

Kapitel 2

Grundzustand der Atomkerne

In diesem Kapitel sollen die Eigenschaften des Grundzustands der Atomkerne untersucht werden. Dabei wollen wir uns auf die folgenden Fragestellungen konzentrieren:

- endliche **Ausdehnung** der Atomkerne. (In der Atomphysik (Physik IV) wird der Atomkern als punktförmig behandelt).
- **Spin** und **magnetisches Moment** der Atomkerne.

Diese beiden Beobachtungen führen zu dem Modell, daß Kerne zusammengesetzte Systeme sind, und daß es Bausteine der Atomkerne gibt.

- **Bindung der Bausteine:** Die quantitative Formulierung führt zum einfachsten Kernmodell, dem Tröpfchenmodell, aus dem bereits viele für die Anwendungen wichtige Schlüsse gezogen werden können (Energiegewinn bei Fusion und Kernspaltung, Stabilität der Atomkerne).

2.1 Kernradien

LITERATUR: [22, 23]

In diesem Kapitel sollen einige einfache Experimente diskutiert werden, die zur Vorstellung führen, daß Atomkerne ausgedehnte Systeme sind. (Behandlung in Physik IV: Punktförmige Kerne $\rightarrow V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$). Es sei darauf hingewiesen, daß mit analogen Methoden in der Teilchenphysik die endliche Ausdehnung der „Elementarteilchen“ $p, n, \pi^\pm, K^\pm, \dots$ nachgewiesen wird.

2.1.1 Das Myon-Atom

Es gibt neben dem Elektron noch weitere Teilchen in der Natur, die in vielen Eigenschaften dem Elektron ähneln. Wir interessieren uns hier für das Myon (μ^\pm) mit den folgenden Eigenschaften:

- $m_\mu = 206 m_e$
- Spin $\frac{1}{2}$
- punktförmig ($r < 10^{-16}$ cm)
- Coulomb-Wechselwirkung mit dem Kern dominiert
- relativ lange Lebensdauer ($\tau \approx 10^{-6}$ s)

Das Myon kann wie ein Elektron im Atom gebunden werden. Für seine Bindungsenergie gilt in 1. Näherung

$$E_n^{(1)} = -\frac{m_\mu c^2}{2n^2} \alpha^2 Z^2$$

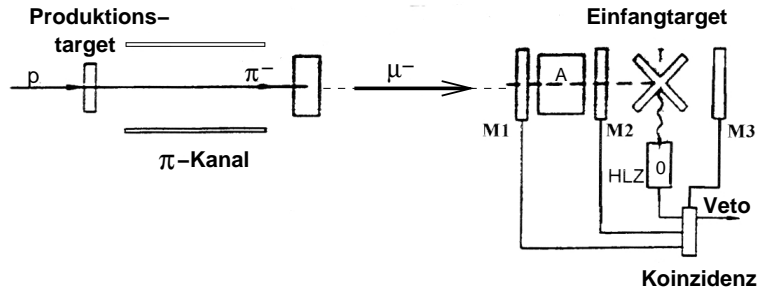


Abbildung 2.1: Experimenteller Aufbau zur Messung des Röntgenspektrums bei Übergängen in μ -Atomen (HLZ = Halbleiterzähler, SZ = Szintillationszähler M1, M2, M3). Erzeugung: $p + Kern \rightarrow \pi^- + p + Kern^* + n$, $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ (Details siehe Kap.5 und 7.3)

mit

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} \quad \text{Feinstrukturkonstante, } Z \text{ Kernladung}$$

$$m_\mu c^2 = 105.66 \text{ MeV}, \quad n \text{ Hauptquantenzahl.}$$

Der Radius der Bahn ist

$$a = \frac{\hbar^2 c^2}{m_\mu c^2} \cdot \frac{1}{e^2} \cdot \frac{n^2}{Z} = a_B \frac{n^2}{Z} \frac{m_e}{m_\mu}$$

$$a_B = 0.53 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0.53 \text{ \AA},$$

Beispiel:

$$Z = 82, \quad n = 1, \quad \rightarrow \quad a_\mu = \frac{a_B}{82 \cdot 206} = 0.31 \cdot 10^{-14} \text{ m} = 0.44 r_{PbKern},$$

wie wir aus der **Parametrisierung der Kernradien** sehen

$$r_{Kern} = 1.2 \cdot 10^{-15} \text{ m} \cdot A^{1/3}$$

speziell

$$r_{Pb} = 1.2 \cdot 10^{-15} \text{ m} \cdot 206^{1/3} = 7.1 \cdot 10^{-15} \text{ m}.$$

Daraus folgt, daß die Myonendichte am Kernort ungefähr $(200)^3 = 10^7$ mal so groß ist wie die Elektronendichte am Kern. Man erwartet daher eine Beeinflussung des Spektrums der Myonenübergänge durch die endliche Kernaussdehnung (siehe die Spektren eines Experiments in Abb.2.2, 2.3 und experimentellen Aufbau in Abb.2.1).

Zusammengefaßt liefern die Experimente die folgenden Ergebnisse:

- Z klein, n groß: E_n beschreibt die Lage der Niveaus, da $a \gg R_{Kern}$
- Z groß und n klein: Man erwartet Abweichungen von der Formel, da $a \approx R_{Kern}$

Dies sei am Beispiel des Blei skizziert:

Die Erklärung für diesen Effekt ist die endliche Kernaussdehnung; innerhalb des Kerns sieht das Myon nicht die volle elektrische Ladung des Kerns und ist schwächer gebunden. Diesen Effekt kann man in einfachen Fällen mit einer Störungsrechnung berücksichtigen. Dabei ist das störende Potential gerade der Unterschied zwischen dem reinen Coulomb-Potential (für das wir die exakten Lösungen der Energien und der Wellenfunktionen kennen) und dem tatsächlichen Potential

$$\hat{H} = \hat{H}_o + (\hat{H}_{real} - \hat{H}_o) = \hat{H}_o + \hat{H}'$$

mit

$$\hat{H}_o = \frac{\hat{p}^2}{2m^*} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m^* r^2} - \frac{Ze^2}{r} \quad (m^* = \text{reduzierte Masse}).$$

