2. Spezielle Relativitätstheorie

Wird erlauben, Beobachtungen, die in verschiedenen Bezugssystemen gemacht werden, zu vergleichen
z.B. System in Ruhe relativ zur Erde "Labor-System" und ein relativ zur Erde bewegtes System (z.B. PKW) Illustration ⇨ Fig 2-1

Wir werden hier nur Bezugssysteme betrachten, die sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegen
"Inertialsysteme"
Definition: Ein Inertialsystem ist ein Bezugssystem in dem das Newton'sche Trägheitsgesetz gilt - Teilchen erfährt nur Beschleunigung wenn eine Kraft auf es wirkt.
In Abwesenheit realer Kräfte (F_g, F_r) und von Scheinkräften ($F_{Zentrifugal}$)
$\vec{a} = 0$ $\vec{v} = konst.$

2.1. Behandlung in der klassischen Physik

Galilei Transformation: Geschwindigkeiten addieren sich vektoriell

Beispielsysteme ⇨ Fig. 2-2

Beobachter O in Ruhesystem 1 misst Geschwindigkeit eines Objekts $\vec{u}$; Beobachter O' in Ruhesystem 2, das sich mit konst. Geschwindigkeit $\vec{v}$ in x-Richtung relativ zu O bewegt, misst Geschwindigkeit desselben Objekts als $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$

Definition: Richtung der relativen Bewegung zwischen Bezugssystemen ist die x-Achse

dann ist die Galilei Transformation

Geschwindigkeit	Ort	Beschleunigung
$u_x' = u_x - v$	$x' = x - vt$	$a_x' = a_x$
$u_y' = u_y$	$y' = y$	$a_y' = a_y$
$u_z' = u_z$	$z' = z$	$a_z' = a_z$

2.2 Elektromagnetismus und Galilei Transformation

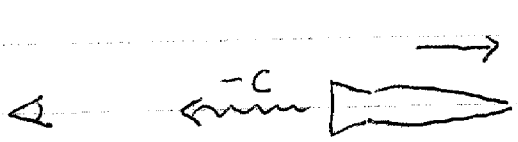
EM definiert durch 4 Maxwell Gleichungen. Sehr erfolgreiche Theorie. Existent - mit anderen Wissenschaftlern - war gestört durch die Tatsache, daß Maxells Theorie nicht "kovariant" unter Galilei Transformation ist.

i) elektromagnetische Wellen propagieren im Vakuum mit einer konstanten und endlichen Geschwindigkeit, der Lichtgeschwindigkeit c
$c = 3 \cdot 10^8$ m/s (war zu diesem Zeitpunkt durch verschiedenste Messungen schon gut bekannt).
in einem bewegten Bezugssystem müßte sich mit Galilei T. c verändern

Gedankenexperiment

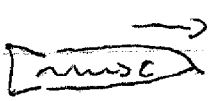
Rakete bewegt sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ und feuert Lasersignale in Richtung Erde, die dort beobachtet werden. Ruhesystem der Rakete S', Ruhesystem der Erde S

Rakete entfernt sich von der Erde



Beobachter auf der Erde misst für diese Signale Lichtgeschwindigkeit $u_x = u_x' + v = v - c$

Rakete bewegt sich auf die Erde zu



Beobachter auf der Erde misst Lichtgeschwindigkeit $u_x = u_x' + v = c + v$

Wäre das wahr, dann würde nur ein Beobachter, der sich mit derselben Geschwindigkeit, wie die Lichtquelle bewegt, die Lichtgeschwindigkeit als $c = 3 \cdot 10^8$ m/s messen

~~Maxwell falsch?~~ ~~Galilei Transf. für Licht falsch?~~

Um Galilei Transformation für Lichtwellen zu retten müsste man ein absolutes Bezugssystem einführen.

Hypothese: ähnlich wie Schallwellen ein Ausbreitungsmedium benötigen (Luft, Wasser, ...), ist der sogenannte "Äther" Ausbreitungsmedium für Licht. Damit hätte man ein speziell ausgezeichnetes absolutes Bezugssystem in dem die Lichtgeschwindigkeit gleich c ist. In Systemen, die sich relativ zum Äther bewegen wäre Lichtgeschwindigkeit $\neq c$

kann nur durch Messung entschieden werden

da c eine sehr hohe Geschwindigkeit, ist Messung sehr schwierig. Einfacher: kleine Differenz zwischen großen Geschwindigkeiten zu messen, als abs. Geschwindigkeit.

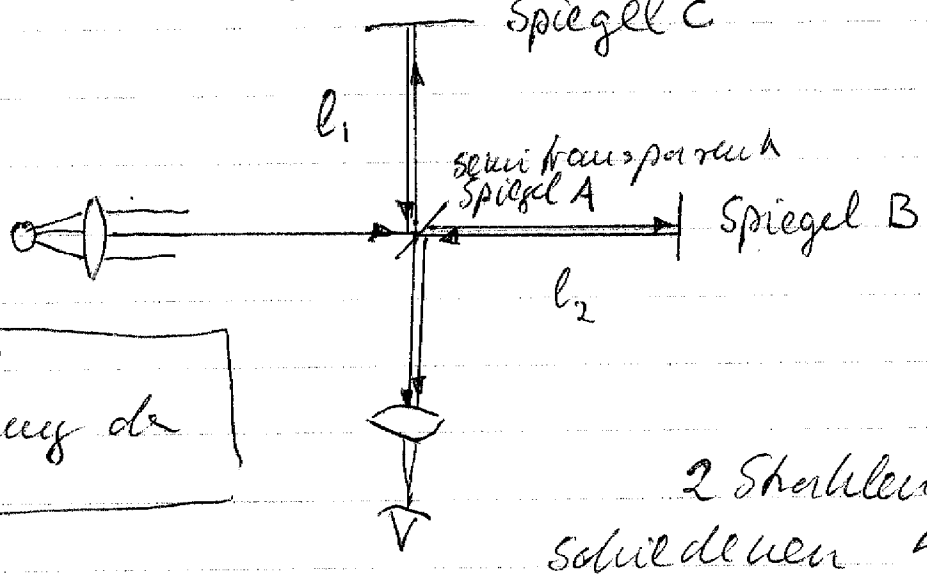
Michelson - Morley Experiment

vorgeschlagen von Maxwell in seinem letzten Lebensjahr (1879), erstmals von Albert Michelson 1881 durchgeführt, genauer zusammen mit Edward Morley 1887.

Idee: Erde ist bewegtes Bezugssystem relativ zum Sonnensystem (in dem der Äther ruht). Messe Lichtgeschwindigkeit in verschiedene Richtungen relativ zur Erdgeschwindigkeit.

H. Bemerkung: Äther ist für diese Betrachtung nicht wirklich relevant. Erde bewegt sich mit $v = 30\ km/s = 3 \cdot 10^4\ m/s$ $\beta = v/c = 10^{-4}$

2 kohärente Lichtstrahlen, einmal optischer Weg parallel zu Bewegung der Erde, einmal senkrecht dazu



l_1 und l_2 sehr ähnlich

2 Strahlen nehmen verschiedenen Weg. Im "Auge" (Detektor, Bildschirm) interferieren sie

ein Interferenzstreifensystem mit abwechselnden hellen und dunklen Ringen entsteht

dunkel: Wegunterschied $n\lambda/2$ n ungerade

hell: " $n\lambda$ n ganzzahlig

geniale Idee: das ganze Experiment wird 90° rotiert, Strahl entlang l_2 jetzt senkrecht zur Erdbewegung, l_1 parallel. Wenn v und c sich addieren müsste Phasendifferenz zwischen den beiden Strahlen sich verschieben ⇝ Verschiebung um ΔN Streifen (Ringen) im Interferenzbild.

mit Annahme Galilei Transformation kann man ausarbeiten (siehe Übungsaufgabe)

für Normalstellung (0°)

$$\Delta\phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}\left[2(l_2 - l_1) + \beta^2(2l_2 - l_1)\right]$$

für rotierte Stellung (90°)

$$\Delta\phi_2 = -\frac{2\pi}{\lambda}\left[2(l_1 - l_2) + \beta^2(2l_1 - l_2)\right]$$

hier $\beta = v/c$

und damit eine Verschiebung im Streifensystem um $\Delta N = \frac{\beta^2}{\lambda}(l_1 + l_2)$

im 1887 Michelson-Morley Experiment ⇒ Fig. 2-3

$l_1 \simeq l_2 = 10\,m$ $\lambda = 500\,nm = 5\cdot 10^{-7}\,m$

erwarte Streifenverschiebung

$$\Delta N_{ew} = \frac{10^{-8}\cdot 20\,m}{5\cdot 10^{-7}\,m} = 0.4$$

0.5 wäre einmal hell → dunkel. Instrument konnte $\Delta N = 0.01$ auflösen

experimentell kein Effekt zu sehen.
auch Drehungen um andere Winkel,
Tag- Nachtunterschiede, Beobachtung über 1
Jahr : keine Änderung } Fig. 2-4

Schlußfolgerung : Galilei Transformation für Licht nicht anwendbar, $c' = c$ = konstant unabhängig von Bewegungszustand der Quelle

Moderne Version mit Laser 1979 verbesserte Auflösung um Faktor 4000 ~ keine Verschiebung

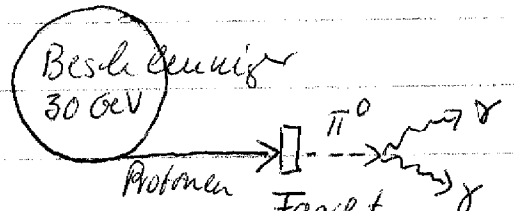
2.3. Einsteins Postulate

i) **Prinzip der Relativität : die Gesetze der Physik sind die gleichen in allen Inertialsystemen**

es gibt kein "absolutes" Bezugssystem. In verschiedenen Inertialsystemen durchgeführte Experimente ergeben alle die selben Resultate
z.B. $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ gilt immer
Physikalische Größen können aber in verschiedenen nicht Galilei invariant sein $\vec{a} \longleftrightarrow \vec{v}, \vec{p}$

ii) **die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum hat in allen Inertialsystemen den gleichen Wert c**

beste experimentelle Bestimmung : Beschleunigerexperiment



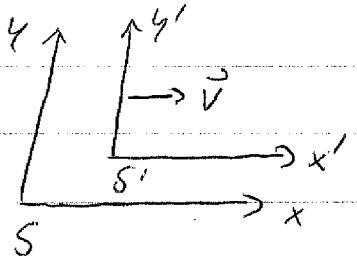
Produktion von sehr schnellen neutralen Pionen mit
$v = 0.9998\,c$
zerfallen nach im Mittel $8.7 \cdot 10^{-17}$ s in 2 Photonen. Messe Flugzeit der 2 Photonen über Flugstrecke von 31 m

Erwartung Galilei Transf. $c' = 0.9998c + c \approx 2c$
Beobachtung $c' = c = 2.9977 \pm 0.0004 \cdot 10^8$ m/s

2.4. Lorentz Transformation

korrekte Transformation von Hendrik Lorentz 1890 entdeckt. diese Form lässt Maxwell Gleichungen unverändert (siehe später).
Für kleine Geschwindigkeiten zwischen Systemen sollte sich Transformation auf Galilei Transformation reduzieren (korrekte Resultate in der makroskopischen Welt). Wahl des Ursprungs sollte keine Rolle spielen $\rightsquigarrow$ lineare Transformation. Einfachste Form

$$x' = C(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$



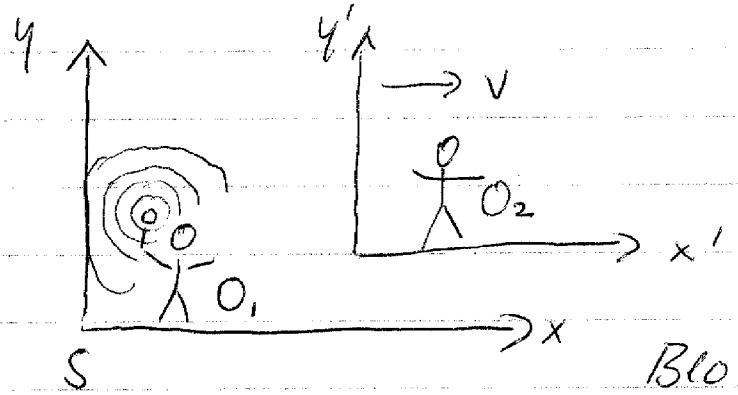
für $v \to 0$ muß sein $C \to 1$ (Galilei)

aber: Forderung daß Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen konstant ist impliziert, daß t' nicht gleich t sein kann

einfaches Gedankenexperiment illustriert in Fig 2-5
Beobachter auf 2 nebeneinander fahrenden Zügen stehen in der Mitte jeweils eines Wagons und beobachten Lichtblitze, die von Quellen an beiden Enden des einen Wagons kommen. Beobachtung zu verschiedenen Zeiten zeigt, daß Gleichzeitigkeit nicht unabhängig von den Ortskoordinaten definiert werden kann. Resp ob nach Einsteins 1. Postulat erhalten sei. Einzig Ansatz: $t = t'$ und t' muß von Ort abhängen

einfachste Form $t' = At + Bx$ mit $A \to 1, B \to 0$ für $v \to 0$

Bestimmung der Faktoren A, B, C mit Hilfe von Einsteins 1. Postulat.



