

Röntgenbeugung an Kristallen v. Laue - Verfahren

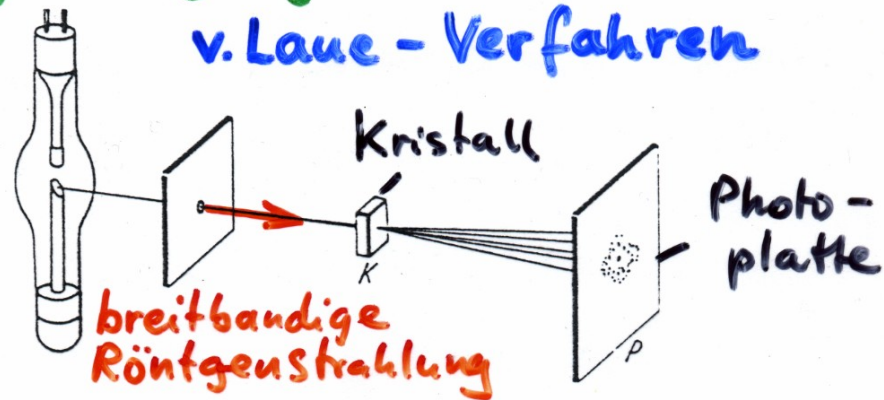


Abb. 12.30. Anordnung von v. Laue, Friedrich und Knipping zur Erzeugung von Kristallinterferenzen

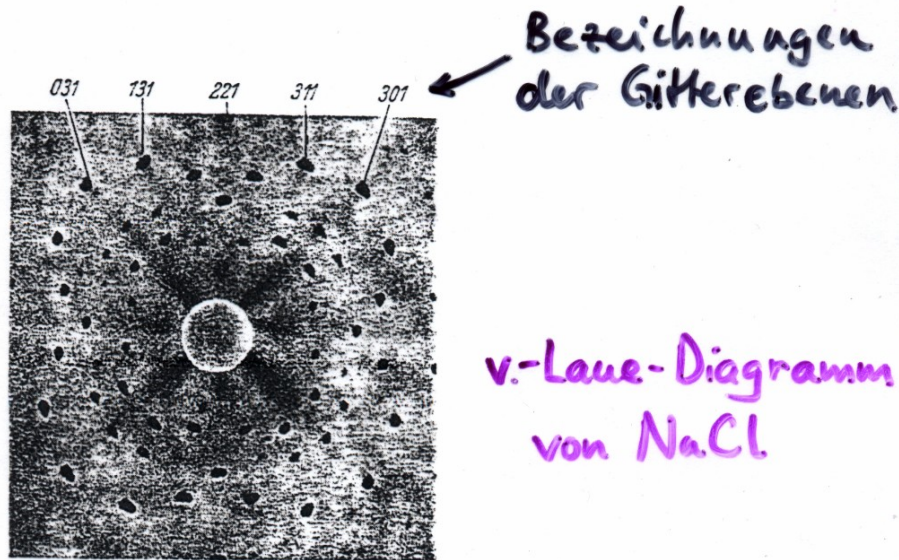
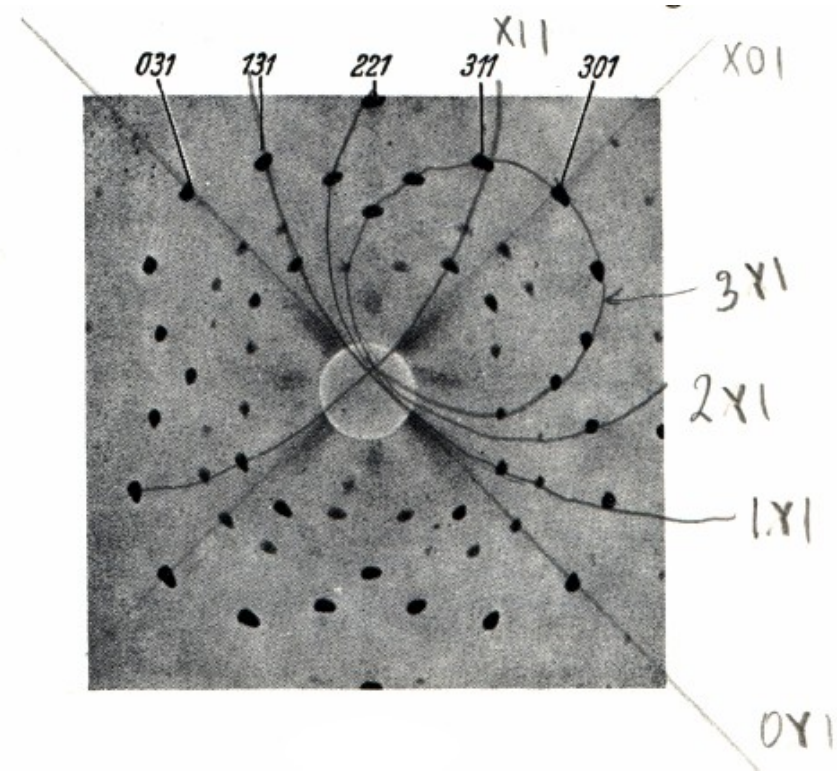


Abb. 12.31. Laue-Interferenzen mit einer parallel zur Würfel­fläche gespaltenen NaCl-Kristallplatte. (Aus R. W. Pohl, Optik und Atomphysik). Die oben angegebenen Zahlentripel sind die Millerschen Indizes der Netzebenen, an denen ein passender Wellenlängenbereich reflektiert wird



Aus: Gerthsen, Physik, 13. Aufl., S. 460

Fig. 4-4 (AW)