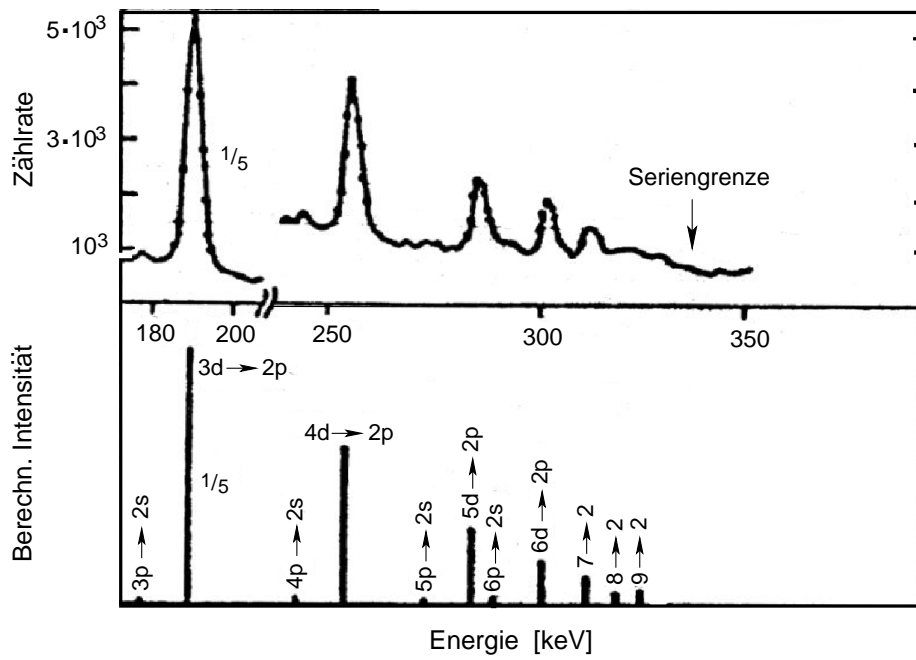


Abbildung 2.2: Gemessene Spektren der Photonen, die für μ -Atome des *Ti* beobachtet wurden

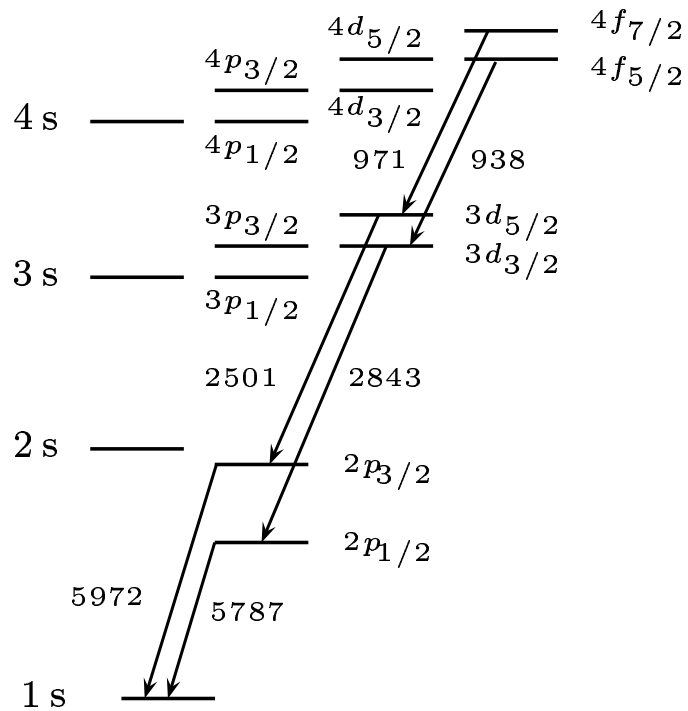


Abbildung 2.3: Energieniveaus des Myon-Atoms des *Pb* und beobachtete Übergänge

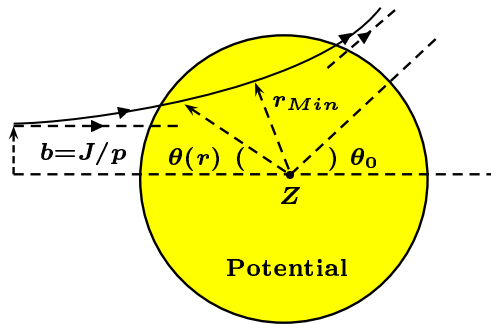


Abbildung 2.4: Hyperbelbahn eines geladenen Teilchens im Coulomb-Feld

Dann sind die Energien des Myon-Atoms in 1. Näherung

$$E'_n = E_n + \langle \Psi_n | \hat{H}' | \Psi_n \rangle .$$

Man sieht, daß am stärksten die S -Orbitale energievorschieben sein werden, weil dort die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Myons am Ursprung ungleich Null ist und damit das Integral der Störungsrechnung maximal beiträgt, während bei Orbitalen höheren Drehimpulses eine merkliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit nur in einem Abstand (bei kleinem n und großem Z aber immer noch im Kern) vom Kernmittelpunkt gegeben ist. Man kann somit den Kernradius ableiten, wenn man als einfachsten Ansatz eine homogene Ladungsverteilung im Kern annimmt (Tröpfchenmodell, siehe Kap.2.3) und versucht, die experimentell gefundenen Linien (Abb.2.2) mit einer homogenen Ladungsverteilung – mit dem Kernradius als Parameter – wiederzugeben. Man erhält so:

$$R_K = r_o A^{1/3} \quad \text{mit } r_o = 1.2 \text{ fm} .$$

Die genaue Behandlung führt zu den in Abb.2.6 dargestellten Ladungsverteilungen.

2.1.2 Rutherford-Streuung

Die Rutherford-Streuung wurde bereits in Physik I und Physik IV behandelt. Hier sei zunächst an die klassische Ableitung erinnert:

Trifft ein geladenes Teilchen (α -Teilchen) auf einen Kern, so wird es auf einer Hyperbelbahn abgelenkt (Abb.2.4). Ist θ der Streuwinkel, dann gilt

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}, \quad a = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{m v_\infty^2}, \quad b = a \cot \frac{\theta}{2}$$

$\theta \rightarrow 0^\circ \quad \rightarrow \quad b \rightarrow \infty$ Abschirmung durch Atomhülle $\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow 0$
 $\theta \rightarrow 180^\circ \quad \rightarrow \quad b \rightarrow b_{Min}$ Möglichkeit den Kernradius zu messen, wobei Abweichungen von der Rutherford-Formel beobachtet werden

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z_1^2 Z_2^2 e^4}{4 E_{Kin}^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} .$$

Dabei haben wir angenommen, daß

- der Einfluß der Atomhülle vernachlässigt werden kann,
- der Kern den Spin 0 hat und punktförmig ist,
- der Kern unendliche Masse besitzt.