Beobachter O_1 sieht Lichtblitz und 'sieht' sich sphärisch expandierende Welle. Entfernung der Wellenfront von ihm $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$

Beobachter O_2 muß in seinem eigenen Ruhe-System dasselbe beobachten, auch eine sphärisch expandierende Wellenfront, also

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

und $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$

bzw. mit $x^2+y^2+z^2 = r^2$
$r^2 - c^2t^2 = r'^2 - c^2t'^2$ interessant! Grösse ist gleich in allen Ruhesystemen, d.h. ist invariant (siehe später: Vierervektor Ort-Zeit)

von oben $y=y'$ $z=z'$ ~ mit obigem Ansatz für x' und t'

$$x^2\underbrace{(1 - C^2 + C^2B^2)}_{=0} + t^2c^2\underbrace{(A^2 - 1 - \frac{v^2}{c^2}C^2)}_{=0} + 2xt\underbrace{(C^2v + c^2AB)}_{=0} = 0$$

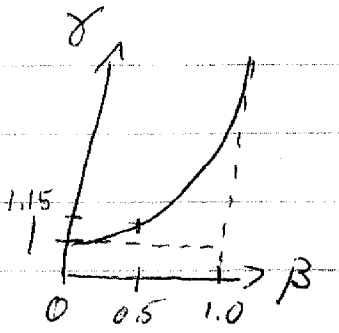
da x und t unabhängige Variable
Lösung der 3 Gleichungen → 3 Faktoren A, B, C

$$A = C = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad B = \frac{-v/c}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

definiere $\beta = v/c$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$A = C = \gamma$ $B = -\frac{\beta\gamma}{c}$

Grenzwerte $v \to 0$: $\beta \to 0$ $\gamma \to 1$
$v \to c$: $\beta \to 1$ $\gamma \to \infty$



Lorentz Transformation von Orts- und Zeit-Koordinaten

$$x' = \gamma(x - \beta ct)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

für die inverse Transformation

$$x = \gamma(x' + \beta ct')$$
$$ct = \gamma(ct' + \beta x)$$

analog

Bem.: ct hat Dimension einer Länge, werden grundsätzlich in Rel.theorie immer in Längeneinh. ver wendet

2.5. Längenkontraktion und Zeitdilatation

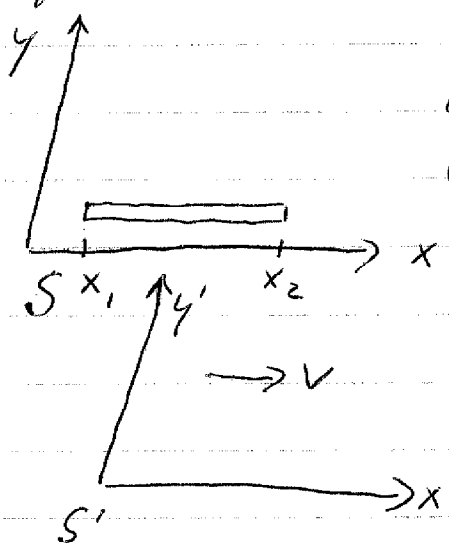
Da Zeit- und Ortskoordinaten systemabhängig sind, müssen auch Intervalle in Zeit (Dauer) und Ort (Länge) sich ändern

Definition: • Länge eines Objekts in einem Bezugssystem, in dem dieses Objekt in Ruhe ist ≡ Eigenlänge L_0

• Zeitintervall gemessen in einem Bezugssystem, in dem Ereignis am selben Ort stattfindet ≡ Eigenzeit τ_0

i) Betrachte Stab einer Länge $x_2 - x_1$ in Ruhe im System S. Beobachter O in Ruhe in diesem System kann Länge z.B. durch Photographieren bestimmen er misst die Länge

$L_0 = x_2 - x_1$ also die Eigenlänge



Beobachter O' im System S', das sich mit $\vec{v}$ in pos. x-Richtung bewegt macht Schnappschuss, während er den Stab passiert, d.h. er 'misst' die beiden Endpunkte x_2' und x_1' in seinem eigenen Ruhesystem, also gleichzeitig $t_1' = t_2' = t'$

$$\rightsquigarrow \quad x_2 = \gamma(x_2' + \beta c t') \quad (2)$$

$$x_1 = \gamma(x_1' + \beta c t') \quad (1)$$

$$(2)-(1) \quad x_2 - x_1 = L_0 = \gamma(x_2' - x_1') = \gamma L'$$

oder

$\boxed{L' = L_0/\gamma \leq L_0}$ Lorentz- oder Längenkontraktion

Die Eigenlänge ist die maximale Länge, die irgendein Beobachter messen kann. Grundsätzlich wird ein Beobachter, der sich relativ zum Objekt bewegt, eine kürzere Länge messen

Beispiel: Lastwagen m. Anhänger hat Eigenlänge 20m und nähert sich einer Brücke von Eigenlänge 18m. Mit welcher Geschwindigkeit müsste er Brücke überqueren, um einem Beobachter in Ruhe relativ zur Brücke gleich lang zu erscheinen

$L_{0L} = 20\,m \quad L_{0B} = 18\,m = L'_L \quad L_{0L} = \gamma L'_L \Rightarrow \gamma = \frac{20}{18} = 1.11$

$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0.44 \quad v = 0.44\,c = 1.3 \cdot 10^8\,m/s$

(nicht sehr realistisch)

Wie lange erscheint dem Lastwagen fahrer die Brücke? $L_{0B} = 18\,m \quad \gamma = 1.11 \quad L'_B = 18\,m/1.11 = 16.2\,m$

Protonradius: $r_p = 0.8\,fm$ } will
Bleikern " : $r_{Pb} = 7.1\,fm$ } aus

schnell um 3 Protonen beschleunigt fliegen, dass in seinem Ruhesystem Bleikern scheibchen den gleichen Radius hat?

$\beta = 0.994$ Wie erscheint dem Bleikern ein Protonradius? $r'_p = 0.8\,fm/8.9 = 0.09\,fm$

ii) Zeitintervalle gemessen in verschiedenen Inertialsystemen

Blitze von Leuchttürmen werden in regelmäßigen Intervallen ausgesandt, charakterisiert sie durch Orts- und Zeitkoordinaten: $(x_0, t_1), (x_0, t_2) \ldots (x_0, t_N)$

Beobachter O in Ruhe relativ zum Leuchtturm sieht
$t_2 - t_1 = t_n - t_{n-1} = \tau_0$ Eigenzeit gleich zeitlicher Abstand im System, in dem sie am gleichen Ort abgefeuert werden

Beobachter O', bewegt sich mit v in x-Richtung, er mißt für 1. Blitz $ct_1' = \gamma(ct_1 - \beta x_0)$ ①
2. $ct_2' = \gamma(ct_2 - \beta x_0)$ ②

② − ① $c(t_2' - t_1') = \gamma c(t_2 - t_1)$
$c\tau' = \gamma c \tau_0$ oder

$\boxed{\tau' = \gamma \tau_0 \geq \tau_0}$ Zeitdilatation

kürzest mögliches Zeitintervall wird in dem System gemessen, in dem Ereignisse am selben Ort stattfinden (τ_0). Jeder Beobachter in einem anderen Inertialsystem wird eine längere Zeit beobachten. Uhren die relativ zu einem Beobachter bewegt sind, laufen für diesen Beobachter langsamer.

siehe auch Bsp. ⇨ $\boxed{2\text{-}6}$

Beispiel: Muonzerfall Muon ist ein Teilchen ähnlich einem Elektron, aber etwa 200 mal massiver und instabil. Es zerfällt mit typischer Lebensdauer von $\tau = 2.2 \cdot 10^{-6}$ s $\mu \to e\nu\bar{\nu}$

In System, in dem Muon in Ruhe ist, finden Erzeugung und Zerfall am selben Ort statt, x_0. In diesem System gemessene Lebensdauer ist die Eigenzeit $\tau_0 = 2.2 \cdot 10^{-6}$ s
Typische Situation: Muon wird durch kosmische

Strahlung im Ruhesystem der Erde 20 km über der Erdoberfläche erzeugt und bewegt sich auf Erdoberfläche zu. Wie schnell muß Myon fliegen um auf Erdoberfläche anzukommen, bevor es zerfällt.

Im Ruhesystem der Erde $t = \frac{d}{v} \leq \tilde{\tau} = \gamma \tau_0$

↑ Lebensdauer im Ruhesystem d. Erde

mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}$ ⇝

$$\frac{c^2 - v^2}{v^2} \leq \left(\frac{c\tau_0}{d}\right)^2 , \quad \frac{c^2}{v^2} \leq 1 + \left(\frac{c\tau_0}{d}\right)^2 \qquad \frac{v}{c} = 0.9995$$

$$\gamma = 30.3$$

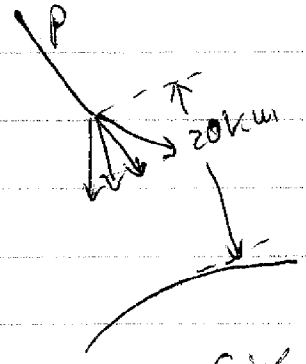
$$\tilde{\tau} = 67\,\mu s$$

Im seinem eigenen Ruhesystem mißt Myon für Abstand zur Erdoberfläche $20\,km / \gamma = 660\,m$

⇒ Fig. 2.7

⊛ in der oberen Atmosphäre erzeugt kosmische Strahlung Schauer $p + N \to \pi^+ + \pi^- + \ldots$

$\pi^- \to \mu^- + \nu \qquad \tau_{0\pi} = 26\,ns$



Bem.: nicht alle Myonen zerfallen nach $\tilde{\tau}$, sondern $N(t) = N(t-0)\exp(-t/\tilde{\tau})$

$= N_0 \exp(-t/\gamma\tau_0)$

oder $N(x) = N_0 \exp(-x/\beta\gamma c\tau_0)$

im Ruhesystem e. Beobachter, rel. zu dem sich Myon mit β bewegt, zerfällt es nach typ. Distanz $\beta\gamma c\tau_0$

Direkte Messung durch Vergleich von Uhren 1971:

J.C. Hafele & R.E. Keating Science 177 (1972) 166

Präzise Atomuhren wurden auf kommerziellen Jets 45 Stunden um die Erde geflogen (mitgezählt)

$v \simeq 1000$ km/h $= 300$ m/s $\beta \simeq 10^{-6}$ $\gamma = (1 + \frac{1}{2} \cdot 10^{-12})$
Vergleich mit Uhren desselben Typs auf d. Erde;
messen $\tau_0 = 45\,h = 1.62 \cdot 10^5$ s mit Genauigkeit
von 10^{-9} s. Für Uhren im Flugzeug vergeht
Zeit langsamer $\Delta\tau = (\gamma - 1)\,\tau_0 = 0.5 \cdot 10^{-12} \cdot 1.6 \cdot 10^5\,s = 8 \cdot 10^{-8}$ s
mitgenommene Uhren gehen um diesen Betrag
nach (modulo Kompliziertheiten: es sind Beschleu-
nigungen im Spiel, also eigentlich generelle Rela-
tivitätstheorie zu Behandlung nötig, korrekterweise)
Beschleunigung des Jets am Anfang und Ende
(rel. zu g) macht Unterschied sonst könnte
Argument auch umgedreht werden)
siehe auch Zwillingsparadoxon
neuere Exp. auf dem Space Shuttle in Höhe
von 328 km mit $v = 7712$ m/s $\beta = 2.5 \cdot 10^{-5}$
$(\gamma - 1) = 3.3 \cdot 10^{-10}$; pro Umlauf 1.8 μs Gangunterschied
gemessen mit 0.1 % Genauigkeit (Sapp, Natur-
wissenschaften 77 (1990) 325)

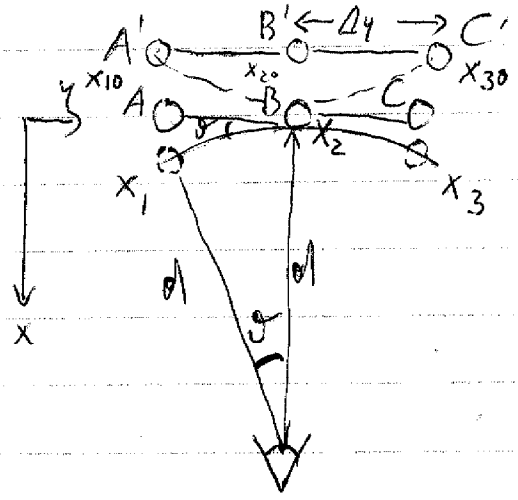
(ii) Wie schnell Objekte, die sich mit klassisch
sehr Geschwindigkeit bewegen, wirklich aus?
zuerst 1959 von J. Terrell korrekt analysiert
siehe auch G.D. Scott & H.J. van Driel, Am. J. Phys.
... (1970) 971

Wenn nur Licht, das sich nicht in Bewegungs-
richtung ausbreitet, das Auge (die Kamera) erreichen
würde → kontraktiertes Objekt (gilt für flache
Objekte)
Aber auch schon Licht aus Winkeln $\neq 90°$

Bild wird kreist durch Licht, das Auge gleichzeitig erreicht. ⇒ Fig. 2-8
Licht von Punkt C kann für bewegtes Gebäude Auge erreichen, um gleichzeitig mit Licht von A und B anzukommen, muß es aber zu einer früheren Zeit emittiert worden sein (Punkt C' im Abbild) → Ordnung für Beobachter.