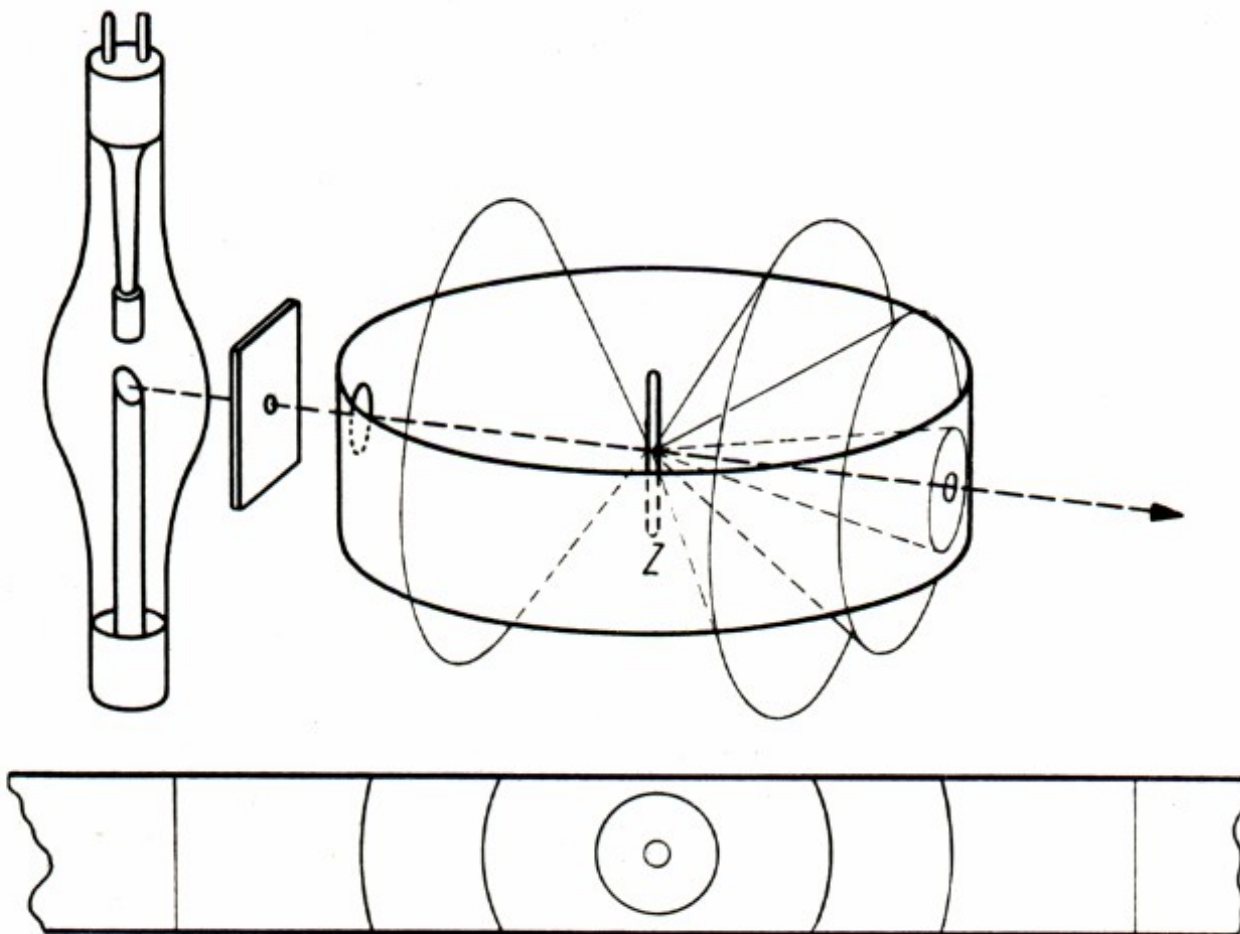


Abb. 534. Oben: Debye-Scherrer-Verfahren zur Bestimmung des Gitterbaues von Kristallen. Unten ist das Beugungsbild auf dem abgewickelten Film dargestellt

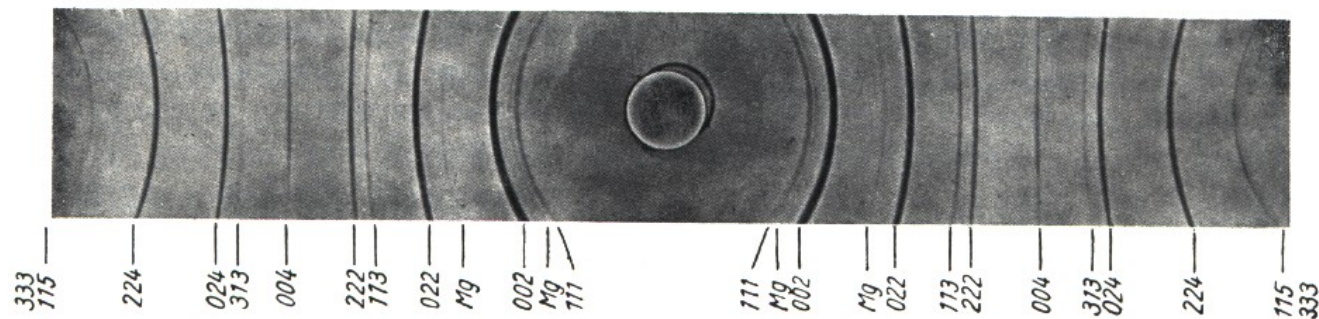


Abb. 535. Debye-Scherrer-Diagramm von MgO mit den zu den Beugungsringen gehörenden Laue-Indizes der „spiegelnden“ Netzebenen

Fig. 4-5 (AW)



FIGURE 27-13
Louis de Broglie.

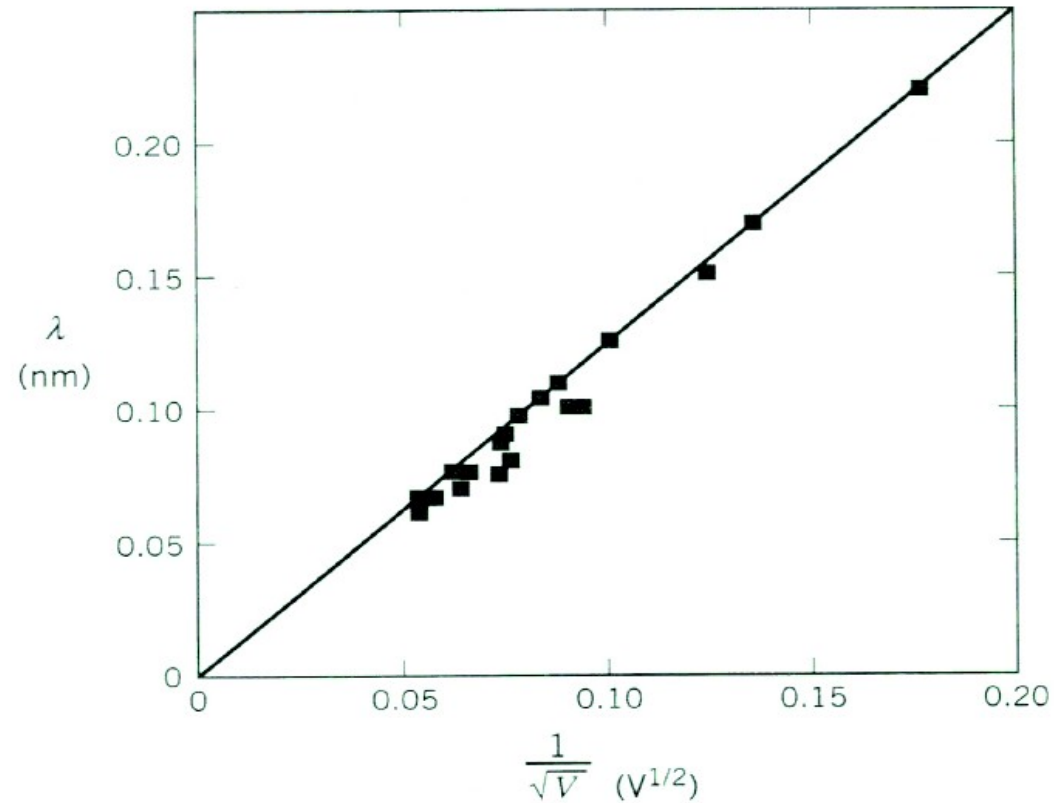


FIGURE 5-6 Testing the deBroglie equation for nonrelativistic electrons.

Interferenz von Materiewellen bei Streuung an Kristallen

Exp. von Davisson u. Germer (1927)