Die Ausdehnung des Kerns hat bei kleinem b , also großem θ , den stärksten Einfluß. In Physik IV und in HQM wird gezeigt, daß in Bornscher Näherung der differentielle Wirkungsquerschnitt gegeben ist durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^4} \left| \int V(\vec{r}) e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} d^3r \right|^2$$

\vec{k} und \vec{k}' bezeichnen den Wellenzahlvektoren der einfallenden und gestreuten Welle (Huygen'sches Prinzip).

Führt man den Impulsübertrag $\vec{q} = \hbar(\vec{k} - \vec{k}')$ ein, dann kann man den Wirkungsquerschnitt ausdrücken durch die Streuamplitude:

$$f(\theta) = \frac{m}{2\pi \hbar^2} \int V(r) e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar} d^3r$$

$$[f] = \frac{eV^2}{eV^2 f m^2} \cdot f m^3$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 .$$

Wir wenden diese Beziehung jetzt in 3 Schritten auf unser Problem an:

1. Streuung am Zentralpotential

$$\vec{q}\vec{r} = qr \cos \theta, \quad d^3r = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi .$$

Die Winkelintegration kann wegen $V(\vec{r}) = V(r)$ (Annahme!) sofort ausgeführt werden

$$\int e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar} V(r) d^3r = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^\infty e^{iqr \cos \theta/\hbar} V(r) d \cos \theta d\phi r^2 dr = 4\pi \int_0^\infty \frac{\sin qr/\hbar}{qr/\hbar} r^2 V(r) dr .$$

Die Streuamplitude für das Zentralpotential lautet dann

$$f(\cos \theta) = f(\vec{k}, \vec{k}') = \frac{2m}{\hbar q} \int_0^\infty V(r) r \sin \frac{qr}{\hbar} dr .$$

2. Anwendung auf das abgeschirmte Coulomb-Potential:

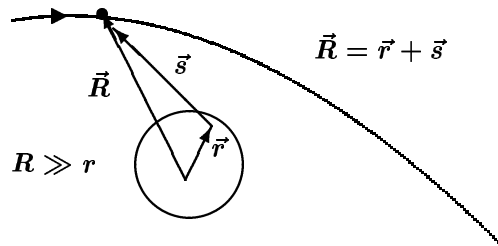
$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} e^{-\alpha r}$$

$$f(\cos \theta) = \frac{2m}{\hbar q} Z_1 Z_2 e^2 \int_0^\infty \sin \frac{qr}{\hbar} e^{-\alpha r} dr = \frac{2m Z_1 Z_2 e^2}{q^2 + \alpha^2 \hbar^2} .$$

Daraus folgt schließlich im Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$ für das Coulomb-Potential die Rutherford-Streuformel

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_R = \frac{(2m Z_1 Z_2 e^2)^2}{\vec{q}^4} .$$

3. Ausgedehnte Kerne:



$\vec{R} = \vec{r} + \vec{s}$ Beitrag eines Volumenelements d^3r zum Streupotential

$$dV(\vec{s}) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{s} \rho(\vec{r}) d^3r \quad (\text{hier: } \rho(\vec{r}) = \rho(r)).$$

Dann folgt für die Streuamplitude

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{m Z_1 Z_2 e^2}{2\pi\hbar^2} \int \int \frac{\rho(r)}{s} e^{i\vec{q}(\vec{R}-\vec{r})/\hbar} d^3r d^3R \\ &= \underbrace{\int \rho(r) e^{-i\vec{q}\vec{r}/\hbar} d^3r}_{\text{Formfaktor}} \underbrace{\frac{m Z_1 Z_2 e^2}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{i\vec{q}\vec{R}/\hbar}}{R} d^3R}_{\text{Rutherford-Streuung}}. \end{aligned}$$

Dabei wurde näherungsweise $R = s$ gesetzt. Für den Streuquerschnitt eines geladenen Teilchens (Z_1) an einem Streuer (Z_2 ; $\rho(r)$) gilt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \underbrace{F^2(\vec{q})}_{\text{Ausdehnung}} \underbrace{\frac{d\sigma}{d\Omega}}_{\text{punktf. Streuer}}|_R$$

mit dem Formfaktor

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) e^{-i\vec{q}\vec{r}/\hbar} d^3r.$$

Eine typische gemessene Winkelverteilung für die Streuung von Elektronen an Kernen zeigt Abb.2.5.

Eigenschaften des **Formfaktors**:

- Er beschreibt den Unterschied der Streuung an einem ausgedehnten Gebilde verglichen mit einem punktförmigen Streuer (siehe **Strukturfaktor** in der Festkörperphysik).
- Für $\vec{q} \rightarrow 0$ folgt $\vec{q}\vec{r}/\hbar \ll 1$ und somit $e^{-i\vec{q}\vec{r}/\hbar} \rightarrow 1$; deshalb gilt für den Formfaktor

$$\lim_{q \rightarrow 0} F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) d^3r = 1.$$

- Wenn die Wellenlänge von der Größenordnung des Kernradius ist ($\lambda \approx r_{\text{Kern}}$), dann gilt $\vec{q}\vec{r}/\hbar \approx 1$. Dann bewirken kleine Änderungen von \vec{q} große Änderungen von $e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar}$, und wir können $\rho(r)$ ausmessen.
- Für $\lambda \ll r_{\text{Kern}}$ gilt $(\vec{q} \cdot \vec{r})/\hbar \gg 1$, und die Exponentialfunktion oszilliert sehr stark – auch wenn sich \vec{r} nur geringfügig ändert – selbst in einem Bereich, wo $\rho(\vec{r})$ quasi konstant ist. Dann ist

$$F(\vec{q} \rightarrow \infty) = \int e^{-i\vec{q}\vec{r}/\hbar} \rho(\vec{r}) d^3r \approx 0.$$

$\rho(\vec{r})$ kann aus Fouriertransformation des Formfaktors gewonnen werden. Abb.2.6 zeigt typische, auf diese Weise „gemessene“ Ladungsverteilungen.

