 2a \cos(\phi/2) \sin(\phi/2) = a \sin \phi = n \lambda$



a Atomabstand

d Abstand von benachbarten Gitterebenen

$a(\text{Ni}) = 2.15 \text{ \AA}$ Max. bei 50° für $T = 54 \text{ eV}$

λ für Elektronen (54 eV):

nicht-relativistische $pc = \sqrt{2m_0c^2T} = 7.4 \text{ keV}$

$\lambda = \frac{1240 \text{ eV nm}}{7400 \text{ eV}} = 0.166 \text{ nm} = 1.66 \text{ \AA}$

$2.15 \text{ \AA} \cdot \sin 50^\circ = 1.65 \text{ \AA} \quad \checkmark$

Bergung am Doppelspalt erst viel später (Jönsson 1961), da erst dann passend

4-19

Doppelspalt produziert werden konnte
Elektronen mit $T = 50 \text{ keV}$ $\lambda = 5.4 \text{ pm}$

Doppelspalt: Spalt-Spalt $d = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
Spaltbreite $a = 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

Beugung am Spalt Maxima $2.7 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$ auseinander

" " Doppelspalt $1.6 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$

auch: Neutronenstrahlen

inzwischen a) Mikrofabrikation von Gittern
und b) Erzeugung langsamer "monochromatischer"
Atomstrahlen (z.B. Na-Atome mit
 $\lambda = 0.1 \text{ nm}$)

Anwendung: z.B. Elektronenmikroskop

4.3. Wellen, Wellenpaket, Unschärferelation

ebene Welle $\Psi_1 = A \cos(\omega t - kx)$ $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$

Überlagerung von 2 Wellen mit nahe beieinander-
liegenden Frequenzen:

addiert $\Psi_2 = A \cos((\omega + d\omega)t - (k + dk)x)$ und
benutze $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right] \cos\left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right]$

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A \cos\left[\frac{1}{2}((2\omega + d\omega)t - (2k + dk)x)\right] \cdot \cos\left[\frac{1}{2}(d\omega t - dkx)\right]$$

da $d\omega \ll \omega$ und $dk \ll k$

$$\Psi = 2A \cos(\omega t - kx) \cos\left(\frac{d\omega}{2} t - \frac{dk}{2} x\right) \Rightarrow \text{Fig. 4-10}$$

"Schwebung", sieht aus wie ursprüngliche

Welle ab Amplitude ist nicht konstant sondern oszilliert langsam

$$A(t, x) = 2A \cos\left(\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x\right)$$

Amplitude oder Umhüllende propagiert langsam mit Geschwindigkeit $\frac{d\omega}{dk}$

⇒ Wellenpaket charakterisiert durch zwei relevante Geschwindigkeiten

a) schnelle Oszillation, sehr ähnlich der ursprünglichen Welle, propagiert mit Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \omega/k$

b) Modulation der Amplitude; gesamtes Wellenpaket propagiert langsam mit Geschwindigkeit gegeben durch Unterschied in Frequenz und Wellenzahl der überlagerten Wellen
Gruppengeschwindigkeit $v_{gr} = d\omega/dk$

nicht-sinusförmige periodische Wellen

(Rechteck, Dreieck, ... unharmonische Töne)

jede 'beliebige' periodische Funktion $f(x) = f(x+\lambda)$ kann als Summe dargestellt werden:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nkx) + B_n \sin(nkx))$$

mit $k = 2\pi/\lambda$

"Fourier - Theorem"

mit Fourierkoeffizienten

$$A_n = \frac{2\pi}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) \cos(nkx) dx \quad \text{und}$$

$$B_n = \frac{2\pi}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) \sin(nkx) dx$$

4-21

hier ist 'beliebig' ziemlich weitgehend, endlich viele Sprungstellen erlaubt (Richtech)

NB: häufig ist komplexe Schreibweise vorkommt
 $A \cos \omega t + B \sin \omega t = F \exp(i \omega t)$
 $A \cos(kx) + B \sin(kx) \dots$ komplex

damit wird

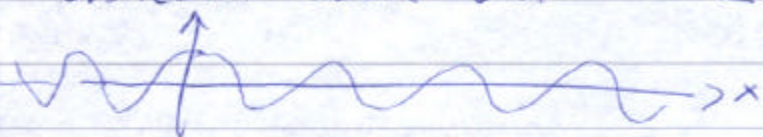
$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(in k x)$$

mit Koeffizienten $A_n = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(x) \exp(-in k x) dx$

(siehe z.B. Kap 16 V. Riech, Mathematik für den Exp. physik Vorlesungen - Spektrum Akad. Verlag, Heidelberg 1997)