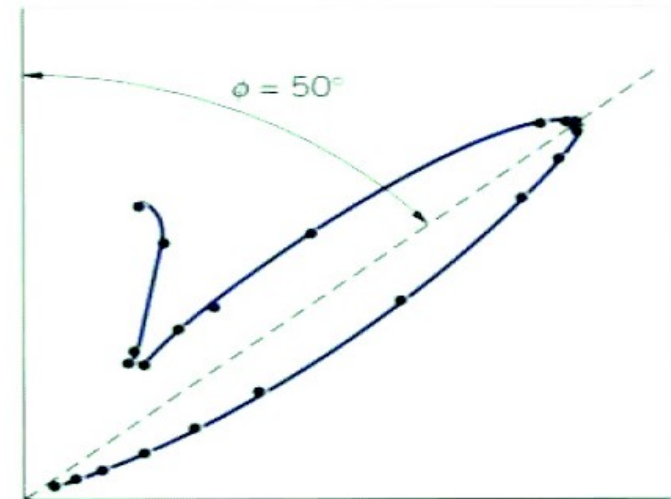
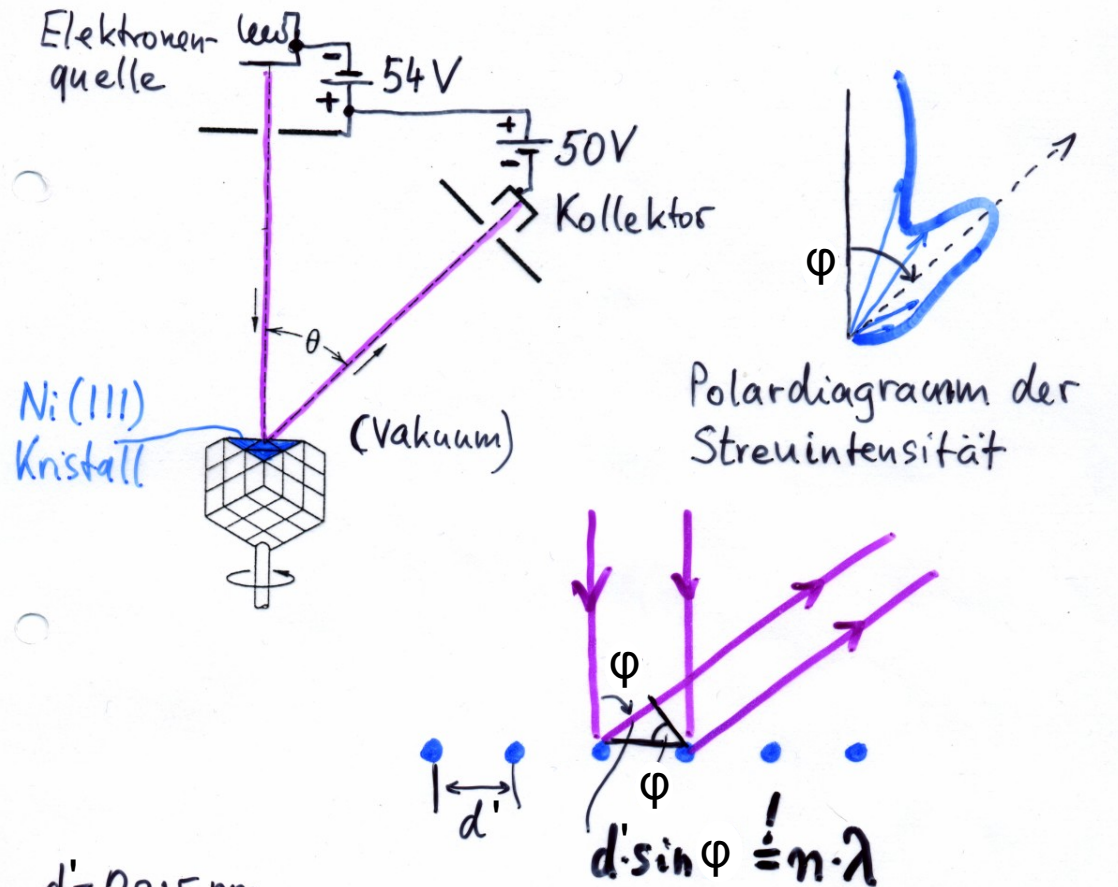


FIGURE 4.5 Results of Davisson and Germer. Each point on the plot represents the relative intensity when the detector in Figure 4.4 is located at the corresponding angle ϕ measured from the vertical axis. Constructive interference causes the intensity of the reflected beam to reach a maximum at $\phi = 50^\circ$ for $V = 54$ V.

$$d' = 0.215 \text{ nm}$$

$$E = 54 \text{ eV} \quad (\beta = 0.015) \quad \lambda_{\text{DB}} = \frac{\lambda_c}{\beta\gamma} \approx \frac{2.4 \cdot 10^{-12} \text{ m}}{0.015} = 1.65 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

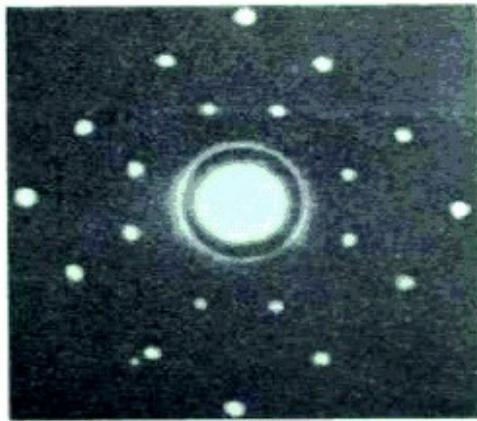
$$\sin \phi = 1 \cdot \frac{\lambda_{\text{DB}}}{d'} = 0.76 \quad \sim \quad \phi = 50^\circ \quad \text{für erstes Beugungsmax.}$$

K. Krane, Modern Physics (Wiley, New York, 1996)

Fig. 4-7 (AW)

- Elektronen werden nur von Oberflächenatomen gestreut
- Die Beugungsbedingung entspricht Bragg mit $\theta = 90^\circ - \phi/2$ und $d = d' \sin(\phi/2)$

Vergleich Röntgenbeugung und Beugung von Teilchenstrahlen

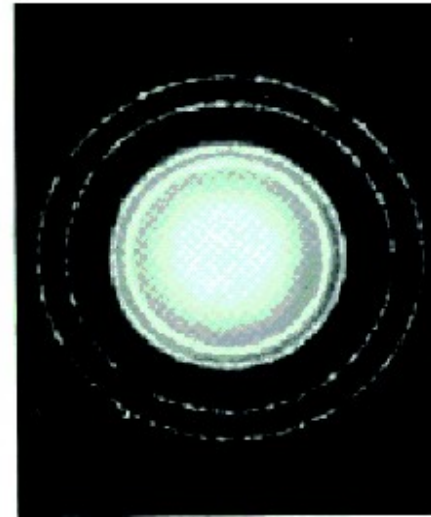
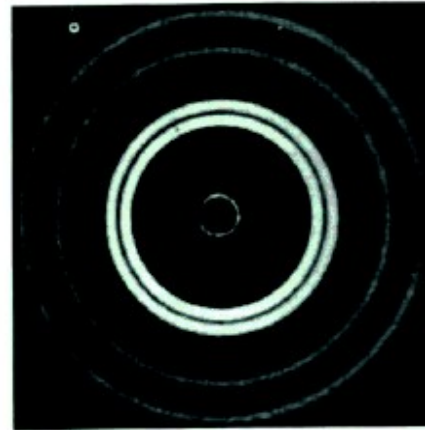


(a)



(b)

Figure 29.8 (a) The neutron diffraction pattern and (b) the X-ray diffraction pattern for a crystal of sodium chloride (NaCl).



The concentric ring patterns produced when a beam of X-rays (left) and a beam of electrons (right) passes through the same thin polycrystalline aluminum foil. The two diffraction patterns are almost identical.

While collaborating with L. Germer, an explosion rocked the lab, but after putting the experiment back together, it was clear that something very strange had happened: the data “completely changed.” Unbeknownst to them, while cleaning up the target through prolonged heating, the nickel sample had reformed into a few large crystals. When they subsequently directed an electron beam at the target, they saw a diffraction pattern identical to the one produced by X-rays (p. 1023), even though it’s impossible for a stream of particles to do that. Another year passed before anyone realized that Davisson and Germer had verified de Broglie’s hypothesis: Eq. (31.1) matched the data in every detail. *Electrons with comparable momenta to those of X-ray quanta are diffracted as if they were waves of the same wavelength.*

Cutnell/Jonson ...