Ist die Ladungsverteilung kugelsymmetrisch, so ist der Formfaktor nur vom Betrag des Impulsübertrages \vec{q} abhängig

$$\rho(r) \rightarrow F(\vec{q}^2).$$

Man kann zeigen, daß man für kleine q bei kugelsymmetrischen Ladungsverteilungen den Formfaktor nähern kann durch (Übungsaufgabe):

$$F(\vec{q}^2) = 1 - \frac{\vec{q}^2}{6\hbar^2} \int r^2 \rho(r) d^3r = 1 - \frac{\vec{q}^2}{6\hbar^2} \langle r^2 \rangle$$

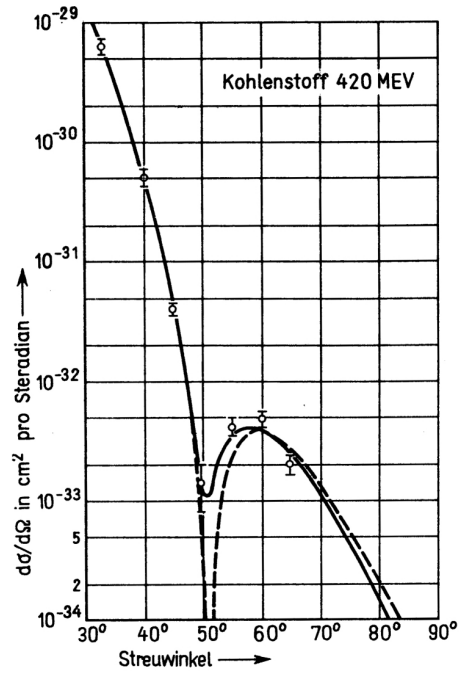


Abbildung 2.5: Beobachtete Winkelverteilung der Elektronen in der Kernreaktion $e^- + {}^{12}\text{C} \rightarrow e^- + {}^{12}\text{C}$

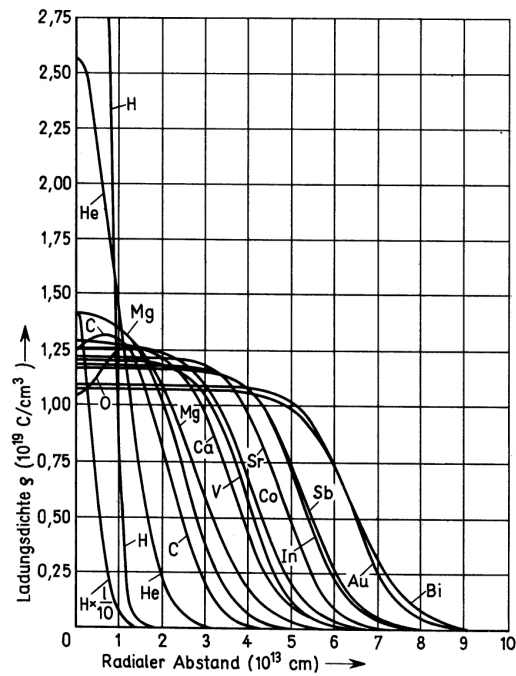


Abbildung 2.6: Typische Ladungsverteilung von Atomkernen [2]. Für große Z ist die Fermi-Verteilung, für kleine z die Gauß-Verteilung eine gute Näherung

und deshalb

$$\langle r_{Kern}^2 \rangle = -6\hbar^2 \frac{d^2 F(\vec{q}^2)}{d\vec{q}^2}.$$

Man findet für das Proton

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle r^2 \rangle} &\approx 0.8 \cdot 10^{-15} \text{ cm} = 0.8 \text{ fm} \\ \text{Kerne: } r_{Kern} &= r_o A^{1/3}, \quad r_o = 1.2 \text{ fm} \\ \text{Neutron: } \rho_n &\neq 0, \text{ aber } \int \rho_n(\vec{r}) d^3r = 0 \end{aligned}$$

Komplikationen, die hier nur angedeutet und nicht weiter besprochen werden sollen, sind:

Spin 0-Teilchen	1 Formfaktor	Ladungsverteilung
Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen	2 Formfaktoren	Verteilung der Ladung und des magnetischen Moments
Spin 1-Teilchen	3 Formfaktoren	Verteilung der Ladung, des magnetischen Moments und des Quadrupolmoments

Die elastische Streuung des Elektrons am Proton wird durch die Rosenbluth-Formel beschrieben

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{4\alpha^2}{q^4} \hbar^2 c^2 \frac{E'^2 \cos^2 \theta/2}{1 + \frac{2E}{M_p c^2} \sin^2 \theta/2} \left(\frac{G_E^2(q^2) + \tau G_M^2(q^2)}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2(q^2) \tan^2 \theta/2 \right) \\ G_E(0) &= 1 \quad G_M(0) = 2.79 \\ \tau &= \frac{q^2}{4M_p c^2} \\ q^2 &= -(p_e - p'_e)^2 \quad \text{Viererimpulsübertrag} \end{aligned}$$

Für das Proton gilt bei großen q^2 : Hauptbeitrag durch 2. Term (Streuung an der Verteilung des magnetischen Moments des Protons). Die gemessenen Formfaktoren können wie folgt parametrisiert werden

$$\begin{aligned} G_E &\approx \left(\frac{1}{1 + \frac{q^2 c^2}{0.71 \text{ GeV}^2}} \right)^2 \\ G_M &\approx \mu_p G_E. \end{aligned}$$

2.1.3 Materieverteilung

Mit Hilfe der verallgemeinerten Rutherford-Streuformel mißt man die Ladungsverteilung. Die **Materieverteilung** kann sich im Prinzip von der Ladungsverteilung unterscheiden. Um die Materieverteilung zu bestimmen, muß man Teilchen verwenden, die nicht mit der Ladung wechselwirken. Hierzu können zum Beispiel schnelle Neutronen mit $\lambda_n \sim R_{Kern}$ verwendet werden. Man findet näherungsweise

$$\rho(r) = \rho_{el}(r) \approx \rho_{Materie}(r).$$

Zur Parametrisierung der Ladungsverteilung verwendet man häufig eine Fermiverteilung (siehe Einführung in die Festkörperphysik und Abb.2.6)

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$

$$a = 0.55 \text{ fm}, \quad \rho(0) = 0.07 \text{ fm}^{-3}, \quad R = (1.18 A^{1/3} - 0.48) \text{ fm}.$$

Zusammengefaßt haben wir gefunden, daß

- Kerne ausgedehnte Systeme sind,
- $\rho_{el} \approx \rho_{Materie}$,
- Dichte der Kernmaterie für alle Kerne etwa gleich ist (Masse $\sim A$, Volumen $\sim (A^{1/3})^3$).

2.2 Bausteine der Atomkerne

Wir haben in Kap.2.1 gesehen, daß Kerne **ausgedehnte Systeme** sind, in Kap.3 wird außerdem gezeigt, daß sie **Anregungszustände** besitzen. In Analogie zur Atomphysik legt dies die Frage nahe, ob **Kerne zusammengesetzte Systeme** sind. Da die Physik in Strukturebenen aufgebaut ist, kann man den Begriff des **Bausteins** nur positivistisch definieren. Bausteine – im hier verwendeten Sinn – eines mikroskopischen Objekts sind diejenigen Teile, die eine konsistente, einfache Beschreibung der Beobachtungstatsachen erlauben.

