

Name:

Gruppe:

## Aufgabenblatt 7 - Physik 5 - WS 2011/2011

Abgabetermin: 1./2. Dezember 2011 in den Übungen

### Aufgabe 7.1: Weizsäcker-Massenformel (30 Punkte)

In der Weizsäcker-Massenformel ist die Masse eines Kerns (ohne Hülle) mit Ladungszahl  $Z$  und Massenzahl  $A$  gegeben durch

$$\begin{aligned} M(A, Z) &= Zm_p + (A - Z)m_n - E_B(A, Z) \\ &= Zm_p + (A - Z)m_n - \left[ a_V A + (-a_S A^{\frac{2}{3}}) + (-a_C Z^2 A^{-\frac{1}{3}}) + \left(-a_A \frac{(Z - A/2)^2}{A}\right) + A^{-\frac{1}{2}} \cdot \delta \right] \end{aligned}$$

mit den Konstanten  $a_V = 15.67 \text{ MeV}/c^2$ ,  $a_S = 17.23 \text{ MeV}/c^2$ ,  $a_C = 0.714 \text{ MeV}/c^2$ ,  $a_A = 93.15 \text{ MeV}/c^2$ .  $\delta = 11.2 \text{ MeV}/c^2$  für  $gg$ -Kerne,  $\delta = -11.2 \text{ MeV}/c^2$  für  $uu$ -Kerne und  $\delta = 0$  sonst.

- Benennen Sie die Summanden der Bindungsenergie  $E_B(A, Z)$  und beschreiben Sie kurz ihren Ursprung im Tröpfchenmodell von Weizsäcker.
- Zeigen Sie, dass für Kerne der gleichen Massenzahl  $A$  der stabilste Kern näherungsweise durch  $Z_{\text{stabil}} = A/(1.972 + 0.0152A^{\frac{2}{3}})$  gegeben ist. Untersuchen Sie hierzu  $\left. \frac{\partial M(A, Z)}{\partial Z} \right|_{A=\text{const}}$ .
- Geben Sie die Ladungszahlen  $Z$  der stabilsten Isobare für Kerne der Massenzahlen  $A = 23$  und  $A = 26$  an.
- Skizzieren Sie qualitativ  $E_B(A, Z)$  für  $A = 23$  und  $A = 26$  in der Nähe des stabilen Kerns. Welche Zerfallsarten sind für diese Isobare möglich?

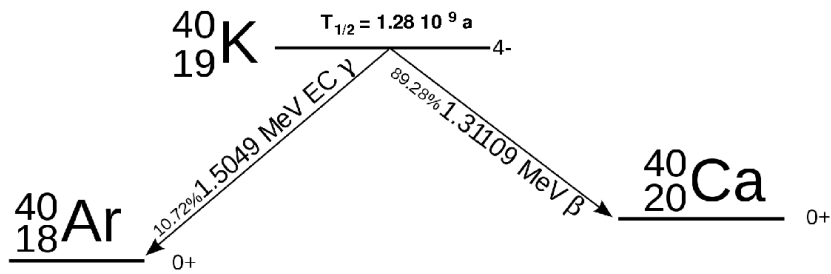
### Aufgabe 7.2: Nukleoneneinfang (20 Punkte)

- Welche minimale (Proton) Energie ist für eine Protoneinfangreaktion in einen Kern  $(Z, N)$  erforderlich, um die Coulombbarriere zu überwinden?
- Gibt es einen ähnlichen Effekt für den Neutroneneinfang? Welche Energie wird typisch beim Einfang frei?

### Aufgabe 7.3: Altersbestimmung (20 Punkte)

Radioaktive Zerfälle werden zur Altersbestimmung von Proben wie Meteoriten oder organischen Materialien benutzt. Eine ist die  $^{40}\text{K}$ - $^{40}\text{Ar}$  Methode, die am MPI für Kernphysik entwickelt wurde. Das Zerfallsschema ist im Bild angegeben.