Elektronenbeugung am Draht

„Fresnelsches Bi-prisma“ Düker, Möllenstedt
~1957

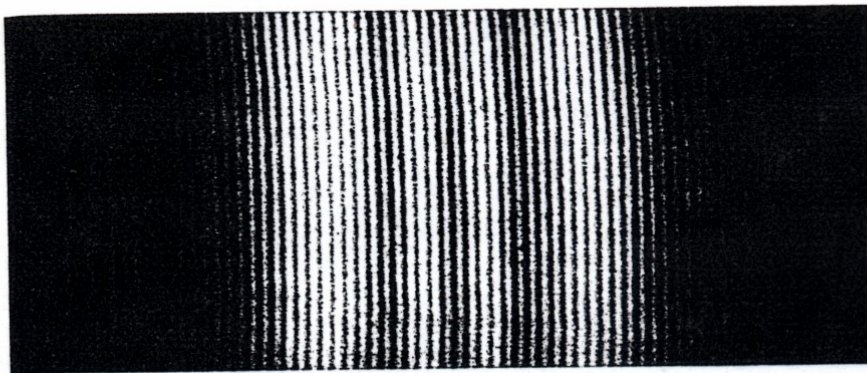
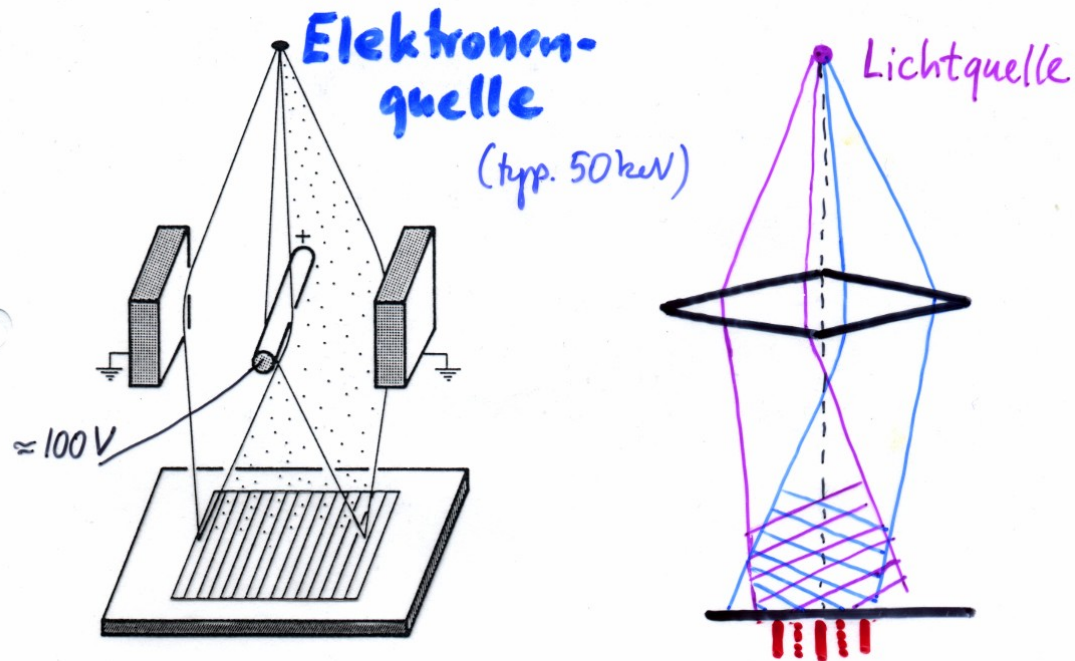


Fig. 4-9 (AW)

Doppelspaltexperiment mit neutralen Atomen

Cornal, Mlynek (1991) (Konstanz)

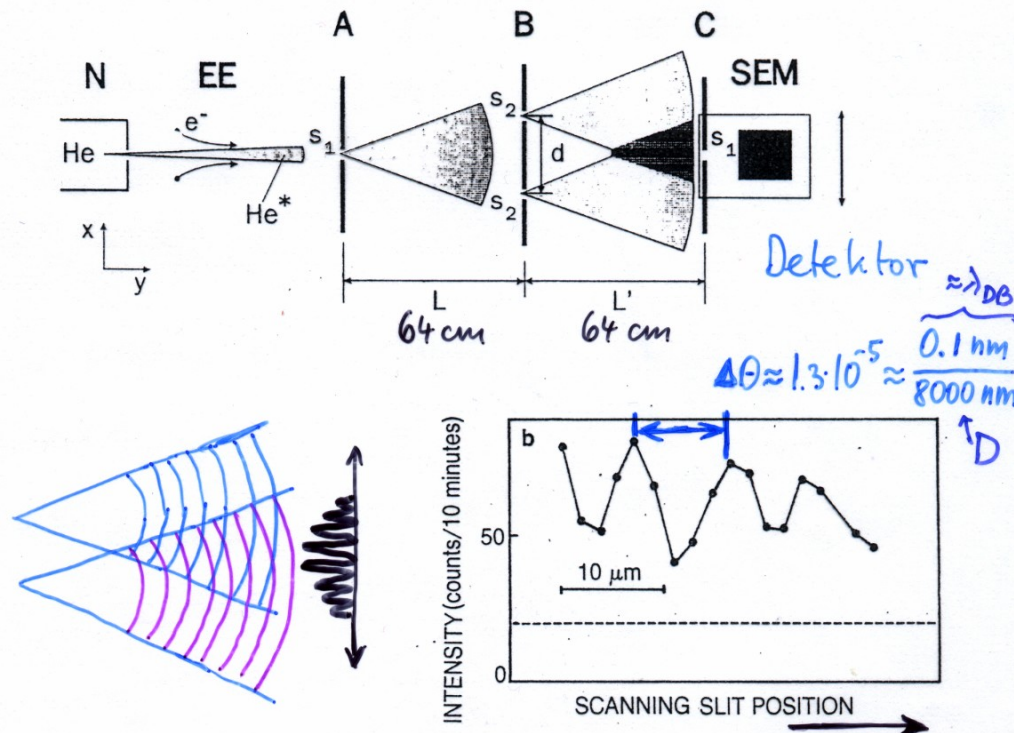
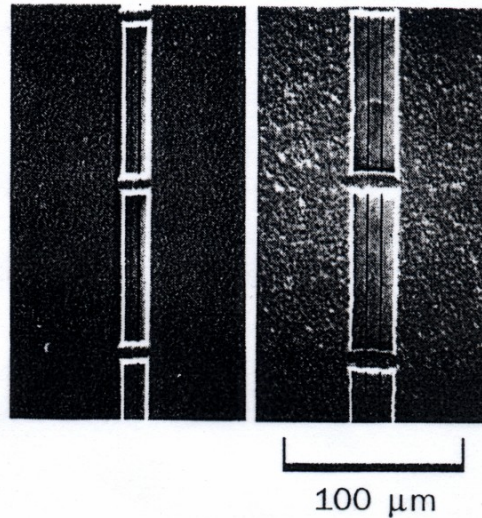
Mikrostruktur auf dünner Folie
Doppelspalt $D=8\mu\text{m}$ $d=1\mu\text{m}$

(angeregte, metastabile)

He-Atome

$T \sim 300\text{K}$ $\lambda_{dB} = 0.056\text{ nm}$

$T \sim 83\text{K}$ $\lambda_{dB} = 0.103\text{ nm}$



B. Levy, Physics Today (1991)

Fig. 4-10 (AW)

Na - Atom interferometer

MIT Cambridge, Mass.