Molekül	Atom	Kern	Nukleon (Kap.5)
Atome	Kern und Hüllenelektronen	Protonen und Neutronen	Quarks

Welche Bausteine für die jeweilige Beschreibung verwendet werden, ist eine Frage der Zweckmäßigkeit und der Präzision der zu interpretierenden Messung.

2.2.1 Zahl der Bausteine

Die nächste Frage, die man beantworten möchte, zielt darauf ab zu klären, ob die Materie in **diskreten** Klumpen auftritt, oder ob sie ein **kontinuierliches** Medium ist. Eine endliche Zahl der Bausteine spricht für die erste Betrachtungsweise. Einen ersten Hinweis erhält man aus der Chemie:

$$M_{Atom} \approx M_{Kern} \approx A \cdot M_p$$

M_p = Protonmasse; $A = 1$: H -Atom, $A = 4$: He -Atom, $A = 12$: C -Atom, $A = 238$: U -Atom etc.

Weiterhin ist aus der Röntgenspektroskopie und der Rutherford-Streuung bekannt, daß gilt:

$$Kernladung = Ze \quad 2Z \approx A .$$

Diese Beobachtungen führten zu einem ersten – inzwischen überholten – Kernmodell:

„Der Kern besteht aus A Protonen und $A - Z$ Elektronen.“

Dieses Modell beschrieb zum Zeitpunkt seiner Einführung die gesamten Beobachtungen und machte zusätzlich folgende Vorhersagen:

- Elektronen können aus dem Kern austreten (beobachtet wird tatsächlich der β -Zerfall (siehe Kap.3.2). Gemessen wird jedoch ein viel geringerer Impuls der Elektronen als der vom Modell vorhergesagte; denn mit Hilfe der Unschärferelation können wir den Impuls von gebundenen Elektronen im Kern nach unten abschätzen:

$$R_{Kern} \quad |\vec{p}_\beta| \quad |c \approx \hbar c = 200 \text{ MeV fm}$$

$$R_{Kern} \approx 2 \text{ fm} \quad \rightarrow \quad |\vec{p}_\beta| \quad |c \approx 100 \text{ MeV} ,$$

beobachtet wird aber nur $|\vec{p}_\beta| \quad |c \approx 0(1 \text{ MeV})$. Die Tatsache, daß ein Teilchen aus einem System heraustreten kann, ist also noch lange kein Beweis dafür, daß dieses Teilchen als Baustein im System enthalten ist (Photonen im Atom als Analogon!).

- Vorhersagen über Kernspin (Physik IV: Vektormodell): Betrachtet man den Kern ${}^{14}_7N$, so erwartet man modellgemäß 14 Protonen mit Spin $\frac{1}{2}$ und 7 Elektronen mit Spin $\frac{1}{2}$. Nach dem Vektormodell sollte es also einen Gesamtspin von $I_{Kern} = 14 \frac{\hbar}{2} + 7 \frac{\hbar}{2} = 21 \frac{\hbar}{2}, 19 \frac{\hbar}{2}, \dots, \frac{\hbar}{2}$ geben. In Wirklichkeit wird jedoch I_{kern} = ganzzahlig beobachtet (${}^{14}_7N$ – ${}^{14}_7N$ Molekül, siehe Übungsaufgabe).

→ Kern muß aus einer geradzahigen Anzahl Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen bestehen. Und wirklich beobachtete Chadwick 1932 das Neutron ($M_n \approx M_p$, $Z_n = 0$, $Spin \frac{\hbar}{2}$) (Übungsaufgabe).

Nach Heisenberg sind Neutron und Proton verwandte Teilchen (Nukleonen); sie können als Partner eines Dubletts (Isospin-Dublett, siehe Kap.5.3) angesehen werden

$${}^1_7N = 7p + 7n \rightarrow I({}^1_7N) = \text{ganzzahlig.}$$

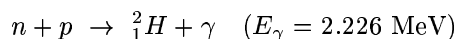
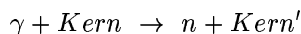
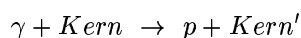
Außerdem gerät das Modell nicht in Widerspruch bei den beobachteten β -Energien (siehe Kap.3.2).

Heutiges Kernmodell:

„Kern mit Massenzahl A besteht aus Z Protonen und $(A - Z)$ Neutronen“

2.2.2 Direkter Nachweis der Bausteine

Der Kernphotoeffekt und seine Umkehrung:



zeigen, daß der Kern aus Nukleonen zusammengesetzt ist. Diese Beobachtungen haben ihre Analogie im Photoeffekt bzw. Elektroneneinfang in der Atomphysik. Man kann auch Elektronen quasielastisch an im Kern gebundenen Protonen streuen. Dabei findet man den gleichen Formfaktor (Ladungsverteilung) wie bei freien Protonen (siehe Abb.2.7).

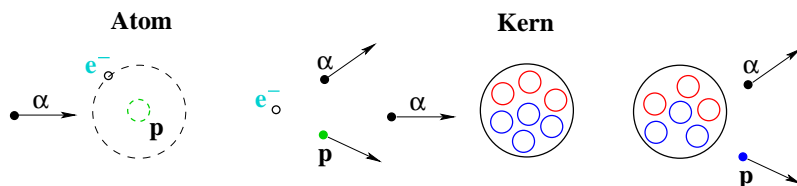


Abbildung 2.7: Für $\lambda \ll R_{\text{Kern}}$: $e + \text{Kern} \rightarrow e + p + \text{Kern}' \Rightarrow$ Man findet für den Formfaktor: $F_p(p, \text{Kern}) \approx F_p(p, \text{frei})$: Proton ist nahezu frei im Kern. Für Atome wies Rutherford [24] bereits darauf hin, daß diese Reaktion zur Überprüfung seines Atommodelles (positiv geladener Kern, negative Hülle) geeignet ist.

2.2.3 Magnetische Kernmomente

Neben dem Drehimpuls ist das magnetische Moment ein wichtiges Charakteristikum des Atomkerns. Da diese Kerngröße in Chemie (Nobelpreis 1991) und Physik wichtige Anwendungen besitzt, soll hier kurz auf sie eingegangen werden.