Lokalisierung von Wellen

a) ebene Welle vom Typ $\Psi = A \cos(kx - \omega t)$
 erstreckt sich von $-\infty \leq x \leq \infty$



Keine Information über Lokalisierung in x-Richtung. Andererseits ist der Impuls genau bekannt $p = h/\lambda$ mit $k = \frac{2\pi}{\lambda} \leadsto p = \frac{h k}{2\pi} = \hbar k$

↑
kürzere Notation

Unschärfe im Raum: unendlich groß
 " Impuls: Null

b) Wellenpaket (siehe Beispiel oben): wiederholt sich immer noch endlos, ist aber etwas mehr

4-22

im Raum lokalisiert. Zu jeder gegebenen Zeit gibt es an manchen Orten große Amplitude, an anderen kleine. Das ist aber auf Kosten einer Unschärfe in der Wellenlänge Δk und damit im Impuls 'erkauft'.

c) Um Wellenpaket im Ort zu lokalisieren

(z.B. Seilwelle, Lichtblitz ...):

Addition sehr vieler Wellen mit genau festgelegten unterschiedlichen Wellenlängen $\lambda, \lambda + d\lambda, \lambda + d\lambda_2, \dots$ ergibt ein Wellenpaket mit guter Lokalisierung d.h. Wellenpaket für das

⇒ Fig. 4-11

Amplitude nur in einem kleinen

Bereich um x vom Null verschieden ist

Mathematische Beschreibung durch Fourierreihe

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(k) \cos(kx) + B(k) \sin(kx)] dk$$

Entwicklungskoeffizienten A_n sind in kontinuierliche Funktionen der Wellenlänge, bzw. des Impulses, übergegangen. Das diskrete Frequenzspektrum A_n, B_n , das periodische Funktion beschreibt geht in kontinuierliches Frequenzspektrum $A(k)$ über, das die unperiodische Funktion beschreibt. $\sum_n \rightarrow \int dk$

analog für den zeitabhängigen Teil

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) \cos \omega t + B(\omega) \sin \omega t] d\omega$$

bzw. im komplexen Dst $\Psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) \exp(-ikx) dk$

und $g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \exp(ikx) dx$ Fouriertransf. verhältnis

die Funktion $g(k)$ ist die Fouriertransformierte von $\Psi(x)$ im Ortsraum und Wellenzahl (Impuls)raum

$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$ bzw. Zeitraum und Frequenzraum

$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt$

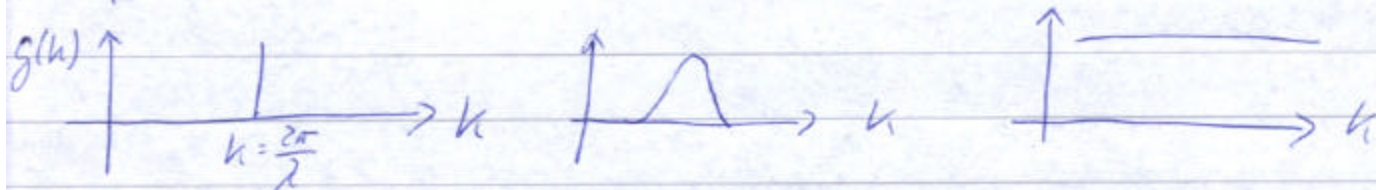
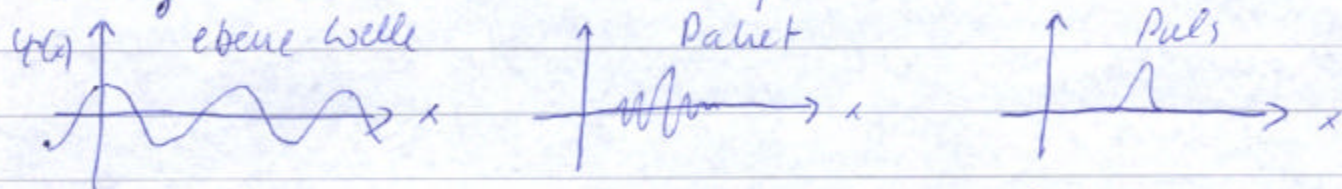
(Kap. 18 Riech)

Lokalisierung von Wellenpaket: in x mit typischer Breite Δx

da viele Wellen addiert ist Wellenzahl (Impuls) mit Breite Δk bzw.