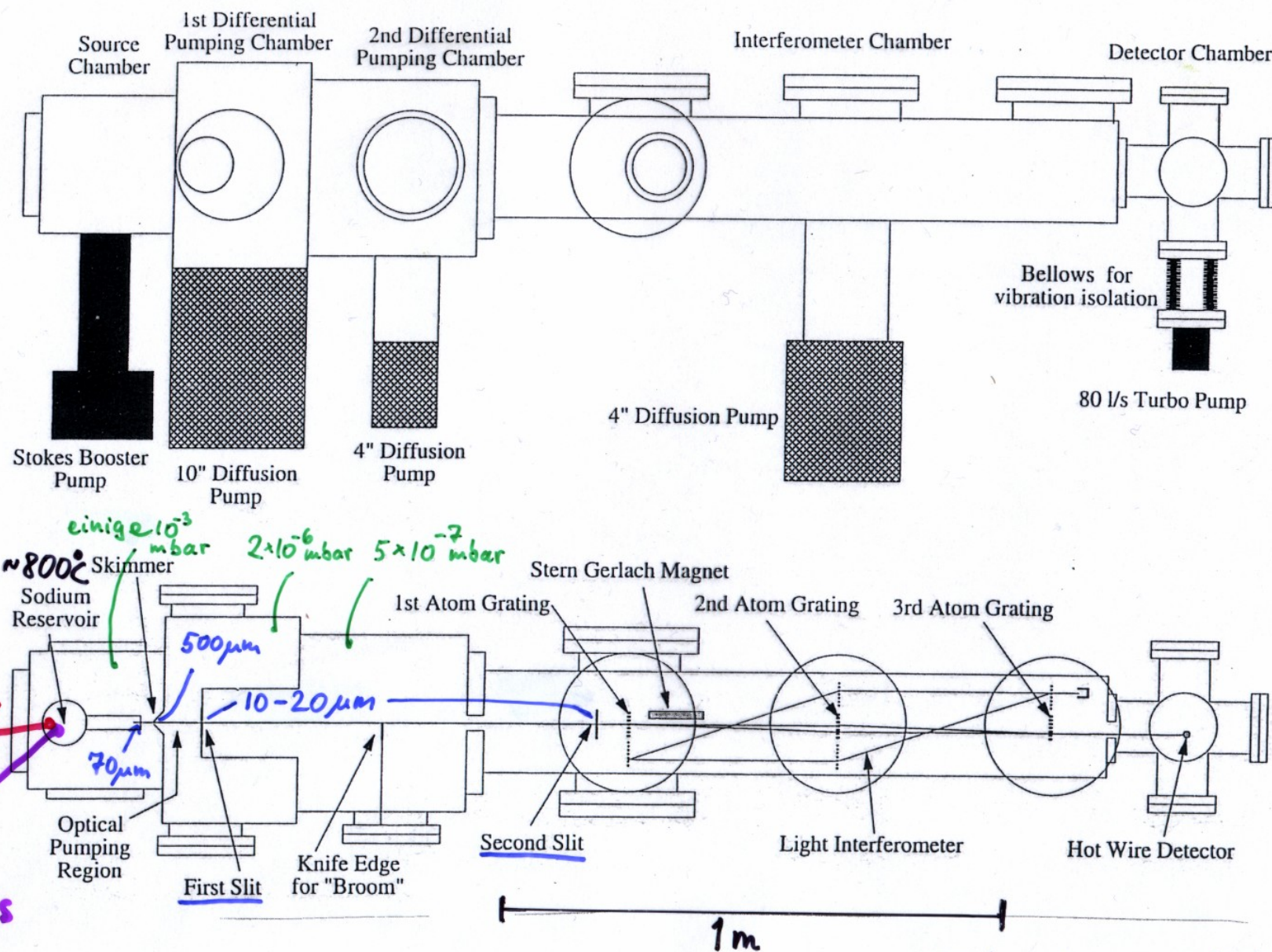


Fig. 4-11 (AW)

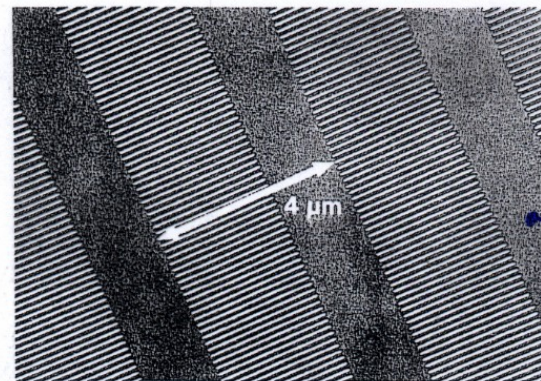
J. Schmiedmayer et al. in
"Atom Interferometry" ed. by Paul Berman
Acad. Press 1997

TYPICAL PARAMETERS FOR OUR Na AND Na₂ SOURCE

Seed gas		Kr	Ar	Ne	He
Velocity (m/sec)		750	1000	1700	3300
Na					
λ_{dB} (Å)		0.23	0.17	0.10	0.05
Separation (μm)		75	55	34	18
Na ₂					
λ_{dB} (Å)		0.125	0.085	0.05	0.025
Separation (μm)		38	28	17	9

for
200 nm
grating
~0.6 m
distance

Mikrofabriziertes Beugungsgitter



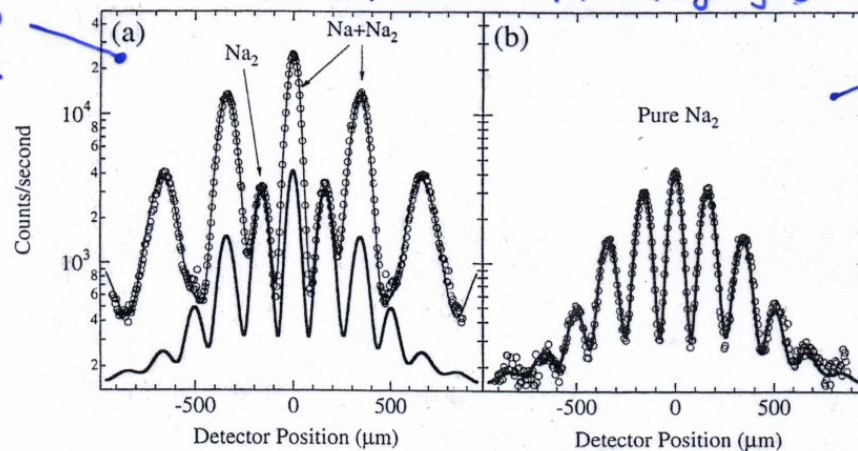
Periode 140 nm

mechanische
Verstärkung

Beugungsmuster an einem Gitter

100 nm-Gitter Kr-Trärgas

16.5%
Na₂



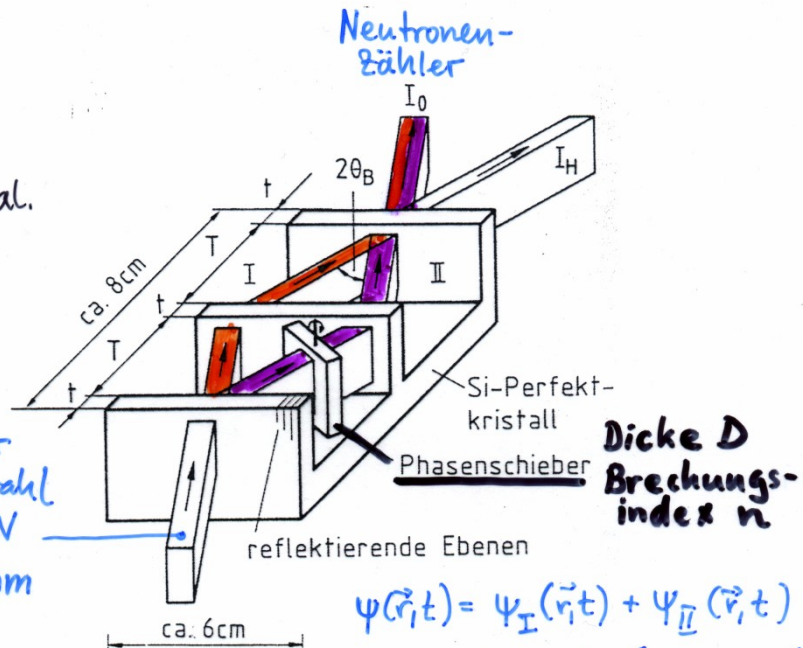
Na-Atome
durch
Laserlicht
abgelenkt

Fig. 4-12 (AW)

Neutronen-Interferometrie

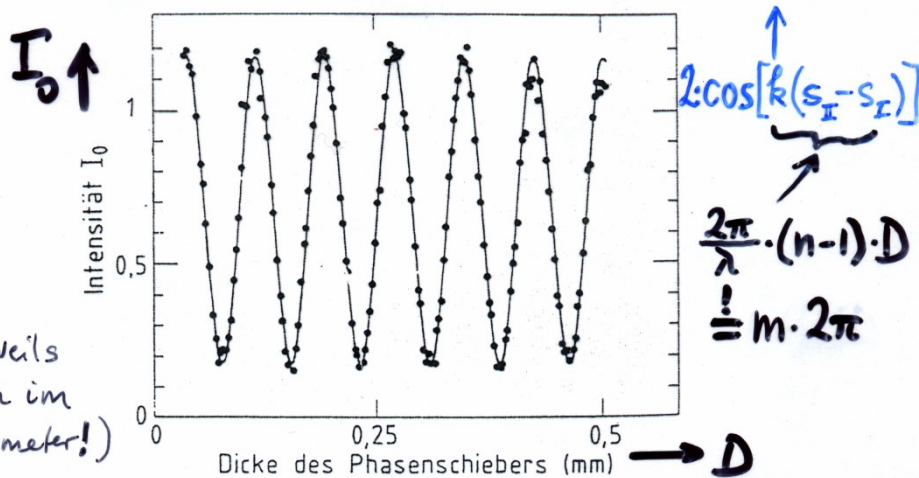
Rauch et al.
(~1974)

thermischer
Neutronenstrahl
 $T \approx 0.025 \text{ eV}$
 $\lambda_{dB} \approx 0.18 \text{ nm}$