Aus Physik II und IV wissen wir, daß sich das magnetische Moment eines Kreisstroms schreiben läßt als

$$|\vec{\mu}| = \frac{1}{c} \cdot \text{Strom} \cdot \text{Fläche} = \frac{1}{c} \frac{e\omega}{2\pi} \pi a_B^2.$$

Ferner haben wir die Quantisierungsbedingung

$$m\omega a_B^2 = \frac{\hbar}{2\pi}.$$

Dies führt zu einem magnetischen Moment des Elektrons auf der 1. Bohr'schen Bahn des H-Atoms

$$|\vec{\mu}| = \frac{e}{c} \frac{\pi}{2\pi} \omega a_B^2 = \frac{e}{c} \frac{\hbar}{2m} = \mu_{\text{Bohr}} = 5.79 \cdot 10^{-5} \frac{eV}{T}.$$

In Analogie führt man das **Bohr'sche Kernmagneton** ein:

$$\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p c} = 3.15 \cdot 10^{-8} \frac{eV}{T} .$$

Die Niveaufspaltung im B -Feld ist

$$V_m = -\vec{\mu} \vec{B} .$$

Das mit dem Kernspin verbundene magnetische Moment ist

$$\vec{\mu}_I = g_I \mu_K \frac{\vec{I}}{\hbar} .$$

mit g_I dem **Landé-Faktor** (enthält Kernstruktur \rightarrow Kernwellenfunktion).

Da \vec{I} quantisiert ist, gibt man üblicherweise $\mu = \frac{Max(\mu_z)}{\mu_K}$ oder g_I an. Da wie in der Hülle gilt

$$\hat{I} = \underbrace{\hat{L}}_{\text{Bahndrehimpuls}} + \underbrace{\hat{S}}_{\text{Spin}} ,$$

folgt in Operatorschreibweise

$$\hat{\mu}_I = g_L \mu_K \frac{\hat{L}}{\hbar} + g_S \mu_K \frac{\hat{S}}{\hbar} .$$

Da g_L und g_S nicht quantisiert sind und sich unterscheiden, wird $\hat{\mu}_I$ nicht parallel zu \hat{I} ausgerichtet sein. Die Meßgröße ist also

$$\hat{\mu} = (\hat{\mu}_I \hat{I}) \frac{\hat{I}}{\langle \hat{I}^2 \rangle} .$$

Die nicht beobachtete Komponente senkrecht zu \hat{I} mittelt sich heraus.

Das Experiment ergibt:

Proton	$g_p = g_s = 5.5828$	$g_L = 0$	freie Protonen
Neutron	$g_n = g_s = -3.8261$	$g_L = 0$	

Als Übungsaufgabe berechne man $\hat{\mu}$ für das Proton bzw. für das Neutron mit Bahndrehimpuls \vec{L} und Spin \vec{S} (Schmidt-Linien).

Ein Meßverfahren für das magnetische Moment ist im Anfängerpraktikum (gyromagnetisches Verhältnis V 505) zu finden. Man mißt dort das Magnetfeld, das den Spin-UP-/Spin-DOWN-Zustand eines Elektrons so aufspaltet, daß Photonen einer definierten Energie resonant absorbiert werden. Aus dem Magnetfeld und der Niveaufspaltung läßt sich das magnetische Moment des Elektrons berechnen. Analog kann man bei den Kernmomenten verfahren (siehe auch Experiment „optisches Pumpen“ im Fortgeschrittenenpraktikum).

Meßbar sind bei Kenntnis der magnetischen Kernmomente:

- magnetische Kernmomente,
- innere Magnetfelder in Festkörpern,
- Relaxationsvorgänge (Fortgeschrittenenpraktikum),
- Dichte von Kernen mit bestimmten Eigenschaften (NMR-Tomographie),
- Diffusion in Festkörpern (Fortgeschrittenenpraktikum V.49).

2.3 Kernmassen, Bindungsenergien und Tröpfchenmodell

Wir hatten in den Kapiteln 2.1 und 2.2 schon gesehen, daß

- Kerne ausgedehnt sind,
- Kerne aus Nukleonen zusammengesetzt sind.

Die nächste wichtige Frage, die auftaucht, lautet dann natürlich: welche Kräfte halten die Kerne zusammen und welche Eigenschaften besitzen diese Kräfte. Wie in der Atomphysik ist die Bindungsenergie (entspricht der Ionisationsenergie) eine wichtige Größe. Wichtige Details über die Kräfte leitet man außerdem aus dem Studium der gebundenen Zustände (siehe Kap.3) und aus Streuexperimenten ab.

2.3.1 Massenspektrograph und Massenspektrometer

Als erstes wollen wir die Frage beantworten, wie man experimentell die Kernmasse bestimmt. Die Bindungsenergie E_B kann aus ihr dann mit Hilfe der Einsteinschen Formel berechnet werden:

$$E_B = Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2 - M_K c^2$$

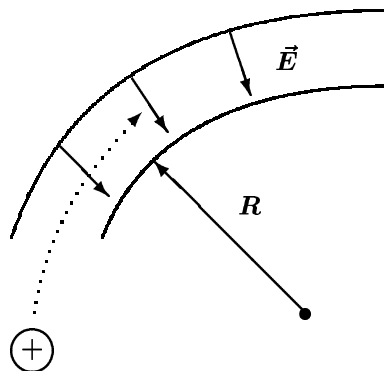
$A - Z = N = \text{Zahl der Neutronen im Kern.}$

Hierzu verwendet man den Massenspektrographen. Im Prinzip besteht ein Massenspektrograph aus einer Ionenquelle, einem Energiefilter und einem Nachweisgerät. Dabei sind zwei Meßapparaturen zu unterscheiden:

Massenspektrometer: Alle Massen werden als Linien in der Fokalebene nachgewiesen, (Photoplatte als Nachweisgerät) (Abb.2.8).