Bem. Kugeln bleiben Kugeln

Kristall, das sich auf Beobachter zu bewegt ⇒ 2-9



Objekt zu $t=0$ Licht, das Auge zu $t=d/c$ erreicht ist zu Zeit $t=0$ an den Stellen x ab Licht von A kann noch nicht bei x_1 sein, muß bis dahin also an A' emittiert worden sein (Punkt x_{10}, x_{30})

$(x_2 - x_{20})/\beta c = (x_{10} - x_1)/c$

während Objekt von x_{20} nach x_2 fliegt, fliegt Licht von x_{10} nach x_1 $\quad x_{20} = x_{10} = x_{30} \equiv x_0$

für $\beta \ll c$ und $x_1 - x_2 \ll d$

$x_1 - x_2 \approx \Delta y \tan\vartheta \quad \Delta y = d \tan\vartheta$

$\approx x_2 - x_0 \approx \frac{\beta}{1+\beta} d \tan^2\vartheta$

2.6 Dopplereffekt für elektromagnetische Wellen (Licht)

Erinnerung: klassische Schallwellen

Frequenz $\nu = \nu_0 \dfrac{1 \pm v_d/v}{1 \mp v_s/v}$

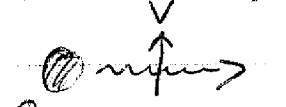
v Schallgeschw.
v_d Gesch. d. Detektors
v_s " Quelle

oberes Vorzeichen: Detektor und Quelle bewegen sich aufeinander zu

beobachtete Frequenz hängt davon ab, ob sich Schallquelle, oder Beobachter, oder beide bewegen. Vernünftig, da Schallwellen sich im stationären Medium (z.B. Luft) ausbreiten

Lichtwellen: nach Einstein darf nur relative Geschwindigkeit eine Rolle spielen

Fall 1: Beobachter und/o. Quelle bewegen sich senkrecht zu Lichtwellen

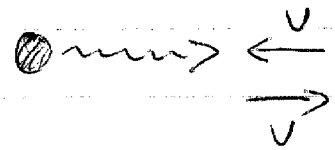


Lichtfrequenz im Ruhesystem der Quelle Q ν_0, Periode $t_0 = 1/\nu_0$

Zeitdilatation: für relativ zu Quelle bewegten Beobachter $t = \gamma t_0 \rightsquigarrow \nu = \nu_0/\gamma$

Frequenz immer kleiner als Eigenfrequenz
Wellenlänge immer größer als Eigenwellenlänge

Fall 2: Beobachter und Quelle bewegen sich parallel (aufeinander o. aufeinander zu)



Zwischen benachbarten Maxima der Welle befindet sich Beobachter Distanz vt weg von der Quelle, Wellenmax. benötigt vt/c Länge, ihn zu erreichen

Charakteristische Periode

$$T = t + \frac{vt}{c} = \gamma t_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \longleftrightarrow \nu = \nu_0 / \gamma (1 + v/c)$$

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

Beispiel: Expansion des Universums

Sterne emittieren Licht mit charakteristischen Frequenzen (Spektrallinien, gegeben durch atomare Resonanzen). Für entfernte Objekte wird beobachtet, daß alle Linien zu niedrigeren Frequenzen verschoben sind "Rotverschiebung". Diese Sterne, Galaxien, entfernen sich von uns. Aus Rotverschiebung kann man Geschwindigkeit bestimmen (siehe oben) und findet:

Geschwindigkeit ∝ Abstand $\quad v = H_0 \cdot d$

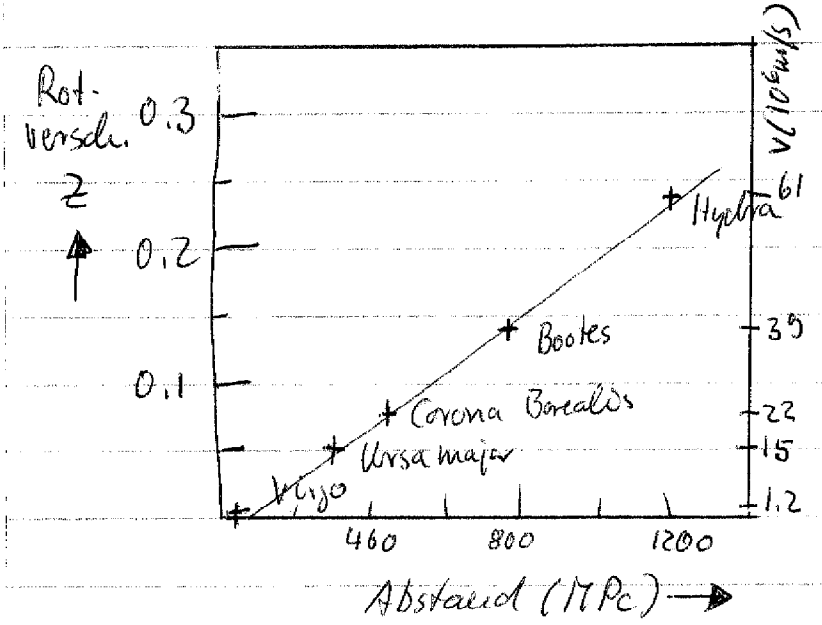
Hubble-Gesetz E. Hubble 1929 — H_0: Hubble-Konst.

Rotverschiebungsparameter $z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$

von oben finden wir

$$1 + z = \frac{\lambda'}{\lambda} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

wenn $\beta \ll 1 \quad 1 + z \simeq 1 + \beta$



Astronomen benutzen als Längenmaß den 'Parsek'

1 pc = Abstand mit dem Grad und Sonne eine Bogensekunde aufspannen

$= 3.09 \cdot 10^{16}$ m

$1\,\mathrm{MPc} = 3.09 \cdot 10^{22}$ m

$= 3.26 \cdot 10^6$ Lichtjahre

$$H_0 \simeq \frac{71\ \mathrm{km}}{\mathrm{s} \cdot \mathrm{MPc}} = 2.3 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{s}$$

$1/H_0 = 4.3 \cdot 10^{17}\,\mathrm{s} = 13.8 \cdot 10^9$ J

also: Galaxie mit Rotverschiebung $z=1$
hat $\beta = \frac{3}{5}$ und ist nach Hubble Gesch
$d = 2600\ Mpc \hat{=} 8{,}5 \cdot 10^9$ Lichtjahre

neueste Daten $\Rightarrow$ Figs 2-10a,b

2.7. Lorentz-Geschwindigkeitstransformation

		Differentiale
$x' = \gamma(x - \beta ct)$	$\longrightarrow$	$dx' = \gamma(dx - \beta c\,dt)$
$y' = y$		$dy' = dy$
$z' = z$		$dz' = dz$
$ct' = \gamma(ct - \beta x)$		$dt' = \gamma(dt - \frac{\beta}{c}dx)$

Geschwindigkeiten im Bezugssystem S', das sich mit v relativ zu S in positive x-Richtung bewegt: u_x', u_y', u_z' im System S: u_x, u_y, u_z

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - \beta c\,dt)}{\gamma(dt - \frac{\beta}{c}dx)} = \frac{u_x - \beta c}{1 - \frac{\beta}{c}u_x}$$

$$u_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - \frac{\beta}{c}dx)} = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{\beta}{c}u_x)}$$

$$u_z' = \frac{u_z}{\gamma(1 - \frac{\beta}{c}u_x)}$$

es ist okay, Verhältnis der Differentiale zu nehmen, da Geschwindigkeiten in jedem Bezugssystem konstant. Generell $\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'}$

für kleine Geschwindigkeit v: $v \to 0$, $\beta \to 0$, $\gamma \to 1$

Nenner geht schneller gegen 1 als Bc gegen 0

dann $u_x' = u_x - v$, $u_y' = u_y$, $u_z' = u_z$ } Galilei Transformation ✓

für inverse Transformation: ersetze wieder β durch $-\beta$ (Richtungsänderung), also

$$u_x = \frac{u_x' + \beta c}{1 + \frac{\beta}{c} u_x'}$$

Beispiel:

u_x/c	β	u_x'/c klassisch	u_x'/c relativistisch	
0.10	-0.01	0.11	0.11	nur wenn
0.90	"	0.91	0.90	u_x und
0.10	-0.20	0.30	0.29	β nicht
0.90	"	1.10	0.93	klein gegen
0.10	-0.60	0.70	0.66	ist rel.
0.90		1.50	0.97	Transform anders als klassische

Grenzfälle:

a) $u_x = c$ $\quad u_x' = \frac{c - \beta c}{1 - \beta} = c$

b) $\beta = 1$

$$u_x' = \frac{u_x - c}{1 - \frac{u_x}{c}} = -c \, \frac{-\frac{u_x}{c} + 1}{1 - \frac{u_x}{c}} = -c$$

$\beta = -1$ $\quad u_x' = \frac{u_x + c}{1 + \frac{u_x}{c}} = c$

⇒
- Lichtgeschwindigkeit konstant gleich c in allen Bezugssystemen (Gilt 2. Postulat)
- c ist limitierende Geschwindigkeit es kann keine grössere Geschwindigkeit geben

Beispiel: Im Ruhesystem eines Elektrons nähert sich ein anderes Elektron mit Geschwindigkeit u. Was ist relative Geschwindigkeit eines Beobachters, der gleiche, aber entgegengesetzte Geschwindigkeit für die zwei Elektronen mißt?

Bezugssystem S: $\overset{u}{\longrightarrow}$ 2 ● ● 1 $\quad u_1 = 0 \quad u_2 = u$

" S': $\xrightarrow{\beta c}$ Beobachter O'

2 ● $\longrightarrow$ $\longleftarrow$ ● 1 $\quad u_1' = -u'$

$u' \quad -u' \quad u_2' = u'$

Elektron 1 $\quad u_1' = \dfrac{0 - \beta c}{1 - 0} = -\beta c$ also $u' = \beta c$ ✓

Elektron 2 $\quad u_2' = \dfrac{u - \beta c}{1 - \frac{\beta}{c} u} = u'$

$$= \frac{u - u'}{1 - \frac{u u'}{c^2}} \approx \frac{u'}{1 + \frac{u'^2}{c^2}} = \frac{u}{2}$$

nach Lösen der quadratischen Gleichung

$$u' = \frac{1 \mp \sqrt{1 - u^2/c^2}}{u/c^2} \qquad \text{(nur "−" sinnvolle Lösung)}$$

2.8. Der invariante Orts- Zeit Viervektor

Definiere Größe $s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$

$s^2 = \gamma^2 (ct' + \beta x')^2 - \gamma^2 (x' + \beta c t')^2 + y'^2 + z'^2 \qquad$ mit $\beta^2 \gamma^2 = \gamma^2 - 1$

$= c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = s'^2$

Größe s^2 ist gleich in allen Bezugssystemen "Lorentzinvariant" (Siehe oben für Lichtwelle)

sehr praktisch; Längen- und Zeitintervalle nicht invariant, aber es gibt eine Linearkombination s, die invariant ist, d.h. in allen Bezugssystemen die gleiche Länge hat.

s ist Intervall zwischen zwei Ereignissen, die sich mit räumlicher Entfernung r und Zeitabstand t ereignen

z.B. zwei Ereignisse finden im System S am gleichen Ortspunkt $r = (x, y, z)$ statt (also im ihrem eigenen Ruhesystem → dann ist ihr zeitlicher Abstand die Eigenzeit τ_0

$$s^2 = c^2t^2 - r^2 = c^2\tau_0^2 - 0 \quad \rightsquigarrow \quad t^2 = \tau_0^2 + \frac{r^2}{c^2}$$

d.h. τ_0 ist in der Tat das kürzeste (Zeit) Intervall, das irgendein Beobachter messen kann

$$s^2 = c^2\tau_0^2 = c^2t^2 - r^2 \quad \rightsquigarrow \quad 3 \text{ Fälle}$$

a) $s^2 > 0$, $\tau_0^2 > 0$ ↝ τ_0 ist reell, Intervall ist "zeitartig": es läßt sich immer ein Bezugssystem finden (mit Geschwindigkeit $v < c$) in dem zwei Ereignisse am gleichen Ort ($r = 0$), aber zu verschiedenen Zeiten passieren. Hier gilt Kausalität (siehe unten)

b) $s^2 < 0$, $\tau_0^2 < 0$ ↝ τ_0 ist imaginär, Intervall ist "ortsartig": es läßt sich immer ein Bezugssystem finden (mit Geschwindigkeit $v < c$) in dem die zwei Ereignisse zur gleichen Zeit ($t = 0$), aber an verschiedenen Orten passieren ↔ es gibt kein System, in dem sie am gleichen Ort passieren!

c) $s^2 = 0$ $\tau_0^2 = 0$ ↝ in allen Bezugssystemen passieren

die zwei Ereignisse am selben Ort und zur selben Zeit

* hier Minkowski-Diagramm von 2-23/24 einschieben

Kausalität: eine Ursache ereignet sich in Punkt 1 (x_1, t_1) und erzeugt einen Effekt in Punkt 2 (x_2, t_2). Wie sieht der zeitliche Abstand in einem rel. dazu bewegten System S' aus? Insbesondere: kann man durch Wechsel des Bezugsystems Ursache und Effekt (Wirkung) umdrehen? $t_2' - t_1'$?