$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_I(\vec{r}, t) + \psi_{II}(\vec{r}, t)$$

$$I_0 = |\psi(\vec{r}, t)|^2 = |\psi_I(\vec{r}, t)|^2 + |\psi_{II}(\vec{r}, t)|^2 + 2 \operatorname{Re}(\psi_I(\vec{r}, t) \cdot \psi_{II}^*(\vec{r}, t))$$



(Nur jeweils
1 Neutron im
Interferometer!)

siehe z.B. Physikalische Blätter 41 (1985) 190

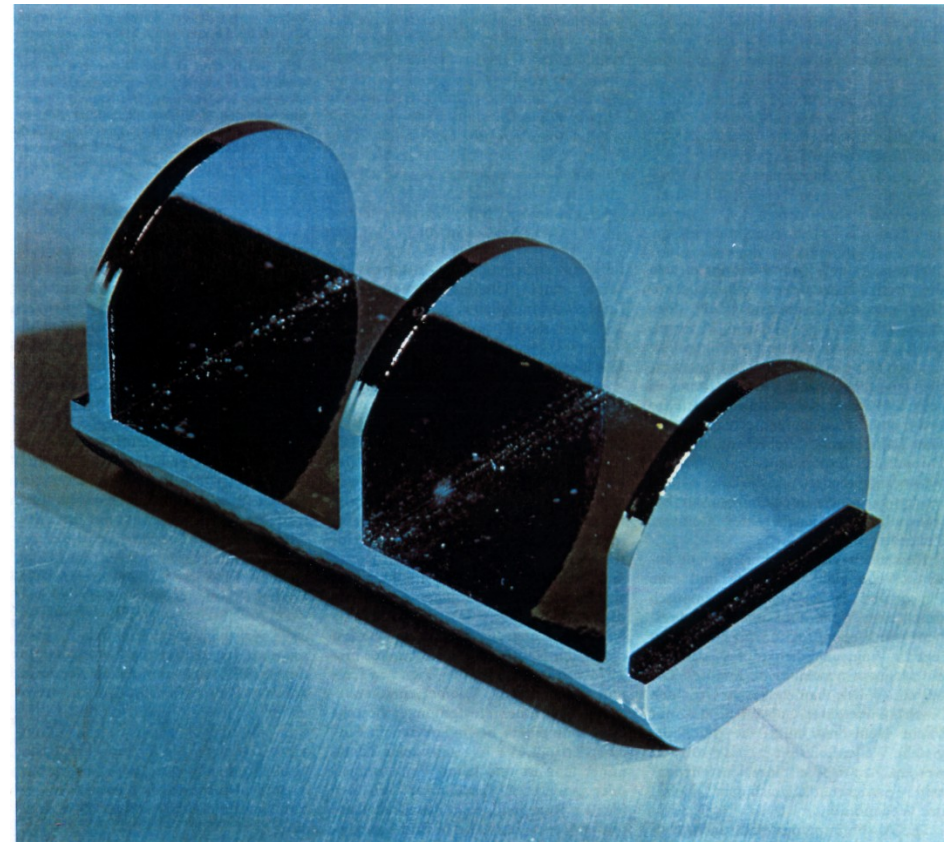


Fig. 4-13 (AW)



Interferenzvorgang. (Mit freundlicher Genehmigung durch „The New Yorker“. Zeichnung Charles Addams; © 1940, 1968 The New Yorker Magazine, Inc.)

Fig. 4-14 (AW)

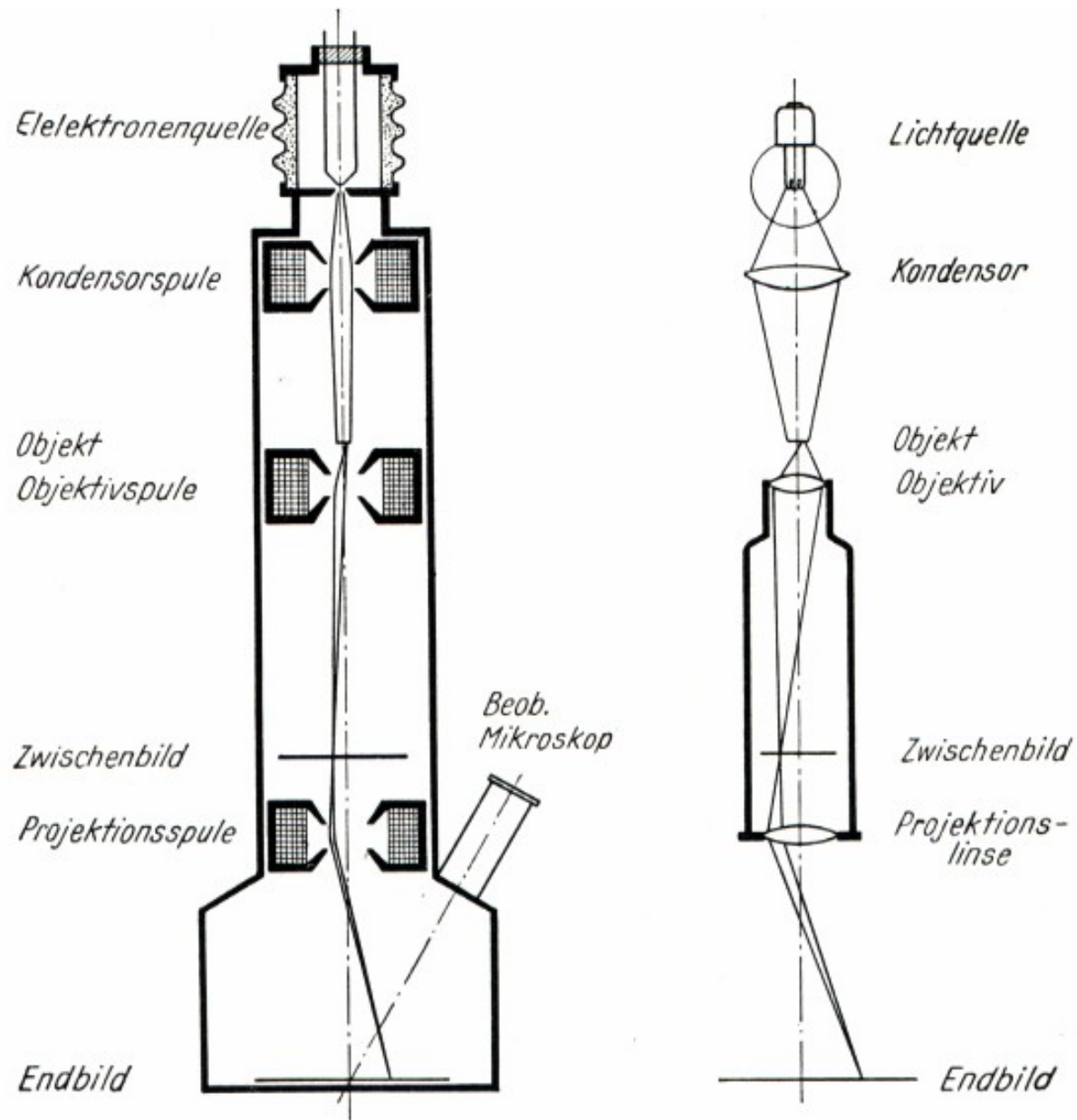


Abb. 402. Elektronenmikroskop mit magnetischen Linsen, daneben Strahlengang im optischen Projektionsmikroskop