Massenspektrograph: Eine Kernart (Masse) wird nachgewiesen

Der Energiefilter besteht z.B. aus einem transversalen elektrischen Feld, in dem geladene Teilchen abgelenkt werden. Aus Kenntnis des E -Feldes und des Bahnkrümmungsradius kann die kinetische Energie bestimmt werden. Ablenkung in einem elektrischen Zylinderkondensator:



$$\frac{M_K v^2}{R_{el}} = Z e |\vec{E}| .$$

Impulsfilter arbeiten ähnlich, jedoch mit einem magnetischen anstatt eines elektrischen Feldes, welches jedoch senkrecht zur Bahnkurve ausgerichtet ist

$$\frac{M_K v^2}{R_{mag}} = Z e v |\vec{B}| \rightarrow M_K v = Z e R_{mag} |\vec{B}| .$$

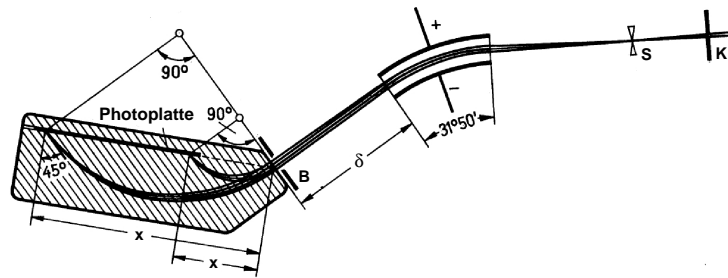


Abbildung 2.8: Schema eines Massenspektrometers

Daraus kann nun ein Filter für eine bestimmte Masse (pro Ladung) gebaut werden

$$\frac{M_K}{Ze} = \frac{\vec{B}^2 R_{mag}^2}{|\vec{E}| R_{el}}$$

Systematische Untersuchungen ergaben folgende Resultate:

- **Isotope:** Man beobachtet zu gleichem Z Kerne unterschiedlicher Masse (Massenzahl A), z.B. $^{12}_6C$ und $^{14}_6C$. Allgemein A_ZK
- **Isobare:** Kerne mit gleichem A aber unterschiedlichem Z werden beobachtet, z.B. 3_1H , 3_2He oder $^{54}_{27}Co$, $^{54}_{26}Fe$
- **Isotone:** Kerne mit gleicher Neutronenzahl N , aber unterschiedlichem A werden nachgewiesen, z.B. $^{12}_6C$, $^{13}_7N$

Üblicherweise hat bei fester Massenzahl A ein Kern (dieser habe die Kernladung Z_{Min}) die minimale Masse. Kerne mit $Z \neq Z_{Min}$ zeigen dann radioaktive Zerfälle (siehe Kap.3.2). Die Details kann man der **Isotopentafel** entnehmen.

Massen werden als Vielfache der Masse des $^{12}_6C$ -Atoms angegeben, da Kohlenstoff in der organischen Chemie die entscheidende Rolle spielt:

$$1u = \frac{1}{12} M(^{12}_6C - Atom)$$

$$M(H - Atom) = m_e + M_p - 13.6 \frac{eV}{c^2} = (1.007276 + 0.000548) u$$

$$M(He - Atom) = 4.002600 u.$$

Tabellen: Handbook of Chemistry and Physics

Daß das H-Atom schwerer ist als $\frac{1}{12}$ eines $^{12}_6C$ -Atoms spiegelt die Tatsache wider, daß die Kerne **gebundene Systeme** von Nukleonen sind. Der Bindungsenergie E_B entspricht wegen

$$|E_B| = M c^2$$

ein Massendefizit (Massendefekt).

Empirisch gilt näherungsweise $M_K = AM_p$. Genauer erwartet man für ein aus Protonen und Neutronen zusammengesetztes System

$$M_K = ZM_p + (A - Z)M_n - \frac{E_B}{c^2}$$

$$E_B = -\Delta E = -(M_K - ZM_p - (A - Z)M_n) c^2.$$

Weiter gilt näherungsweise

$$\frac{E_B}{A} = \frac{\text{Bindungsenergie}}{\text{Nukleon}} \approx 8 \text{ MeV} \approx \text{const.}$$

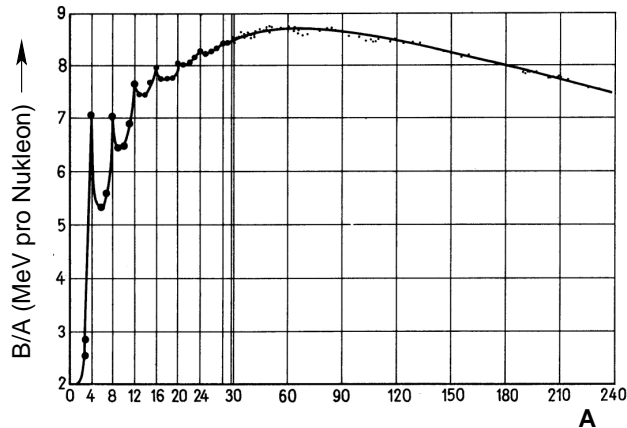


Abbildung 2.9: Bindungsenergie pro Nukleon als Funktion der Massenzahl A . Das Auftreten der scharfen Maxima wird in Kap.3.3 erklärt [2].

Präziser beobachtet man den in Abb.2.9 wiedergegebenen Verlauf.
Folgerungen:

- Fusion zweier leichter Kerne bedeutet einen Energiegewinn (Sonne),
- Spaltung eines schweren Kerns in zwei leichte Kerne bedeutet einen Energiegewinn (Kernreaktor),
- die Welt bestand ursprünglich aus Neutronen und Protonen (Kap.7.4), die in Sternen bis zu Eisen fusionieren, die schwereren Kerne werden in einer Supernova durch n -Einfang erzeugt (siehe Kap.4.3).

Wenn jedes Nukleon mit jedem anderen in Wechselwirkung treten würde und alle Kräfte gleich groß wären, dann würde gelten:

$$E_B \sim \frac{1}{2} A(A-1) .$$

Man beobachtet jedoch

$$E_B \sim A ,$$

also existiert eine **Sättigung** der Kernkräfte analog zur homöopolaren Bindung in der Atomphysik. Man führt rein phänomenologisch den Sättigungscharakter der Kernkräfte auf **Austauschkräfte** zurück analog zur Behandlung eines Wassertropfens. Erinnerung sei daran, daß bei der Gravitation gilt

$$E_B \sim M^2 ,$$

sie besitzt also keinen Sättigungscharakter.

Anwendungen der Massenspektroskopie: Messung des Verhältnisses von ^{18}O und ^{16}O in Eiskernen des Grönlandeises. Dieses Verhältnis ist ein Maß für die Temperatur auf der Erde z.Zt. der Bildung dieses Eises (Paläoklimatologie). Zahlreiche weitere Anwendungsbeispiele findet man in [25].

2.3.2 Tröpfchenmodell und Bethe-Weizsäcker-Formel

Wir gehen von drei grundlegenden Beobachtungen aus (siehe Kapitel 2.1 und 2.2):

- $E_B/A \approx \text{const.}$,
- $V_{\text{Kern}} \sim A$,
- $M_K \sim A$,
- $\Rightarrow \rho_K(r) \approx \text{const.}$

Ein Analogon ist der Wassertropfen:

- $\rho(r) = \text{const.}$,
- Verdampfungswärme unabhängig von M ($R \rightarrow \infty$!),
- Sättigung der Kräfte zwischen Molekülen (im Gegensatz zur Gravitation).