Signal zwischen Ursache und Effekt kann sich höchstens mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. $\rightsquigarrow$ $x_2 - x_1 \leq c(t_2 - t_1)$

$$\left.\begin{aligned} t_1' &= \gamma\left(t_1 - \tfrac{\beta}{c} x_1\right) \\ t_2' &= \gamma\left(t_2 - \tfrac{\beta}{c} x_2\right) \end{aligned}\right\} \quad t_2' - t_1' = \gamma\left((t_2 - t_1) - \tfrac{\beta}{c}(x_2 - x_1)\right)$$

$$\geq \gamma\left((t_2 - t_1) - \beta(t_2 - t_1)\right)$$

für $\beta \leq 1$ ist $t_2' - t_1'$ immer positiv, bzw $t_2' \geq t_1'$! also keine Vertauschung von Ursache und Wirkung durch Wahl des Bezugsystems

Definiere Raum-Zeit-Vierervektor

$$r = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

kennzeichnet ein Ereignis durch einen "Weltpunkt" in Orts- und Zeitraum. Terminologie und Konzept entspricht von Minkowski

Konzept: definiere eine Grösse, deren Länge lorentz-invariant ist. Metrik: $r^2 = c^2t^2 - \vec{r}^2$

"Länge des 4-er Vektors"

Bemerkung: in der Literatur gibt es auch die

Notation $r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$ "Minkowski-Metrik"

$r^2 = \vec{r}^2 - c^2t^2$

je nach Metrik ändert sich Vorzeichen von 4er Vektoren also aufpassen.

eine Lorentztransformation kann auch als Matrix-Multiplikation angesehen werden

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$r' = (\quad " \quad) r$

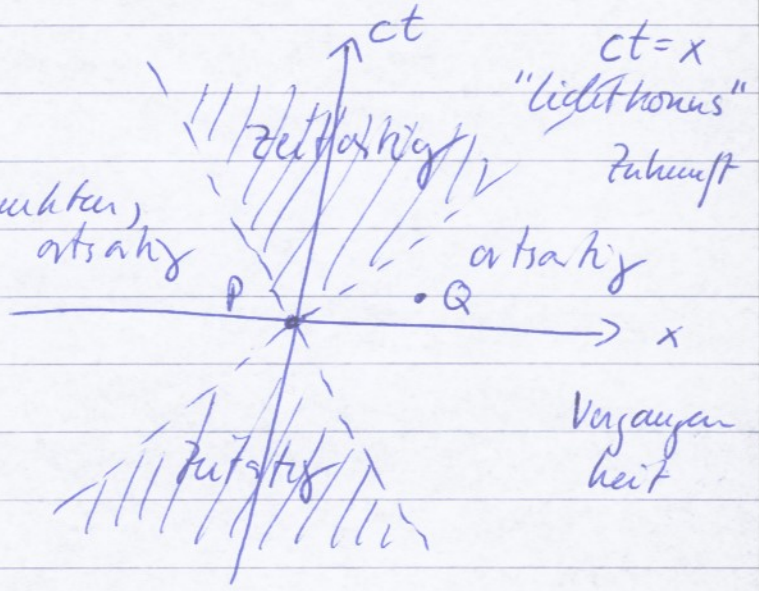
Notation: 4er Vekt ohne Vektzeichen $r = (ct, \vec{r})$ wir werden sehen, daß es andere 4er Vektoren gibt, z.B. $(E, \vec{p}c)$, die da gleichen Transformation gehorchen

(*) Minkowski Diagramm:

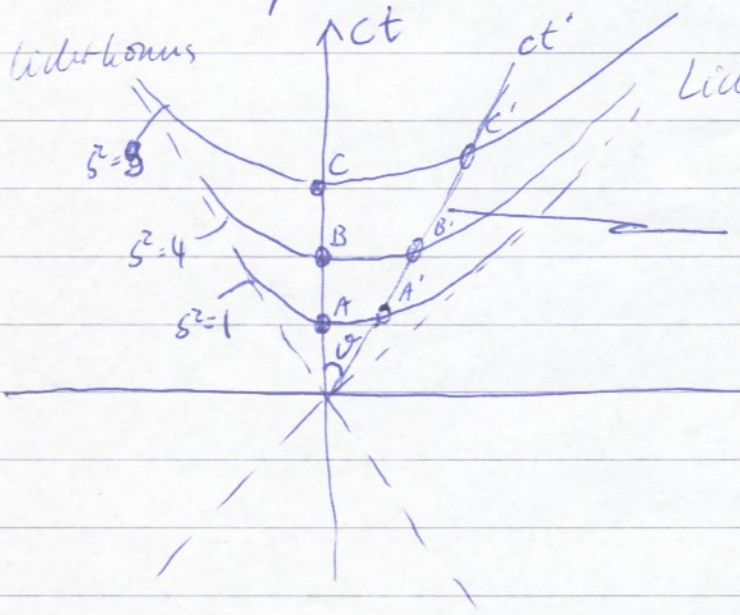
Weltpunkt, Trajektorie von Weltpunkten, die "Weltlinie" von Signalen, die P verlassen, heisst da "Lichtkegel" (light cone)

"artsahig" Intervalle: P zu allen Punkten innerhalb des Lichtkegels (z.B. Q)

"zeitartig": oberhalb



alle Lorentztransformationen liegen auf Hyperbeln ($c^2t^2 - x^2 = \text{konstant}$) im Ort-Zeit Diagramm, die sich entweder im orts-artigen oder im zeit-artigen Sektor befinden. Keine Lorentz-Transformation führt von einem in den anderen Sektor



⇒ Abb 2-11

zeit-artige "Weltlinie eines Beobachters O' im System S' bewegt sich gegenüber dem Relativgeschwindigkeit von S' und S

Punkte A, B, C charakterisieren Ereignisse am selben Ort in S in zeitlichem Abstand $\tau_0^2 = s^2/c^2$, also zu Zeiten $t = \tau_0, 2\tau_0, 3\tau_0 \ldots$

Anmerkung: im euklidischen Raum ist Abstand definiert durch pythagoräische Beziehung, also z.B. $r^2 = x^2 + y^2$. Im Raum-Zeit ist Zeitintervall gleich $s^2 = c^2t^2 - x^2$. Raum-Zeit ist nicht euklidisch sondern hyperbolisch. Nennt man 'pseudo-euklidisch'

In Analogie zu Raum-Zeit Vierervektor definieren wir allgemeinen Vierer-Vektor A mit Komponenten (A_0, A_1, A_2, A_3) welche physikalische Grössen repräsentieren, die sich unter Lorentztransformation wie Komponenten des Raum-Zeit Vierervektors verhalten.
oft verwendete Notation, um klarzumachen, daß es sich um Vierervektor handelt

$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ mit $\mu = 0,1,2,3$

Notation wird essentiell wenn wir Betrachtung auf Tensoren ausdehnen

Skalarprodukte von Vierervektoren: wichtig, da invariant unter Lorentztransformation des Inertialsystems und auch unter Rotation des Bezugssystems.

$$A_\mu B_\mu = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3$$

z.B. zwei Raum-Zeit Vierervektoren

$$r_1 \cdot r_2 = c^2 t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2 = c^2 t_1 t_2 - \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$$

(Länge des Raum-Zeit Vierervektors ist Spezialfall)

2.9. Vierer-Geschwindigkeit eines Teilchens

betrachte Teilchen das sich in System S mit Geschwindigkeit $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ bewegt. Was ist seine Vierergeschwindigkeit?
Naiver Versuch: $dr/dt = (c, u_x, u_y, u_z)$
aber $c^2 - \vec{u}^2$ ist nicht konstant in verschiedenen Bezugssystemen
korrekt: Ableitung des Raum-Zeit Vierervektors r nach der invarianten Eigenzeit des Teilchens

also $\frac{dr}{d\tilde{\tau}_0} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tilde{\tau}_0} = \gamma \cdot \frac{dr}{dt}$ und damit

4er Vierergeschwindigkeit $u = (\gamma c, \gamma u_x, \gamma u_y, \gamma u_z)$

$u^2 = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 \vec{u}^2 = c^2$ = invariant

komplizierte relativistische Geschwindigkeitstransformation kann leicht aus Lorentztransformation der Vierergeschwindigkeit bei Übergang von System S zu mit Geschwindigkeit v relativ dazu bewegtem System S' abgeleitet werden.

ohne weitere Diskussion:

Vierer-Beschleunigung $a = du/d\tilde{\tau} = \frac{dt}{d\tilde{\tau}} \frac{du}{dt}$

$a = (\gamma^4 \vec{\beta} \cdot \vec{a},\ \gamma^2 \vec{a} + \gamma^4 \vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{a}))$ mit $\vec{a} = \left(\frac{du_x}{dt}, \frac{du_y}{dt}, \frac{du_z}{dt}\right)$

im Ruhesystem mit $\gamma = 1$, $\beta = 0$ $a = (0, \vec{a})$

2.10. Relativistische Dynamik

Einsteins 1. Postulat impliziert, daß Erhaltungssätze in allen Bezugssystemen gelten
→ impliziert neue Definition von p, T, E
(Impuls, kin. Energie, totale Energie)

2.10.1. Impulserhaltung

Beispiel: Beobachter O in System S (Labor) sieht Kollision zweier identischer Teilchen mit Massen $m_1 = m_2 = m$ mit gleicher, aber entgegengesetzter Geschwindigkeit

vor Kollision — nach Kollision — Impulserh.

O: $\overset{v}{\bullet\!\!\longrightarrow}$ $\overset{-v}{\longleftarrow\!\!\bullet}$ (1, 2) — $\bullet\bullet$ $V=0$ — $p_i = mv - mv = 0$, $p_f = 2mV = 0$ ✓

O': bewegt sich mit v in x-Richtung, also vor Kolle. mit Masse 1

$\overset{v_2'}{\longleftarrow\!\!\bullet}$ (1, 2) $\overset{-v}{\longleftarrow}$ $\bullet\bullet$

$v_1' = 0$

Lorentztransformation:

$$v_1' = 0$$

$$v_2' = \frac{-v-v}{1+v^2/c^2} = \frac{-2v}{1+v^2/c^2}$$

$$V' = \frac{V-v}{1-Vv/c^2} = -v$$

Impulse

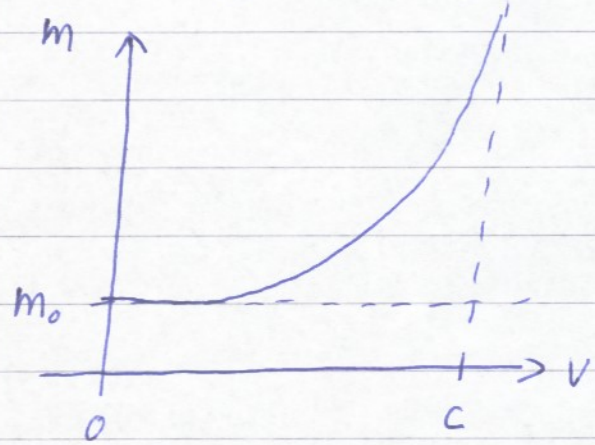
$$p_i' = 0 - \frac{2mv}{1+v^2/c^2}$$

$$p_f' = -2mv$$

nicht gleich!!