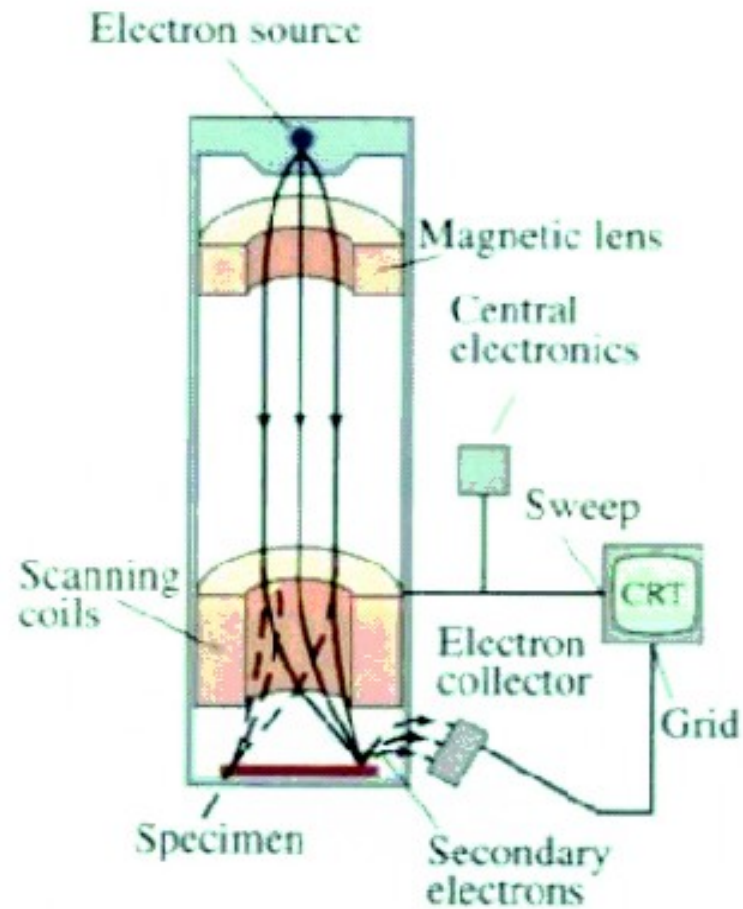
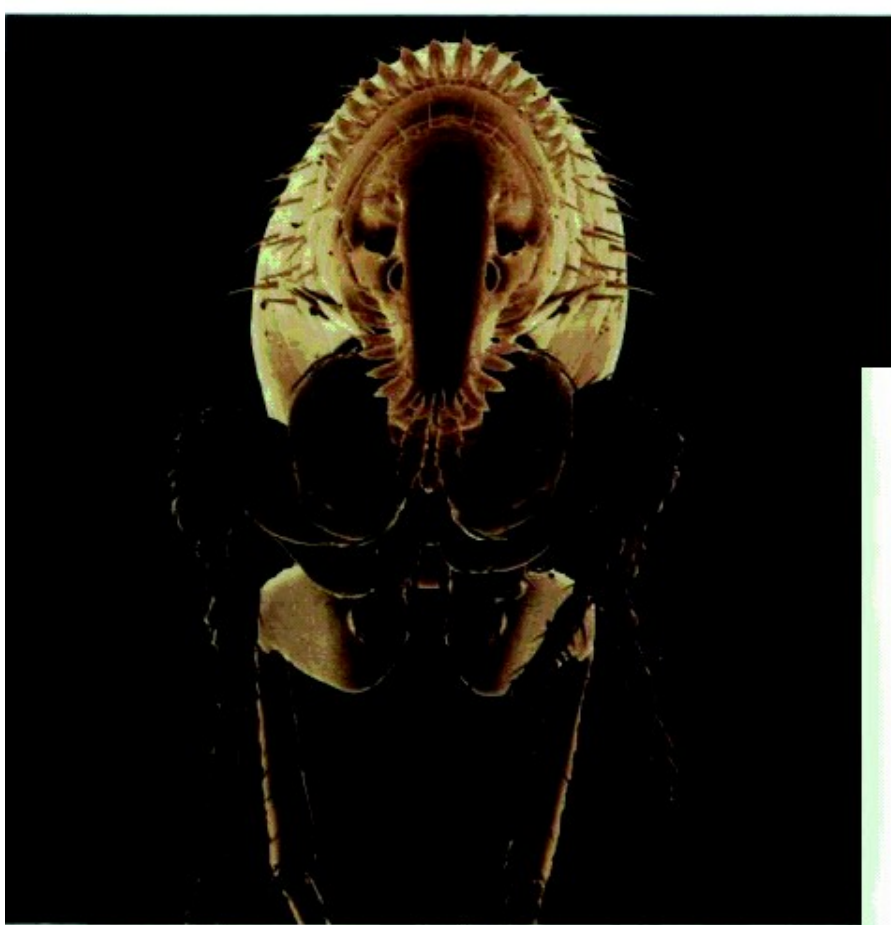


FIGURE 27-16 Scanning electron microscope. Scanning coils move an electron beam back and forth across the specimen. Secondary electrons produced when the beam strikes the specimen are collected and modulate the intensity of the beam in the CRT to produce a picture.

Fig. 4-16

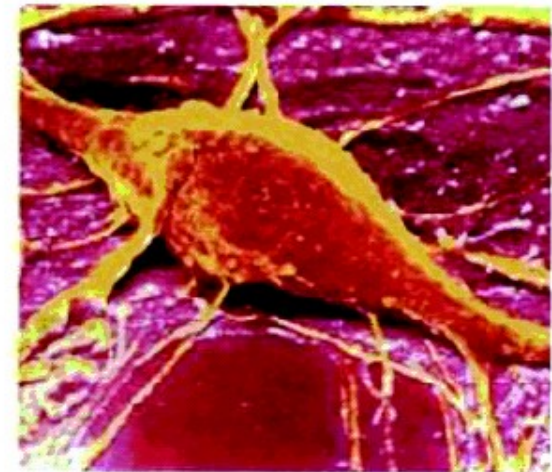
Aufnahmen mit dem Elektronenmikroskop



Katzenfloh
Cutnell/Jonson ...



(a)



(b)

FIGURE 27-17 Electron micrographs (in false color) of neurons of the human cerebral cortex: (a) transmission electron micrograph of synapse (junction) between two neurons ($\approx 40,000\times$); (b) scanning electron micrograph of a single neuron ($\approx 3000\times$).

5.4 Schrödingergleichung - einfache Anwendungen (Fortsetzung)

Wiederholung:

- allgemein:
$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} + V(\vec{r})$$

$$= m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2 c^2}{m_0^2 c^4}} + V(\vec{r})$$

$$\approx m_0 c^2 + \underbrace{\frac{p^2}{2m_0} + V(\vec{r})}_{E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}}$$
 nichtrelativistisch

Übergang: $m_0 \rightarrow m$
 $E \rightarrow E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$

$$\Rightarrow E = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r})$$

Materiewellen:

bisher ebene Welle

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

Annahme: Teilchen bewegt sich mit
 $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const.}$ durch ein räumliches
 Potential - "Schilde" $\Rightarrow E = \hbar\omega = \text{const.}$

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{-i\omega t} \cdot \psi(\vec{r})$$

Ebene Welle: $\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}}$

eine Richtung $\psi(x) = e^{ikx}$

Ableitung $\frac{\partial}{\partial x} e^{ikx} = ik e^{ikx}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{ikx} = -k^2 e^{ikx}$$

$$\Rightarrow p = \hbar k \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$p^2 = \hbar^2 k^2 \rightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Wellengleichung:

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(\vec{r}) \cdot \psi = E \cdot \psi \quad \parallel \quad \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \psi$$

ψ ebene Welle $\Rightarrow \hbar^2 k^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} (E - V)$

$$\Rightarrow k = \pm \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V)}$$

Wenn $V(x) = \text{const.}$

Materiewelle $\lambda_{dB} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)}}$

Potentialänderung langsam gegen λ_{dB}
 $\Rightarrow$ "fast" ebene Welle

$\Rightarrow$ "fast" klassische Bewegung
 + Materiewellen-Eigenschaft
 z.B. bei Interferenz.

(entspricht Beispiel a): "freies" Teilchen)

Lösung: $\psi(x) = e^{ikx}$

mit $k = \pm \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)}$

Wellengleichung erfüllt?