Annahme für Kernkräfte im Tröpfchenmodell sind:

- die Kräfte zeigen Sättigungscharakter,
- $\rho(r) = \text{const.} \rightarrow$ Abstoßung bei kleinen Abständen.

Hierzu ein Kommentar Ehrenfests in einem Brief an Pauli (Pauli–Briefwechsel Bd.II, Brief 271 von Ehrenfest): „*Warum ist ein Kristall dick? Weil die Atome dick sind. Warum sind sie dick? Weil nicht alle Elektronen auf eine Schale fallen. Warum tun sie es nicht? Wegen der elektrostatischen Abstoßung der e^- gegeneinander? nein! denn dann würden sie sich um hoch geladene Kerne doch noch viel dichter stauen als sie es tun! Nein, sie tun es nicht aus Angst vor Pauli! Und so können wir sagen: Pauli selbst ist so dick, weil das Pauliverbot gilt! Das wunderbare, unbegriffene.*“

Wir machen daher für die Bindungsenergie den Ansatz

$$\begin{aligned} E_B &= E_B^V + E_B^O + E_B^C + E_B^S + E_B^P \\ &= a_V A - \tilde{a}_O R_K^2 - \tilde{a}_C \frac{Z(Z-1)}{R_K} - a_S \frac{(N-Z)^2}{A} \pm \frac{a_P}{A^{3/4}} \\ &\approx a_V A - a_O A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_S \frac{(N-Z)^2}{A} \pm \frac{a_P}{A^{3/4}} \end{aligned}$$

Mit $E_B^P = \begin{cases} a_P A^{-3/4} & \text{bei } gg\text{-Kernen } (Z, N \text{ gerade}) \\ 0 & \text{bei } ug\text{-, } gu\text{-Kernen} \\ -a_P A^{-3/4} & \text{bei } uu\text{-Kernen } (Z, N \text{ ungerade}) \end{cases}$

Plausibilitätsbetrachtung:

$E_B^O < 0$: Kerne an der Oberfläche haben weniger Bindungspartner.

$E_B^C < 0$: Protonen stoßen sich ab.

Das Ergebnis wird zusammengefaßt in der **Bethe–Weizsäcker–Formel**:

$$E_B = a_V A - a_O A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_S \frac{(N-Z)^2}{A} \pm \frac{a_P}{A^{3/4}}$$

Diese Formel reproduziert in guter Näherung die gemessenen Massen von etwa 1000 Kernen, wobei die Konstanten durch eine **Anpassung an die Meßwerte** gewonnen wurden. Dieses Verfahren ist nicht ungewöhnlich; es sei daran erinnert, daß zum Beispiel in der Schrödinger–Gleichung des H -Atoms m_e und e aus dem Experiment ermittelt werden und nicht aus der Theorie folgen. Zahlenwerte für die Konstanten sind

a_V	=	15.85 MeV	Volumenanteil
a_O	=	18.34 MeV	Oberflächenanteil
a_C	=	0.714 MeV	Coulomb–Anteil
a_S	=	9.286 MeV	Symmetrieanteil
a_P	=	11.45 MeV	Paarungsenergie

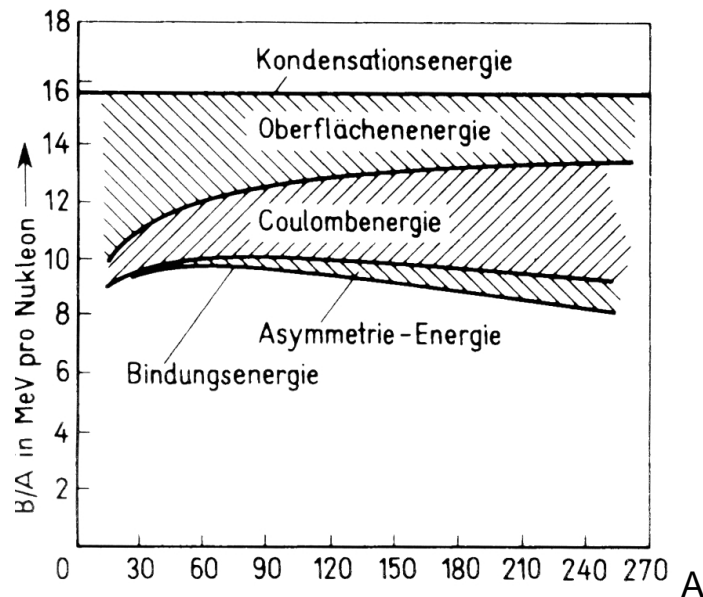
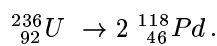


Abbildung 2.10: Beiträge zur Bindungsenergie pro Nukleon der Einzelterme der Bethe-Weizsäcker-Formel. Die hier angegebenen Werte sind nur der Größenordnung nach richtig, präzise Werte zeigt Abb.2.9 [2].

In verschiedenen Bereichen von A ist der Einfluß der verschiedenen Terme unterschiedlich bedeutsam (siehe Abb.2.10). Abb.2.10 zeigt, daß die bei der Kernspaltung freigesetzte Energie im wesentlichen auf den Unterschied der Coulomb-Energie von schweren und mittelschweren Kernen zurückzuführen ist.

Aus Abb.2.9 folgt, daß die maximale Bindungsenergie bei $A \approx 60$ vorliegt. Bei großem A wächst die Coulomb-Abstoßung stark an, bei kleinerem A ändert sich das Verhältnis Oberfläche/Volumen stark, und die Oberflächenenergie trägt stark bei.

Bei der Spaltung von Uran (mehr in Kap.4.2) wird nach Abb.2.10 ungefähr 1 MeV pro Nukleon(!) frei.



$$\begin{array}{rcl} 2 \cdot E_B(\text{Pd}) & \approx & 2 \cdot 118 \cdot 8.55 \text{ MeV} = 2018 \text{ MeV} \\ E_B(\text{U}) & \approx & 236 \cdot 7.6 \text{ MeV} = 1794 \text{ MeV} \\ \hline \text{Freiwerdende Energie:} & & = 224 \text{ MeV} \end{array}$$

Dieser Wert ist mit der Energie von ~ 10 eV zu vergleichen, der bei der Umwandlung eines C-Atoms in CO_2 frei wird.