Problem liegt in der Masse; muß auch transformiert werden, wenn in ein anderes Inertialsystem transformiert wird, d.h. Masse nicht Lorentz-invariant

Bemerkung von $\boxed{m = \gamma m_0 = \sqrt{\frac{1}{1-v^2/c^2}}\, m_0}$ erhält Impuls.
hier ist m_0 die "Ruhemasse" ≡ Masse gemessen im Bezugssystem, in dem Teilchen in Ruhe ist (analog zu Eigenzeit τ_0 und $\tau = \gamma\tau_0$)



Objekte werden mit wachsender Geschwindigkeit massiver Nötig, um zu garantieren, daß $v = c$ limitierende Geschwindigkeit ist, Sonst könnte unendlich große Kraft eine endliche Masse m auf unendliche Geschwindigkeit beschleunigen. So wird Objekt massiver je mehr sich v an c annähert und Kraft wird daher wenig effektiv im Produzieren von Beschleunigung $a = F/m$ mit $v \to c$ geht $m \to \infty$, d.h. $a \to 0$

Massenzuwachs um 1% bei welcher Geschwindigkeit?
$m = 1.01\, m_0$ $\gamma = 1.01 \Rightarrow \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0.14$ $v = 4 \cdot 10^4$ km/s
Faustregel: bei $v < 0.1\,c$ kann Massenänderung ignoriert werden. $m \simeq m_0$ genau auf besser 0.5 %.

relativistischer Impuls $\boxed{p = mv = \gamma m_0 v}$

Test Impuls - Geschwindigkeitsbeziehung durch Kaufmann 1901 mit β-Strahlen und Krümmung im Magnetfeld á la Thompson

$\Rightarrow$ Fig 2-12

2.10.2. Energieerhaltung

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \iff m^2c^2 - m^2v^2 = m_0^2c^2$$

Differential $d(m^2c^2 - m^2v^2) = \frac{\partial(m^2c^2-m^2v^2)}{\partial m} dm + \frac{\partial(m^2c^2-m^2v^2)}{\partial v} dv$

$$= (2mc^2 - 2mv^2)dm + (0 - 2m^2v)dv = d(m_0^2c^2) = 0$$

da m_0, c konst.

$$c^2 dm = v^2 dm + mv\,dv$$

Klassisch ist kinetische Energie T definiert als Arbeit, die von einer äußeren Kraft F geleistet wird um die Geschwindigkeit v eines Objekts zu ändern.

$$\Delta T = W = \int F dx = T_f - T_i$$

wenn Objekt anfangs in Ruhe, $T_i = 0$ $T_f = T$

Newtons 2. Gesetz soll nach wie vor gültig sein:

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = m\frac{dv}{dt} + \left(v\frac{dm}{dt}\right) \longrightarrow \text{neuer relativistischer Term}$$

$$T = \int \left(m\frac{dv}{dt}dx + v\frac{dm}{dt}dx\right) = \int \left(m dv \frac{dx}{dt} + v dm \frac{dx}{dt}\right)$$

$$= \int (mv\,dv + v^2 dm) = \int c^2 dm \quad \leftarrow \text{(von oben)}$$

damit neue Beziehung für kin. Energie

$$\boxed{T = c^2 \int_{m(v=0)}^{m(v)} dm = c^2(m - m_0) = mc^2 - m_0c^2 = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = (\gamma - 1) m_0 c^2}$$

relativistische kinetische Energie

$(\gamma - 1)$: dimensionslose Zahl m_0c^2: dimensionsmäßig Energie

physikalische Bedeutung: die Energie, wenn Teilchen mit 'Ruhemasse m_0' sich nicht bewegt also $\beta = 0$, $\gamma = 1$; dann hat es keine kinetische Energie. Nenne m_0c^2 die 'Ruheenergie' oder 'Ruhemassenenergie'

relativistische kinetische Energie: Differenz von zwei Energien, der Energie mc^2 ← Energie des bewegten Objekts und Energie m_0c^2 ↖ Energie des Objekts in Ruhe

dies entspricht genau der Definition der klassischen kinetischen Energie!

weiter

$$mc^2 = T + m_0c^2 = E \quad \text{totale relativistische Energie}$$
$$= \gamma m_0c^2 \quad = \text{relativistische kin. "} + \text{Ruheenergie}$$

Energie und Masse ($\cdot c^2$) sind äquivalent

Beispiele zur Illustration:

a) Elektron wird von Ruhe in einer Potentialdifferenz von 5 MV beschleunigt. Endgeschwindigkeit?

$V = 5\,MV \quad q = e \rightarrow T_e = 5\,MeV$

$T_e = (\gamma - 1) m_{0e}c^2 \quad m_{0e}c^2 = 0.511\,MeV$ Elektron-Ruheenergie

$\gamma - 1 = 10 \quad \gamma = 11 \quad \beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2} = 0.996$

b) Proton wird durch dieselbe Potentialdiff. beschleunigt $\quad m_{0p}c^2 = 938.4\,MeV \quad T_p = 5\,MeV$

$\gamma - 1 = \frac{5}{938.4} \quad \gamma = 1.005 \quad \beta = 0.103$ viel träger als Elektr.

c) Was ist Fehler, wenn man klassische Formel benutzt hätte?

Elektron $T = \frac{1}{2} m_{0e} v^2 = \frac{1}{2} m_{0e} c^2 \left(\frac{v}{c}\right)^2$

$v/c = \sqrt{\frac{2T}{m_0 c^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5\ \mathrm{MeV}}{0.5\ \mathrm{MeV}}} = \sqrt{20} = 4.4$! Fakt 4.5 zu groß

Proton $\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5\ \mathrm{MeV}}{938.4\ \mathrm{MeV}}} = 0.103$ bis auf 3 Stellen ok

Kriterium: wenn kinetische Energie klein im Vergleich zur Ruhemassenenergie, können klassische Beziehungen ohne Probleme benutzt werden.
Aber: selbst dann brauchen wir nicht Masse in kg sondern können mit $m_0 c^2$ in MeV leben.
genaue Überprüfung ⇒ 2-13

Beweis der Äquivalenz von Masse und Energie:
"Paarbildung" $\gamma \to e^+ e^-$ wenn Energieerhaltung es erlaubt.
+ (braucht Partner um Impulserhaltung zu garantieren $\gamma + M \to e^+ e^- + M$)
⇒ Fig. 2-14

1932 wurde in kosmischer Strahlung Positron entdeckt (C. Anderson) in 1300 Spuren kosmischer Strahlung wurden in einer Nebelkammer 15 positiv geladene Teilchen über gekrümmte Spuren (B-Feld) entdeckt. 6mm Eisenplatte in weg in Richtung zu identifizieren.
Aufnahme: Positron mit 63 MeV = p·c vor Platte, 23 MeV danach. Spuren sehen aus wie Elektronspuren, aber positive Ladung ⟷ e^+
Könnten es Protonen sein? kinetische Energie eines Protons mit $pc = 63$ MeV $\ll m_0 c^2$, nicht relativistisch ok $T = \frac{p^2 c^2}{2 m_0 c^2} = \frac{63^2\ \mathrm{MeV}^2}{2 \cdot 938\ \mathrm{MeV}} \approx 2$ MeV

würde auf jeden Fall in 6mm Eisen gestoppt.
Teilchen muß sehr leicht sein, um Durchdringkraft zu haben

Verknüpfung relativistischer Impuls und totale relativistische Energie

Wir hatten gesehen: $p = mv = \gamma m_0 v$

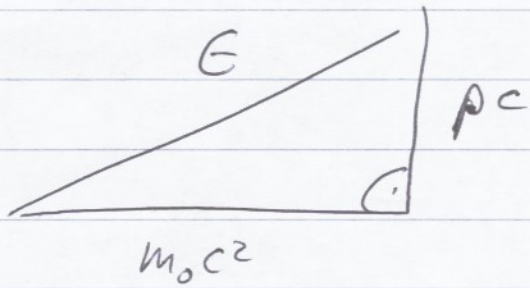
$$pc = \gamma m_0 c^2 \frac{v}{c} = \gamma \beta m_0 c^2$$
$$= \beta E$$

d.h. pc ist immer kleiner als E, aber für $\beta \to 1$ ist alle Energie eines Teilchens als Impuls vorhanden $pc \simeq E$; dagegen kann Ruhemassenenergie vernachlässigt werden.

$$E^2/\gamma^2 = E^2 \underbrace{(1-\beta^2)}_{\hookrightarrow (pc/E)^2} = (m_0 c^2)^2$$

$$\rightarrow \quad E^2 = (m_0 c^2)^2 + (pc)^2 \quad \text{oder} \quad E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (pc)^2}$$

Satz d. Pythagoras für rechtwinkliges Dreieck mit Seiten pc und $m_0 c^2$ und Hypothenuse E



Manchmal nützlich:

$$E^2 = (T + m_0 c^2)^2 = T^2 + 2 T m_0 c^2 + (m_0 c^2)^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$$

Bemerkung: für alle Teilchen mit Ruhemassenenergie gleich Null gilt

$$T = pc = E \qquad \text{z.B. Photonen}$$

Beispiele: 1) Ein Teilchen mit Ruhemassenenergie $m_0 c^2 = 140$ MeV bewegt sich mit Geschwindigkeit $\beta = \frac{v}{c} = 0.80$. Finde relativistischen Impuls und totale Energie

$\beta = 0.80 \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}} = 1.67$

$E = \gamma m_0 c^2 = 233\ \mathrm{MeV}$

$T = E - m_0 c^2 = 93\ \mathrm{MeV}$

$pc = \beta E = 186\ \mathrm{MeV}$ oder $p = 186\ \frac{\mathrm{MeV}}{c}$ ← neue Dimension f. p!

genauso $pc = \sqrt{E^2 - (m_0 c^2)^2} = \sqrt{233^2 - 140^2} = 186\ \mathrm{MeV}$

2) Finde Geschwindigkeit eines Teilchens mit Ruhemasse $m_0 c^2$ dessen kinetische Energie gleich der Ruhemassenenergie ist.

$E = m_0 c^2 + m_0 c^2 = 2 m_0 c^2 \qquad \gamma = 2 \qquad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0.87$

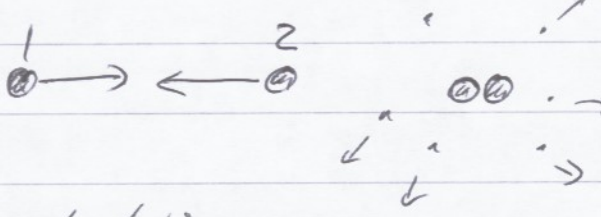
$v = 2.6 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}$

Impuls? $pc = \beta E = \beta \cdot 2 m_0 c^2 = 1.73\ m_0 c^2$

Kann Äquivalenz von Masse und Energie direkt demonstriert werden?