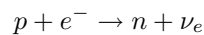
$^{40}\text{K}$  zerfällt mit einer Halbwertszeit  $T_{1/2} = \tau \cdot \ln 2 = 1.28 \cdot 10^9 \text{ a}$  ( $\tau$  ist Lebensdauer). In 11% der Fälle ist das Produkt  $^{40}\text{Ar}$  und ein  $\gamma$  wird ausgesendet. Letzteres stellt übrigens eine Hauptquelle für die natürliche Strahlenbelastung dar. Beim Erstarren eines Gesteins ist ursprünglich kein Argon enthalten.  $^{40}\text{Ar}$  reichert sich durch  $^{40}\text{K}$  Zerfall an und kann nicht entweichen.



- Leiten Sie gemäß obiger Annahme die Formel für das Alter einer Probe her, wenn das Verhältnis von  ${}^{40}\text{K}$  zu  ${}^{40}\text{Ar}$  gemessen wird.
- Für eine Probe wird die Intensität der Gammalinie im Zerfall  ${}^{40}\text{K} \rightarrow {}^{40}\text{Ar}$  mit 100 Bq gemessen und beim Erhitzen treten 0,5 ml Argon aus. Wie alt ist die Probe?
- Erklären Sie die C-14 Methode für die Altersbestimmung von organischen Proben.

#### Aufgabe 7.4: Neutronenstern (30 Punkte)

Bei einer Supernova kollabiert der Kern eines Sterns und komprimiert bzw. erhitzt den inneren Kern. Die Elektronenergie steigt, so dass die Reaktion



einsetzt. Letztlich entsteht ein "Neutronenstern".

Für unsere Rechnungen nehmen wir an, dass alle Materie in Form von Neutronen mit gleicher Dichte vorliegt, d.h. es ist ein riesiger "Kern" bestehend nur aus Neutronen. Da Neutronen Fermionen sind, können diese nicht beliebig komprimiert werden. Der "Druck" des Fermigases wirkt dem Gravitationsdruck entgegen.

In dieser Aufgabe sollen mit stark vereinfachten Annahmen die Drücke ausgerechnet werden und aus der Gleichgewichtsbedingung der Radius des Neutronensterns abgeschätzt werden. Die Druckberechnung erfolgt mittels der Gleichung

$$p = - \frac{\partial U}{\partial V}_{N=\text{const}}$$

wobei  $U$  die innere Energie ist und  $V$  das Volumen.  $N$  ist die Anzahl an Neutronen.

- Gravitationsdruck: Zeigen Sie, dass die Gravitationsenergie einer Kugel mit homogener Massenverteilung

$$U_{\text{grav}} = -\frac{3}{5} G \frac{M^2}{R}$$

ist. Hier ist  $G = 6.7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \text{kg}}$  die Gravitationskonstante,  $M$  die Gesamtmasse des Sterns und  $R$  der Radius. (Hinweis: Integrieren Sie über den Radius  $r$  die potentielle Energie auf. Nur die Masse innerhalb von  $r$  übt eine Anziehung aus auf die Masse im Volumenelement  $r^2 dr d\Omega$ .) Zeigen Sie, dass der Gravitationsdruck

$$p_{\text{grav}} = -\frac{3}{20\pi} \frac{G M^2}{R^4}$$

ist.

b) Fermidruck: Ausgehend von der Besetzungsdichte für nicht-relativistische Neutronen

$$dn = 2 \cdot \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi V p^2 dp = \frac{V p^2}{\pi^2 \hbar^3} dp$$

(für einen Impuls  $p < p_F$  und  $dn = 0$  für  $p > p_F$ ) bestimmen Sie die Beziehung zwischen der Gesamtzahl an Neutronen  $N$  und der Fermienergie  $E_F$ .<sup>1</sup> Zeigen Sie, dass

$$E_F = \left( \frac{3\pi^2 \hbar^3 N}{V} \right)^{2/3} \frac{1}{2m}.$$

Berechnen Sie die Gesamtenergie

$$U_{\text{fermi}} = \int \frac{p^2}{2m} dn$$

$m$  ist hier die Neutronenmasse.

Zeigen Sie schließlich, dass der Fermidruck

$$p_{\text{fermi}} = \frac{3}{20\pi m} \left( \frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \hbar^2 N^{5/3} R^{-5}$$

ist.

c) Setzen Sie die Drücke gleich und errechnen Sie für einen Stern mit Sonnenmasse  $M = 2 \cdot 10^{30}$  kg den Radius.

---

<sup>1</sup>Der Faktor 2 in  $dn$  stammt von den 2 Spinzuständen pro Energieniveau.