Δp bekannt.

a-c zeigen: es gibt allgemeinen Zusammenhang zwischen Unschärfe im Ort und im Impuls



Specialfall: Gaussfunktion $\Psi(x) = \exp(-x^2/2L^2)$

Standardabweichung $\sigma_x = L$

$$g(k) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{2L^2}} \exp(-k^2 L^2/2) \quad \sigma_k = \frac{1}{L} \quad \left. \vphantom{g(k)} \right\} \sigma_x \sigma_k = 1$$

Zirkularität (oder Wahrscheinlichkeit, Teilchen zu finden): $|\psi(x)|^2$ hat $\delta_x = L/\sqrt{2}$
 $|g(k)|^2$ hat $\delta_k = \frac{1}{\sqrt{2}L}$ } $\delta_x \cdot \delta_k = \frac{1}{2}$
 bzw. $\delta_x \cdot \delta_p = \hbar/2$

dies ist das kleinstmögliche Produkt von δ_x und δ_k für andere Funktionen stets größer.

Das Produkt $\delta_x \cdot \delta_p$ nennt man "Orts- Impuls-unschärfe"

Analog gibt es die äquivalente Relation

$\delta_t \cdot \delta_\omega$ für Gausswellenfunktion $\delta_t \cdot \delta_\omega = 1$

für Zirkularität (Wahrscheinlichkeit) $\delta_t \cdot \delta_\omega = 1/2$

da $E = h\nu = \frac{h\omega}{2\pi} = \hbar\omega$

"Energie-Zeit - Unschärfe" $\delta_t \cdot \delta_E = \hbar/2$

für alle anderen Funktionen kann man zeigen
 $\delta_x \cdot \delta_k \geq 1$ $\delta_t \cdot \delta_\omega \geq 1$

Dies ist eine allgemeine Welleneigenschaft wenn Teilchen nach de Broglie als Wellen beschrieben werden unabhängig diese 'klassische' Welleneigenschaft der Unschärferelation auch auf Teilchenwellen anzuwenden sein, zuerst realisiert von Werner Heisenberg \Rightarrow Fig 4-12

"Heisenberg'sche Unschärferelation" für Teilchenwellen

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar/2 \quad \text{und} \quad \Delta t \cdot \Delta E \geq \hbar/2}$$

Beispiele:

1. Eine Messung etabliert die Position eines Protons auf $\Delta x = \pm 10^{-11} \text{ m}$. Was ist die Unsicherheit in der Position 1 Sekunde später?

Annahme $v \ll c$

$$\text{zur Zeit } t=0 \quad \Delta x_0 = \pm 10^{-11} \text{ m} \quad \Delta p_{x0} \geq \frac{\hbar}{\Delta x_0 \cdot 2}$$

$$\leadsto \Delta v \geq \frac{\hbar}{m_0 \Delta x_0 \cdot 2}$$

Distanz die Proton in 1 Sekunde durchläuft ist mit Genauigkeit $\Delta x = t \Delta v$ bekannt

$$\text{also } \Delta x \geq \frac{\hbar}{m_0 \Delta x_0 \cdot 2} \cdot t \quad \text{inverse prop. zu } \Delta x_0! \text{ je genauer}$$

Position zur Zeit $t=0$ bekannt, desto weniger wissen wir zur Zeit t später.

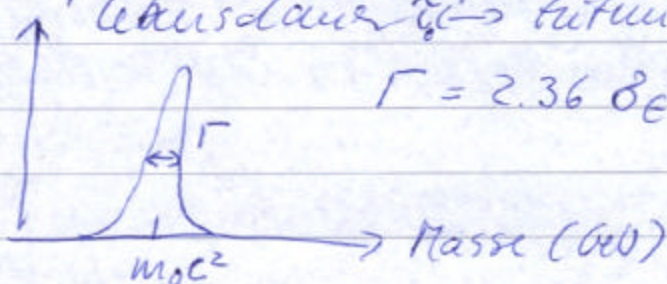
$$\frac{\Delta x}{c} \geq \frac{1240 \text{ MeV fm} \cdot 1 \text{ s}}{2 \cdot 3 \cdot 14 \cdot 1000 \text{ MeV} \cdot 10^4 \text{ fm} \cdot 2} \approx 10^{-5} \text{ s}$$

$$\text{d.h. } \Delta x \geq 10^{-5} \text{ s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 3000 \text{ m} !$$

ursprüngliches Wellenpaket ist auseinandergefallen da Phasengeschwindigkeiten der Komponenten variieren und eine große Zahl von Wellen überlagert werden muß, um zur Zeit $t=0$ Lokalisierung auf 10^{-11} m zu erreichen

2. Zusammenhang Lebensdauer eines Teilchens und Zerfallsbreite Γ

Zerfallsbreite entspricht Energieunschärfe ΔE
Lebensdauer $\tau_0 \rightarrow$ Zeitunschärfe Δt



$$\Gamma = 2.36 \text{ Ge}$$

$$\Gamma \cdot \tau_0 \approx \hbar$$

\Rightarrow Fig 4-13