Direkte Konsequenz ist Teilchenproduktion in Kollisionen schneller Teilchen.

z.B. Kollider

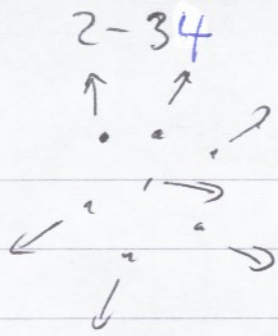


Energie, die zur Produktion neuer Teilchen zur Verfügung steht $E_{av} = 2E_1 - 2m_0^p c^2$

(zwei Teilchen mit identischer Masse m_0^p und Energien $E_1 = E_2 = E$ kollidieren; totale Energie $2E$

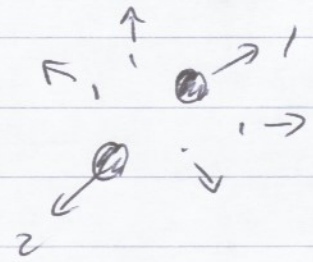
2-34

Alternative 1



Teilchen annichilieren
$E_{av} = 2E_1$

Alternative 2



$E_{av} = 2E_1 - E_1^a - E_2^a$
$= 2(E_1 - m_0^p c^2) - T_1^a - T_2^a$

z.B. ein Elektron und ein Positron (e^+) gleicher Energie kollidieren. Welche kin. Energie ist nötig für die Reaktion

$$e^+ + e^- \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

$m_0^\pi c^2 = 140$ MeV Energieerhaltung fordert, daß totale Energie nach Kollision ist größer als mindest $2 m_0^\pi c^2 = 280$ MeV (Pionen in Ruhe)

d.h. vor Kollision $2(m_0^e c^2 + T_e) = 280$ MeV oder

$T_e = 140 - 0.5 = 139.5$ MeV

2. Protonen p und Antiprotonen $\bar{p}$, je mit totaler Energie von 50 GeV kollidieren und annihilieren. Wieviele Pionen können maximal produziert werden? Nehmen Sie an, daß die produzierten Pionen im Mittel einen Impuls von 300 MeV/c haben. $p + \bar{p} \rightarrow n\pi$

$E = 2 \cdot 50$ GeV $= 100$ GeV $= n E^\pi = n \sqrt{(m_0^\pi c^2)^2 + (pc)^2}$

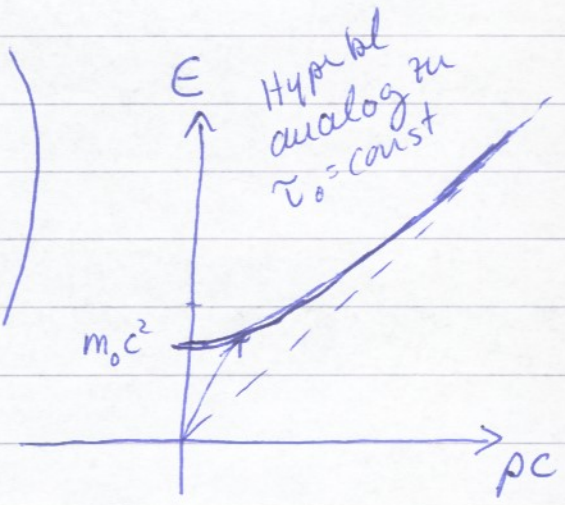
$$n = \frac{100 \text{ GeV}}{\sqrt{0.14^2 + 0.3^2}\ \text{GeV}} = 302$$

2-10.3 Energie - Impuls vierervektor p

Invariante: $E^2 - p^2c^2 = (m_0c^2)^2$ ist Lorentzinvariante Konst.

$p = (E, \vec{p})$ transformiert analog zu $(ct, \vec{r})$

$$\begin{pmatrix} E' \\ p_x'c \\ p_y'c \\ p_z'c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_xc \\ p_yc \\ p_zc \end{pmatrix}$$



also $E' = \gamma E - \gamma\beta p_x c$

$p_x'c = \gamma p_x c - \gamma\beta E$

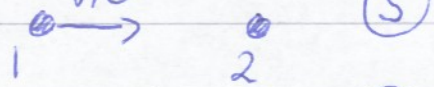
Speziell im Ruhesystem eines Teilchens sind

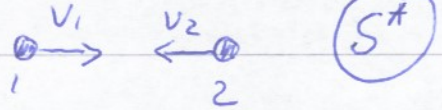
$pc = 0 \quad T = 0 \quad E = m_0c^2$ und $p = (m_0c^2, 0, 0, 0)$

2.11. Relativistisches Schwerpunktsystem

Zur Betrachtung von Teilchenkollisionen

es gibt zwei ausgezeichnete Koord. systeme: Labor- und Schwerpunktsystem oder cm-System

z.B. Labor 

cm 

Schwerpunktsystem S^* bewegt sich relativ zu Labsystem S mit Geschwindigkeit β^*

Behalte klassische Definition: im Schwerpunktsystem ist Vektorsumme der Impulse Null

einfacher Fall: zwei Teilchen identischer Masse, eines in Ruhe im Labor

$m_a = m_b = m_0$ $\quad T_a$ im Labor, $\quad T_b = 0$

Labor: $p = p_a + p_b = p_a$ totaler Impuls im Labor

$E = E_a + E_b = T_a + 2m_0c^2$ totale Energie im Labor

Lorentztransf. in cm-System mit β^*

$p^* = \gamma^*\left(p - \frac{\beta^* E}{c}\right) = 0$ totaler Impuls im cm

$$\beta^* = \frac{pc}{E} = \frac{p_a c}{T_a + 2m_0c^2} = \frac{\beta E_a}{E_a + m_0c^2}$$

$$\beta^* E_a = \beta E_a - \beta^* m_0 c^2$$

$$p_a^* = \gamma^*(p_a - \beta^* E_a/c) = \gamma^*(\beta E_a/c - \beta^* E_a/c) = \gamma^*\beta^* m_0 c$$

$$p_b^* = \gamma^*(-\beta^* m_0 c^2/c) = -\gamma^*\beta^* m_0 c$$ ✓ okay

was ist totale Energie im cm-System E^*?

$$E^* = E_a^* + E_b^* = \frac{p_a^* c}{\beta^*} + \frac{p_b^* c}{-\beta^*} = \gamma^* m_0 c^2 + \gamma^* m_0 c^2 = 2\gamma^* m_0 c^2$$

Relation für totale Energie im Labor-System E?

$$E = \sqrt{(p_a c)^2 + (m_0 c^2)^2} + m_0 c^2$$

$$(E - m_0c^2)^2 = (p_a c)^2 + (m_0 c^2)^2 \quad \text{benutze } \beta^* = \frac{pc}{E}$$

$$= (\beta^* E)^2 + (m_0 c^2)^2$$

$$E^2 - 2m_0c^2 E + \cancel{(m_0c^2)^2} = (\beta^* E)^2 + \cancel{(m_0c^2)^2}$$

$$E(1 - \beta^{*2}) = 2m_0c^2 \quad \text{oder} \quad E = 2\gamma^{*2} m_0 c^2 = \gamma^* E^*$$

$$\boxed{\beta^* = \frac{pc}{E} \quad \text{und} \quad \gamma^* = E/E^*}$$

Rekonstruktion der invarianten Masse

Teilchen $X \rightarrow A + B$

$p_X = (E_X, \vec{p}_X c)$ $\quad p_X^2 = E_X^2 - |\vec{p}_X c|^2 = (m_{X0} c^2)^2$

m_{X0}: invariante Masse

Beispiel: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

messe Identität (Photon) und Viererimpulse der Zerfallsphotonen

Viererimpuls $p_{\gamma 1} = (E_{\gamma 1}, \vec{p}_{\gamma 1} c)$

$p_{\gamma 2} = (E_{\gamma 2}, \vec{p}_{\gamma 2} c)$

$$p_{\gamma 1} p_{\gamma 2} = E_{\gamma 1} E_{\gamma 2} - \vec{p}_{\gamma 1} c \cdot \vec{p}_{\gamma 2} c = E_{\gamma 1} E_{\gamma 2} (1 - \cos\vartheta)$$

Viererimpuls^2 Pion = (Summe Viererimpulse Photonen)^2

$$(m_{\pi 0} c^2)^2 = (p_{\gamma 1} + p_{\gamma 2})^2 = \underbrace{p_{\gamma 1}^2}_{0} + \underbrace{p_{\gamma 2}^2}_{0} + 2 p_{\gamma 1} p_{\gamma 2} = 2 E_{\gamma 1} E_{\gamma 2} (1 - \cos\vartheta)$$

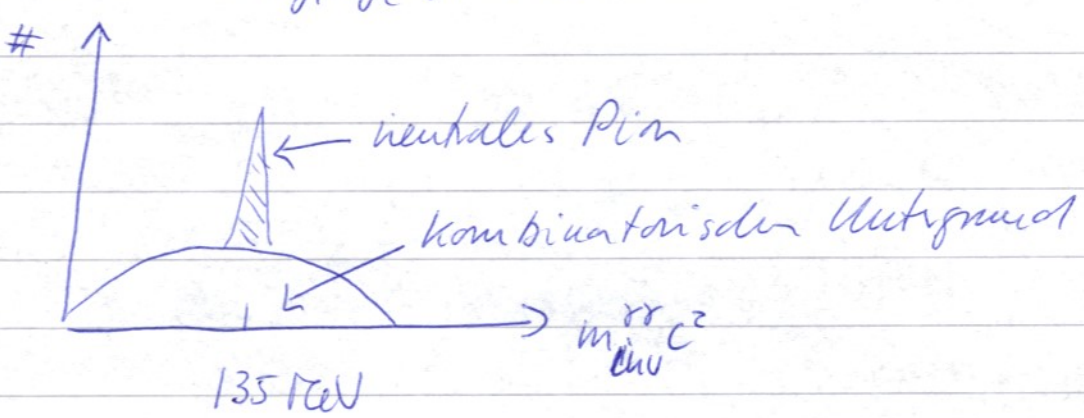
für Photonen

oder: $p_{\pi 0}^2 = (m_{\pi 0} c^2)^2 = (p_{\gamma 1} + p_{\gamma 2})^2 \equiv (m_{inv}^{\gamma\gamma} c^2)^2$

$= (E_{\gamma 1} + E_{\gamma 2})^2 - (\vec{p}_{\gamma 1} c + \vec{p}_{\gamma 2} c)^2$

$= \cancel{E_{\gamma 1}^2} + 2 E_{\gamma 1} E_{\gamma 2} + \cancel{E_{\gamma 2}^2} - \cancel{|\vec{p}_{\gamma 1} c|^2} - 2 \underbrace{|\vec{p}_{\gamma 1}||\vec{p}_{\gamma 2}| c^2}_{|\vec{p}_{\gamma 1} c||\vec{p}_{\gamma 2} c| \cos\vartheta} - \cancel{|\vec{p}_{\gamma 2} c|^2}$

$= 2 E_{\gamma 1} E_{\gamma 2} (1 - \cos\vartheta)$



2.12 Bewegte Ladungen und Felder

relativistische Verallgemeinerung des 2. Newton-schen Gesetzes

klassisch $\vec{F}_k = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a}$

definiere relativistischen Kraftvierervektor

$F = (F_0, \vec{F})$ Relation zu klassischer Kraft?

2. Newton'sches Gesetz gilt: $F = \frac{dp}{d\tau} = m_0 \frac{du}{d\tau} = m_0 a$ (F, p / u, a Vierervektoren)

hier Vierergeschwindigkeit mit $u = \frac{dx}{d\tau} = (\gamma c, \gamma \vec{v})$

$$a = \frac{du}{d\tau} = \underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_{\gamma} \frac{du}{dt} = \left(\frac{(\vec{v}/c)\,\vec{a}}{(1-(v/c)^2)^2} \cdot \frac{\vec{a}}{(1-(v/c)^2)} + \frac{(\vec{v}/c)\,((\vec{v}/c)\cdot\vec{a})}{(1-(v/c)^2)^2} \right)$$

mit $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

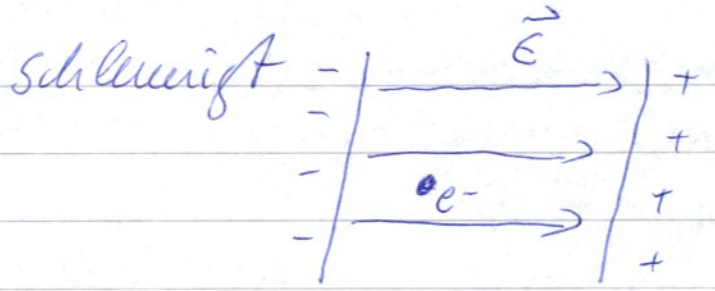
damit $\vec{F} = m_0 \frac{dt}{d\tau} \frac{d\gamma \cdot \vec{v}}{dt} = m_0 \gamma \frac{d\gamma\vec{v}}{dt} = \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma \vec{F}_k$

$$F_0 = \frac{1}{c}\frac{dE}{d\tau} = \frac{1}{c}\frac{dt}{d\tau}\frac{dE}{dt} = \frac{\gamma}{c}\frac{dE}{dt}$$

$$\boxed{F = \gamma\left(\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \gamma\left(\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}, \vec{F}_k\right)}$$ relativistischer Kraftvierervektor

F_0: pro Zeiteinheit vom Körper abgegebene od. aufgenommene Energie, d.h. Leistung; ist proportional zu der Energie, die ein beschleunigter Körper - von einem rel. dazu ruhenden Inertialsystem beobachtet - pro Zeiteinheit aufnimmt oder abgibt.