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = (E-V)\psi$$

Mit $V = \text{const.}$:

Für $E-V > 0$ immer Welle

$$\psi(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}$$

Fester Impuls $p = \hbar k \Rightarrow \psi(x) = c e^{ikx}$
 (= Richtung gegeben) $|\psi(x)|^2 = |c|^2$

Für $E - V < 0$ $k = iK$ mit $K = \pm \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V - E)}$

statt Welle findet man

$$\psi(x) = C_1 e^{Kx} + C_2 e^{-Kx}$$

Bedingungen an die Wellenfunktion:
 $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ stetig; $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$ ($P(x) = |\psi(x)|^2$ ($P(x,t) = |\Psi(x,t)|^2$))

b) Teilchen zwischen Potentialwänden

$$V = 0 \text{ für } x = 0 \dots L \quad \text{II}$$

$$V = +\infty \text{ für } x < 0 \quad \text{I}$$

$$x > L \quad \text{III}$$

Drei Bereiche, an den Bereichsgrenzen
 muss $\psi(x)$ (und im endlichen Potential
 $\psi'(x)$) stetig sein.

$$\psi(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$\psi(L) = C_1 e^{iLx} + C_2 e^{-iLx} = 0$$

$\Rightarrow$ Lösung hat die Form $\psi(x) = c(e^{ikx} - e^{-ikx})$

$$\psi(x) = A \sin kx$$

$$\text{mit } \sin kL = 0 \Rightarrow kL = \pm n\pi$$

$$n = 1, 2, 3$$

Also ist $k = \pm \frac{n\pi}{L}$

d.h. $p_n = \hbar k = \pm n \cdot \frac{\hbar\pi}{L}$ (+ hinlaufend,
- zurücklaufend)

Energie $E_n - V = \frac{p_n^2}{2m}$ mit $V=0$

$$\Rightarrow E_n = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2m L^2} = \frac{n^2 \hbar^2}{8m L^2}$$

Außerdem

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = |A|^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$= |A|^2 \cdot \frac{L}{2} \Rightarrow A = \sqrt{\frac{L}{2}}$$

(man kann A reell positiv wählen)

Demnach:

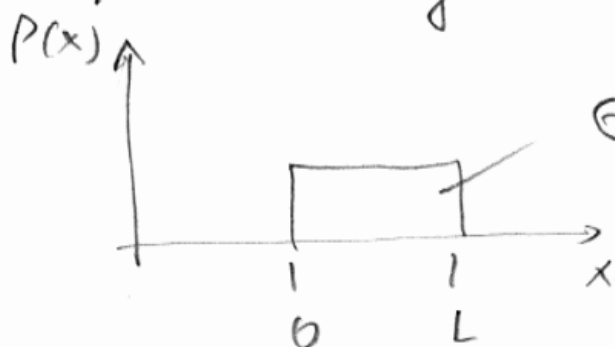
Eigenzustand n mit $E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{8m L^2}$ mit $n=1,2,3$

und $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{L}{2}} \sin \frac{n\pi x}{L}$

$$\Psi_n(x,t) = e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{L}{2}} \sin \frac{n\pi x}{L}}_{\psi_n(x)}$$

Muschärferelation

Ableitung der Ortsunschärfe (grob)



$$\sigma_{P(x)} = \Delta x = L/\sqrt{12}$$

Impuls: $E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} =$

$$\Rightarrow \Delta p \approx \sqrt{2mE_1} = \sqrt{\frac{h^2}{4L^2}} = \frac{h}{2L}$$

$$\Rightarrow \Delta x \cdot \Delta p = \frac{L}{\sqrt{12}} \cdot \frac{h}{2L} = \frac{2\pi\hbar}{2\sqrt{12}L} = \frac{\pi\hbar}{2\sqrt{3}} > \frac{\hbar}{2}$$

Bemerkung:

Für $n=1$ zeigt die Simulation einen einzelnen verbreiterten Peak der p -Verteilung, nicht zwei Delta-Peaks. $\psi(p)$ ist die Fourier-Transformierte von $\psi(x)$, und da die $\sin$ -Funktion in $\psi(x)$ abgeschnitten ist, ist die Fouriertrauf. verbreitert. Also: $p = \pm \sqrt{2mE_1}$ ist ebenfalls eine grobe Annahme.

c) Der endlich hohe Kasten und weitere Stufenpotentiale

$$V=0 \text{ für } x=0 \dots L \quad \text{III}$$

$$V=V_0 \quad \text{für } x < 0 \quad \text{I}$$

$$x > L \quad \text{II}$$

Man hat drei Lösungen (Deutlicher ^{III} Aufg. 4.5)

$$\text{I} \quad \psi(x) = A_1 e^{kx}$$

$$\text{II} \quad \psi(x) = A_2 \sin(kx + \varphi) \quad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}$$

$$\text{III} \quad \psi(x) = A_3 e^{-kx} \quad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V - E)}$$

und aus den Stetigkeitsbedingungen erhält man erlaubt k-Werte als Lösungen von

$$k_n = \frac{k}{\tan \frac{1}{2}(n\pi - k_n L)}$$

Es gibt nur einige Lösungen (endliche Zahl von Eigenzuständen), vor allem $E_n \approx V_0$ ist gegenüber ∞ hohem Kasten modifiziert. Sonst ähnlich (Computer).

Computersimulationen <http://www.falstad.com/>
hier: qm1d

- Kasten unendlich hoch
- Kasten endlich
- Ausblick auf harmon. Oszillator.

d) harmonischer Oszillator

$$V(x) = \frac{K}{2} x^2$$

Klassisch: Schwingungsfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{K/m} \quad (K = m\omega_0^2)$$

Schrodinger-Gleichung

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{K}{2} x^2 \right) \psi$$

Ansatz $\psi(x) = A e^{-ax^2}$

$$\frac{d\psi}{dx} = -2ax (A e^{-ax^2})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{dx^2} &= 4a^2 x^2 (A e^{-ax^2}) - 2a (A e^{-ax^2}) \\ &= (-2a + 4a^2 x^2) \psi \end{aligned}$$

$$4a^2 = \frac{m}{\hbar^2} K \Rightarrow a = \frac{\sqrt{mK}}{2\hbar} = \frac{m\omega_0}{2\hbar}$$

und $a = \frac{m}{\hbar^2} E \Rightarrow E = \frac{1}{2} \hbar \omega_0$

mit $\psi(x) = A e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar} x^2}$

Das ist eine Gauß-Funktion,

$$\text{normiert: } A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \cdot A^2 \stackrel{!}{=} 1$$

$\uparrow$
 $(\psi(x))^2$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4}$$

$$= \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

Es ist der tiefste erlaubte

Eigenzustand

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega_0}{2\hbar} x^2}$$

Beispiele: Schwingung von Atomen um eine Gleichgewichtslage, z.B. im Kristall oder Molekül. Energie liegt nun

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

oberhalb der Ruheenergie; Orte variieren statistisch entsprechend der Wellenfunktion $\psi(x)$ (Schwingungsphase undefiniert!).

Weitere Eigenzustände

$$\psi_n(x) = A f_n(x) e^{-ax^2}$$

mit $f_n(x) = \sqrt{2^n n!} H_n\left(\frac{m\omega_0}{\hbar} x\right)$

$$H_{n+2}(\xi) = 2\xi H_{n+1}(\xi) - 2(n+1)H_n(\xi)$$

$$H_0 = 1 \quad H_1 = 2\xi$$

$$\Rightarrow E_n = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

n	H =	$\frac{1}{2}\hbar\omega_0$
0	H = 1	
1	H = 2\xi	$\frac{3}{2}\hbar\omega_0$
2	H = 4\xi^2 - 2	$\frac{5}{2}\hbar\omega_0$
3	H = 8\xi^3 - 12\xi	$\frac{7}{2}\hbar\omega_0$

Messgröße im Grundzustand $2\sigma^2 = \frac{1}{a}$

Ortsfunktion ψ : $\sigma_{\psi} = \sqrt{\frac{1}{2a}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$

$$|\psi|^2: \sigma_{P(x)} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}$$

Impuls

$$\psi_k: \sigma_{\psi(k)} = \sqrt{2a} = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}$$

$$|\psi_k|^2: \sigma_{P(k)} = \frac{\sigma_{\psi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}$$

$$|\psi_p|^2: \sigma_{P(p)} = \hbar \sqrt{\frac{m\omega_0}{2\hbar}}$$

$$\sigma_{P(x)} \cdot \sigma_{P(p)} = \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \text{minimale Messgröße}$$