Beispiel: Elektron wird in homogenem el. Feld be-



kann zeigen (hier ohne Beweis), daß $a \cdot u = 0$

also auch $Fu = 0 = c\frac{dt}{d\tau}\vec{F}_0 - \frac{d\vec{x}}{d\tau}\cdot\vec{F}$ $\quad|:\gamma$

mit $F_0 c = \gamma \frac{dE}{dt}$ $\curvearrowright$ $\gamma\frac{dE}{dt} - \frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\vec{F} = 0$ $\quad|:\gamma$

mit $\vec{F}/\gamma = \vec{F}_K$ $\curvearrowright$ $\frac{dE}{dt} - \vec{v}\cdot\vec{F}_K = 0$

in kons. Kraftfeld $\frac{d\vec{x}}{dt}\cdot\vec{F}_K = \frac{d\vec{x}}{dt}(-\vec{\nabla}V) = -\frac{dV}{dt}$

also $\frac{d(E+V)}{dt} = 0$ Summe aus kinetisch und wie eben definiert pot. Energie ist erhalten

$\vec{F} = -\gamma\vec{\nabla}V$ und damit gilt unverändert

$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\vec{\nabla}V$ auch relativistisch

→ da hier Summe $E+V$ auftaucht, muß sich auch Lorentztransformation V wie E verhalten. Es ist ebenfalls die Nullkomponente eines Vierervektors

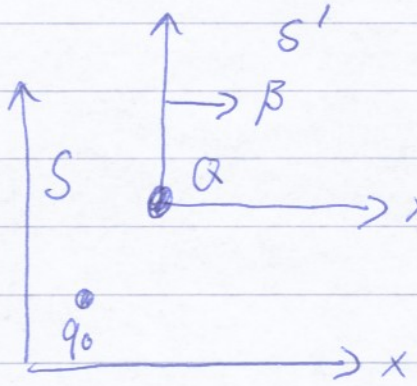
$A = (V, \vec{A})$ speziell: im Ruhesystem $A = (V, \vec{0})$

$A' = \Lambda \cdot A$

↳ 4x4 Transformationsmatrix wie gehabt

2.12.1. E- und B-Feld, ruhende und bewegte Ladung

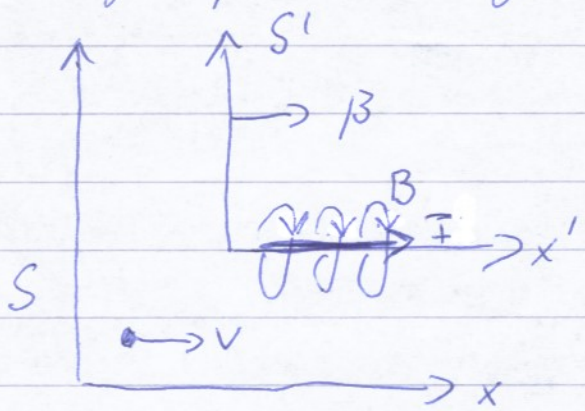
Betrachte Ladung Q in Ruhe in System S'
erzeugt Feld $\vec{E}'$
in S: el. Feld $\vec{E}$ gemessen durch Kraft auf Probeladung q_0 am Ort $\vec{r}$, $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$
Messung zeigt: Gauss'scher Satz gilt unabhängig davon ob Q relativ zu S bewegt ist oder nicht



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint \vec{E}' d\vec{A}' = Q/\varepsilon_0$$

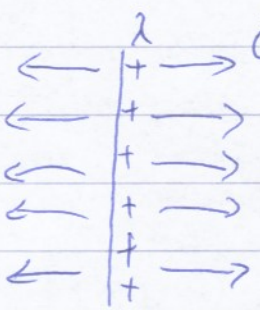
Q ist lorentzinvariante Erhaltungsgröße!

Magnetfeld erzeugt durch bewegte Ladung (Strom)



Messung von B-Feld in System S durch Lorentzkraft $\vec{F}_L$ auf bewegte Ladung q
$\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B}$

elektrisches Feld einer Linienladung mit Ladungsdichte λ (Ladung / Länge):



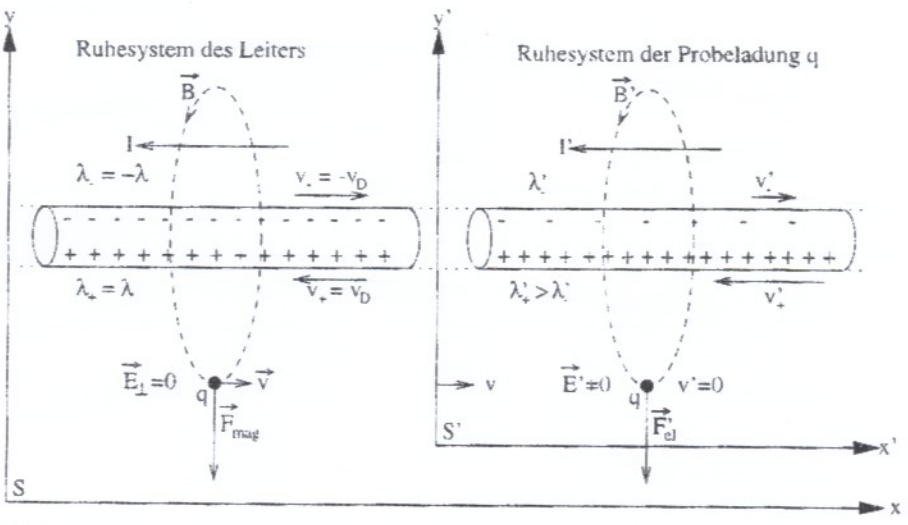
Gaußscher Satz: $|\vec{E}| = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{r}$

Magnetfeld eines Stroms I:

Ampèresches Gesetz: $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$
$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{I}{r}$

Form sehr ähnlich. Es besteht enge Beziehung zwischen E- und B-Feldern. Durch Wechsel des Bezugssystems wandeln sich elektrische in magnetische Felder (und umgekehrt), also besser: "elektromagnetisches Feld". War, was Einstein zur Formulierung der spez. Relativitätstheorie motiviert hat (siehe unten)

Illustration an einem Beispiel: gerader, stromführender Leiter. Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß Strom sich aus Bewegung von pos. und neg. ladungsträgern mit entgegengesetzten, aber gleichen Geschwindigkeiten zusammensetzt.



im System S: Probeladung q bewegt sich mit $\vec{v}$, elektrischer Strom I hat Beiträge aus pos. und neg. Ladungsträgern, die sich mit Geschw.
$v_+ = v_0$ und $v_- = -v_0$ bewegen

$$I = \lambda_+ v_+ - \lambda_- v_- = 2\lambda v_0 \qquad (\lambda \text{ ist Ladung/Länge} = Q/L)$$

erzeugt Magnetfeld $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

da effektive Längenladung $\lambda_{eff} = \lambda_+ + \lambda_- = 0$
ist das elektrische Feld $E = E_\perp = \frac{\lambda_{eff}}{2\pi\varepsilon_0 r} = 0$
also Kräfte auf Probeladung q

$$F_{magn} = q \cdot v \cdot B = q \cdot v \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad \& \quad F_{el} = q \cdot E_\perp = 0$$

für q pos. repulsiv

im System S': bewegt sich mit v in pos x-Richtung so daß Probeladung in S' ruht;
jetzt keine Lorentzkraft, da $v' = 0$. Widerspruch mit Betrachtung in S? Hier Verletzung des Relativitätsprinzips. Kann durch repulsive Kraft eines elektrischen Feldes vermieden werden.

$v'_+ > v_0$, $v'_- < v_0$ (Lorentzgeschwindigkeitstransf)
λ_+ wird größer als λ_-, da System S' in dem pos. Ladungsträger ruhen sich rel. zu S' schneller bewegt als System S, in dem neg. Ladungsträger ruhen;
also stärkere Lorentzkontraktion der Länge für pos. Ladungsträger in S', also größere Längenladung λ'_+ im Vergleich zu λ'_-.
korrekte Geschwindigkeitstransformation ergibt

$$\lambda'_{eff} = 2\lambda \frac{v_0 v}{c^2}\gamma = I \frac{v}{c^2}\gamma \quad \text{und damit}$$

$$E_\perp' = \frac{\lambda_{eff}'}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{v I \gamma}{2\pi \varepsilon_0 c^2 r} = \frac{v \mu_0 I \gamma}{2\pi r}$$

$F_{el}' = q E_\perp' \neq 0$ repulsiv für q pos. da λ_{eff} pos.

Transformation der Kraft nach S (siehe oben)

$$F_\perp = F_\perp'/\gamma = F_{magn} = \frac{F_{el}}{\gamma} = \frac{q v \mu_0 I}{2\pi r} \checkmark \text{(siehe oben)}$$

$= qvB$

el. Kraft $F_{el}' = q E_\perp'$ (in S') nicht transformiert nach S ergibt Lorentzkraft $F_{magn.}$ in S.

also: elektrische und magn. Kräfte haben den gleichen Ursprung; Relativitätstheorie erklärt magn. Kräfte durch Lorentzkontraktion bewegter Ladungsverteilungen, Lorentzinvarianz Ursprung der Kräfte, die elektrische Ladung Q

Fundamentale Gesetze: Ladungsinvarianz, Coulomb Gesetz, Lorentztransformation

Magnetfeld ist die Folge der Lorentzinvarianz der Ladung, des Coulombpotentials und des Relativitätsprinzips

magn. Kräfte zwischen bewegten Ladungen können als relativistische Effekte interpretiert werden.

Gedankenexperiment 2-43a Feynman

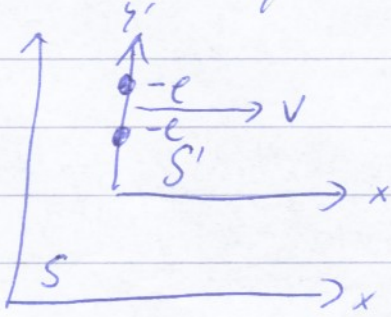
elektrische Kraft sehr stark, aber in der makroskopischen Welt sind Ladungen weitestgehend kompensiert

Illustration: freie Ladungen (Protonen und Elektronen) von 1g Wasserstoff auf Distanz Nordpol - Südpol der Erde $Q = 96000\,C$

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2} = 5\cdot 10^5\,N$$ equivalent zu Gewicht von 50t

Einstein kurz nach Formulierung d.
spez. Relativitätstheorie: "nichts hat mich so sehr
zur spez. Relativitätstheorie gebracht, wie meine
Überzeugung, daß die Lorentzkraft auf eine
bewegte Ladung in einem Magnetfeld nichts
anderes ist als eine elektrische Kraft"

2 elektrisch einfach neg. geladene Teilchen in Ruhe im System S'



im S' nur Coulombkraft
$F'_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$ abstossend

im S: $F'_{el}\gamma = F_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}\gamma$ abstossend

F_{magn} analog 2 parallele stromdurchflossene Leiter

$\propto I_1 I_2 = -\frac{e^2\beta^2\gamma}{\text{abstr.}\ 4\pi\varepsilon_0 r^2}$ $\quad \frac{F_{magn}}{F_{el}} = \beta^2$ $\quad F_{tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}(1-\beta^2)\gamma$, $1-\beta^2 = 1/\gamma^2$

$= F_{el}/\gamma$ ✓ok

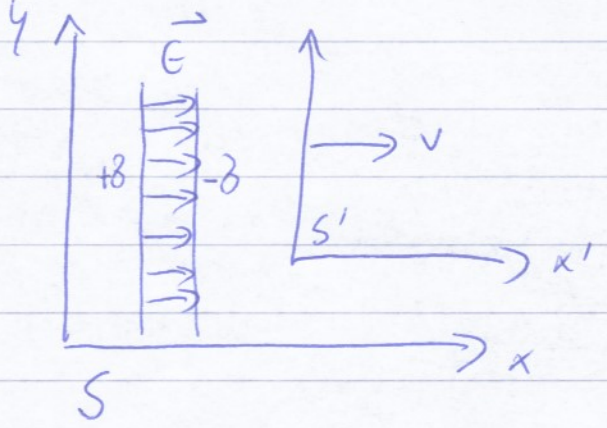
Transformation von E- und B-Feldern

Wollen Gleichungen nicht in λ, I, v_D ausdrücken sondern nur Felder.
Betrachte einige Sonderfälle

a) $\vec{E}=0$ $\vec{B}\neq 0$ stromdurchfloss. Leit. in S von oben
$\vec{E}' = \gamma(\vec{v}\times\vec{B})$

| generell gilt: in jedem System S', das sich relativ zu S (wo $\vec{E}=0$, $\vec{B}\neq 0$) mit $\vec{v}$ bewegt, existiert elektrisches Feld $\vec{E}'\neq 0$ auch $\vec{B}'\neq\vec{B}$

b) $\vec{E}\neq 0$ $\vec{B}=0$ in S
Linienladung ruhend in S, in bewegtem System misst man Strom I' und daher $\vec{B}'\neq 0$
$\vec{B}' = -\gamma\left(\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}\right)$
wie transformiert sich $\vec{E}$? unterscheide Komponenten parallel und senkrecht zu $\vec{v}$
parallel: denke an bewegten Kondensator mit Flächenladung $\sigma = \frac{Q}{A}$

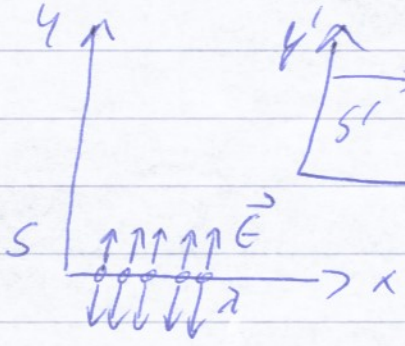


Lorentzkontraktion nur in Bewegungsrichtung, $\perp$ keine Längenänderung, also

$\sigma' = \sigma$

$E_x' = E_\parallel' = E_\parallel = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

senkrecht: bewegte Linienladung



$\lambda' = \gamma\lambda$ (siehe oben)

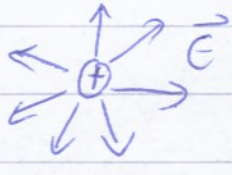
$E_\perp' = \gamma E_\perp = \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\gamma\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

dies gilt generell: $E_\perp' = \gamma E_\perp$

(falls $\vec{B} = 0$ in S) $\vec{E}_\parallel' = E_\parallel$

elektrisches Feld einer bewegten Punktladung

in Ruhe in S



$\operatorname{rot}\vec{E} = 0$

radial, sphärisch symm.

in S'

$\operatorname{rot}\vec{E}' \neq 0$

Feld radial aber nicht sphärisch symmetrisch

Zusammenfassend falls $\vec{E} \neq 0$ und $\vec{B} \neq 0$

$$\vec{E}_\parallel' = \vec{E}_\parallel \qquad \vec{B}_\parallel' = \vec{B}_\parallel$$

$$\vec{E}_\perp' = \gamma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})_\perp \qquad \vec{B}_\perp' = \gamma(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E})_\perp$$

generell gibt es Feldstärketensor der alle Komp von E und B enthält und transformiert wie jede kovariante

siehe J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, Chap. 11.2 12
der Vollständigkeit halber:

Feldstärketensor

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda F^{\mu\nu} \Lambda$$

Transf. Matrix von oben

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

übrigens folgen dann die Maxwellgleichungen aus

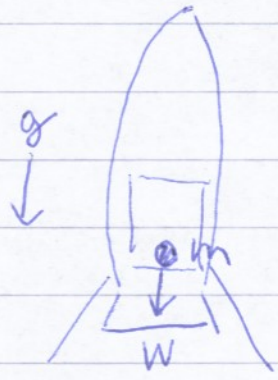
$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \qquad \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial ct}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

2.13. Ausblick auf Allgemeine Relativitäts-Theorie

Von Einstein zwischen 1907 und 1919 formuliert
Einstein rückblickend (1922) über die Idee
'Ich saß auf meinem Stuhl im Patentamt Bern.
Plötzlich kam mir ein Gedanke: 'Wenn ein
Mensch frei fällt, dann spürt er sein eigenes
Gewicht nicht'. Ich war verblüfft. Dieses Ge-
dankenexperiment machte einen tiefen Eindruck
auf mich. Das brachte mich auf die Gravita-
tionstheorie.

Das Äquivalenzprinzip: auf einer lokalen Skala
sind die Effekte eines Gravitationsfelds ununterscheid-
bar von den physikalischen Effekten eines beschleu-
nigten Koordinatensystems

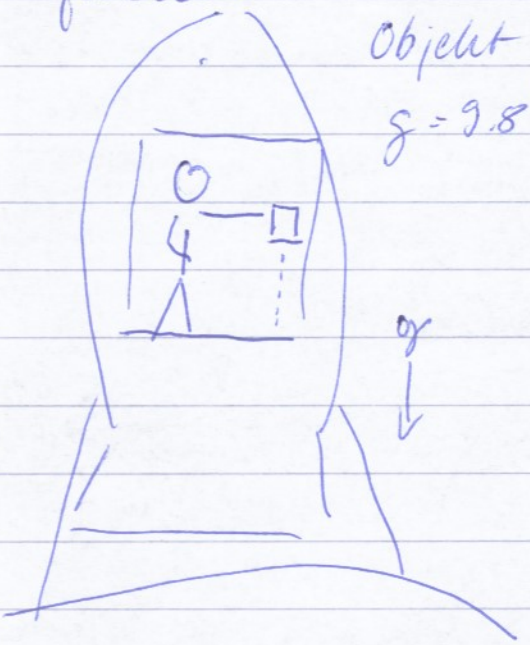
Illustration: a) Rakete in Ruhe auf der Erdoberfläche in einem uniformen Gravitationsfeld.



auf eine Masse m auf dem Boden wirkt Gewichtskraft $mg = w$

b) selbe Rakete in mitbewegtem Raum weit von allen Gravitationsfeldern; Rakete beschleunigt mit $a = g = 9.8\ m/s^2$. Nach 2. Newtonschen Gesetz wirkt Kraft $F = ma = mg$.

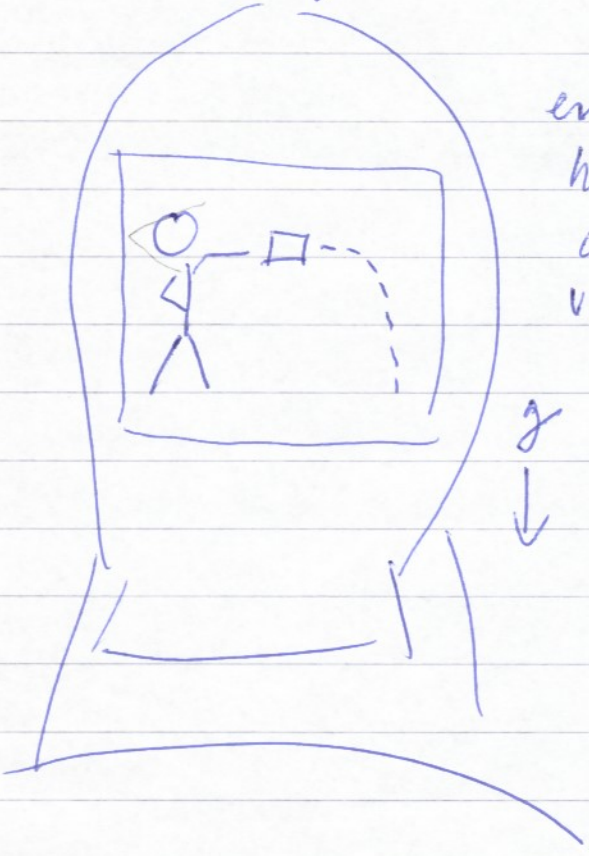
2 Experimente in diesen beiden Situationen a), b) Experimentator lässt Objekt aus seiner Hand fallen



Objekt fällt und er könnte Beschleunigung $g = 9.8\ m/s^2$ messen

G lässt das selbe Objekt in mitbewegtem Raum in nach oben mit $a = g$ beschleunigt Rakete fallen. Nach seiner Beobachtung fällt es mit $a = g$ beschleunigt in Richtung Boden der Rakete

in Sit. a)
derselbe Astronaut wirft Objekt aus seiner Sicht waagrecht und beobachtet die Bahn



er misst übliche Parabelbahn
horizontal gleichförmige Bewegung mit Geschwindigkeit v_{x0}
vertikal gleichförmig beschleunigte Bewegung nach unten mit
$v_y = gt$

er wiederholt das Experiment in Situation b)
jetzt wird er (mit dem Boden der Rakete) mit a auf das Objekt zu beschleunigt. Innerhalb seiner Kabine misst er die gleiche Flugbahn (Parabel) wie auf der Erde.

Grundlage: Masse in Newtons 2. Gesetz m_i, die 'träge Masse', ist gleich der Masse m_g, auf die die Gravitationskraft wirkt, also die 'schwere' oder 'gravitative Masse'

Experimentator in Raumstation (z.B. ISS) mit mitbewegtem Raum lässt Objekt in seiner Hand los. Es bleibt unverändert an der selben Position. Experimentator auf der Erde in einem Aufzug, in dem Seil gerissen.

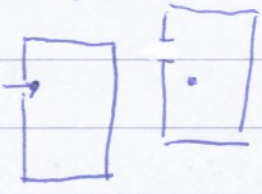
befindet sich in seinem Fall. Auch er lässt ein Objekt in seiner Hand los. Es erscheint ihm unbewegt, bleibt auf gleicher Höhe seiner Hand.

Schlussfolgerung: ein frei fallendes Bezugssystem agiert als Inertialsystem (was in Ruhe ist bleibt in Ruhe wenn keine äußere Kraft wirkt) genauso wie die Raumstation. Beschleunigung durch Gravitation wegtransformiert durch Beschleunigung des Inertialsystems.
Äquivalenzprinzip erlaubt beschleunigtes Bezugssystem als äquivalent zu einem Inertialsystem in dem Gravitation existiert zu behandeln.

Weltlinie eines beschleunigten Teilchens in Raum-Zeit ist gekrümmt, also muss auch ein Teilchen in einem Gravitationsfeld sich auf einer gekrümmten Weltlinie bewegen. Masse, die Gravitationsfeld erzeugt muss Raum-Zeit krümmen ('warp')
Hier gibt es beobachtbare Konsequenzen!

Ablenkung von Licht im Gravitationsfeld

Lichtstrahl fällt durch kleines Fenster in schnell nach oben beschleunigten 'Aufzug' und wir vermessen seine Position wie er die Kabine durchquert



etc.

würde als Zeitsequenz gemessen.

Äquivalenzprinzip sagt in einem Gravitationsfeld sollte Licht ebenso von gerader Trajektorie weggekrümmt werden. Gravitationsfeld der Erde zu klein, um das zu beobachten. 1916 schlägt Einstein vor, daß Licht wenn es die Sonne passiert, sichtbar von seiner Bahn abgelenkt werden sollte.* Kann man allerdings nur in einer Sonnenfinsternis beobachten

*Einsteins Erwartung: Ablenkung um 1.75 Bogensekunden Messe Winkelabstand von zwei Sternen weitweg und ganz nah im Winkel zur Sonne.

am 29 Mai 1919 war von der Südhalbkugel eine totale Sonnenfinsternis zu beobachten. Sir Arthur Eddington führt eine Expedition dort hin und mißt anhand von Photos von Sternen ein Ergebnis, das Einsteins Vorhersage bestätigt. Das macht Schlagzeilen 'light caught bending' um die ganze Welt und instantan wird Einstein berühmt. Später genaue Messungen von 2 Quasaren im Virgocluster anhand von Radiowellen. Da die Sonne im Radiofrequenzbereich sehr dunkel ist, muß man nicht auf Sonnenfinsternis warten, sondern nur auf Nähe zur Sonne warten. Am 8.10.1972 finden Messungen von Radiowellen dieser 2 Quasare eine Änderung in ihrer Winkelseparation um 1.73 Bogensekunden ← quantitative Bestätigung der allg. Relativitätstheorie

⇒ Fig. 2-15/16

Licht hat keine Ruhemasse, aber bewegte Masse $mc^2 = E = pc$ spielt selbe Rolle

andere Observable: • Präzession des Perihels des Planeten Merkurs Gravitation (wegen Präsenz anderer Planeten) sagt 531 Bogensch. pro Jahrhundert, beobachtet 574 Effekt Allg. Rel. Theorie +43 Bogensekunden pro Jh.

• gravitative Rotverschiebung: Licht, das im Gravitationsfeld steigt (fällt) leistet Arbeit (gewinnt pot. Energie) → Änderungen der Energie → Änderung d. Frequenz → Uhren gehen in beschleunigten Bezugssystemen bzw in Abh. von der Schwerbeschleunigung langsam (Uhr im Gravfeld langsam als Uhr im feldfreien Raum) → Zeit zwischen Ticks ~~[illegible]~~, ~~[illegible]~~

Atomuhr besteht auf Oszillationen (Spektrallinien) durch Abwesenheit vom Gravitationsfeld wird Frequenz der Oszillation verlangsamt oder Wellenlänge größer

$$\nu_f = \nu_g \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right) \qquad \lambda_f = \lambda_g \left(1 + \frac{gh}{c^2}\right)$$ Rotverschiebung

Messung 1960 Pound & Rebka, Messung von γ-Strahlen auf der Spitze des Turms von Harvard (22m hoch)

$\Delta\nu/\nu = 2{,}5 \cdot 10^{-15}$ nachgewiesen durch Mössbauer Effekt

• Raumkrümmung, Grodaten, kürzeste Verbindung zwischen 2 Punkten nicht mehr Gerade

(schwarze Löcher Gravitationslinsen gekrümmte Raum-Zeit

escape velocity von der Erde $v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{R}}$

was müsste Radius der Erde sein, daß Lichtgeschwindigkeit gleich v_e?

$R_S = \frac{2GM_e}{c^2}$ Schwarzschild Radius

wenn Masse größer, kann Licht nicht mehr entweichen

Lichtgeschwindigkeit erreicht für $R < R_S$ in einem schwarzen Loch wegen Raumkrümmung