RUPRECHT-KARLS-
UNIVERSITÄT
HEIDELBERG

# Physikalisches Praktikum PAP 1

## für Physiker (B.Sc.) September 2010

## (Kurze) Einführung in die Grundlagen der Fehlerrechnung

## oder besser:

## Bestimmung von Messunsicherheiten

"Step inside, ladies & gentlemen,"
said the museum attendant,
"and see the dinosaurian skeleton
which is 200.000.001 years old."

How are you so certain of its age?"
asked a visitor.
"Well," he replied, "last year when I started
this job it was 200.000.000 years old."

Citation from H. Hayden,
Lab physics for the life sciences, Philadelphia.

Uwe Schimpf, Institut für Umweltphysik uwe.schimpf@iup.uni-heidelberg.de

# Gliederung

- ► Angabe von Messergebnissen
- ► Ursache und Arten von Messunsicherheiten
- ► Berechnung von zufälligen Messunsicherheiten
- ► Gaussverteilung & Fehlerfortpflanzung
- ► Graphische Darstellung
- ► Lineare Regression

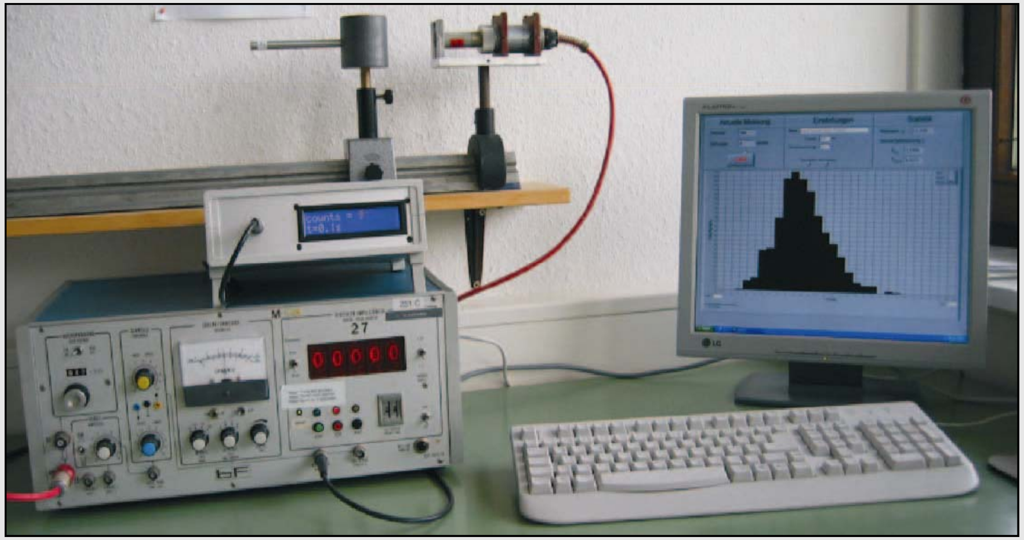
[experimentelle Demonstration]

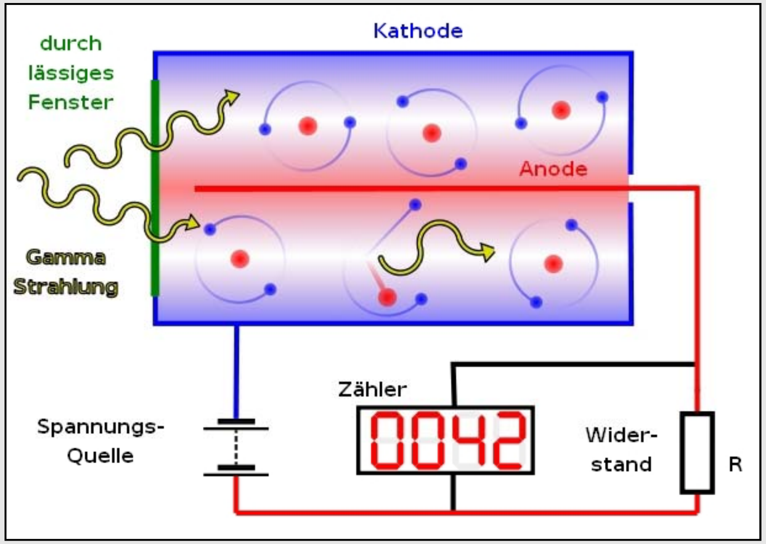
[Lösungen zu den Arbeitsblättern]

[zusätzliches Material]

# Experimentelle Demonstration

**Versuch 251 „Statistik“**: Radioaktiver Zerfall von Kobalt 60 (Halbwertszeit 5.26 a)






Betrachte ein einzelnes Atom:

Ist eine Vorhersage möglich wann dieses Atom zerfallen wird ?

Nein, aber:

Der Zerfall radioaktiver Atome gehorcht den Gesetzen der Statistik!

Auch wenn das Schicksal jedes einzelnen Atoms nicht vorhersehbar ist, sind genaue Vorhersagen wie sich Kollektive aus vielen Atomen verhalten werden möglich, z.B.:
Nach einer ganz bestimmten Zeit (Halbwertszeit), ist stets die Hälfte aller zunächst vorhandenen Atome zerfallen.

# Fehlerangabe

Warum ist die Aussage:

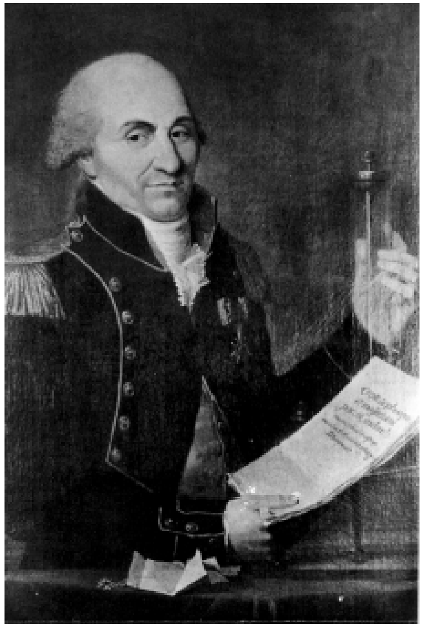
"Ich habe die Elementarladung gemessen,

sie beträgt 1,602 × $10^{-19}$ Coulomb"

falsch ?

Jede Messung ist mit einem Messfehler behaftet.

Es gibt keine Messung die unendlich genau ist!



Charles Augustin de Coulomb
(1736–1806)

Zwei unabhängige Messungen ergeben ungleiche Resultate:

Nur wenn man die jeweiligen Messfehler angibt, kann man diskutieren, ob die beiden Messungen - *innerhalb der Fehlergrenzen* - in Übereinstimmung sind oder nicht !

# Fehlerangabe

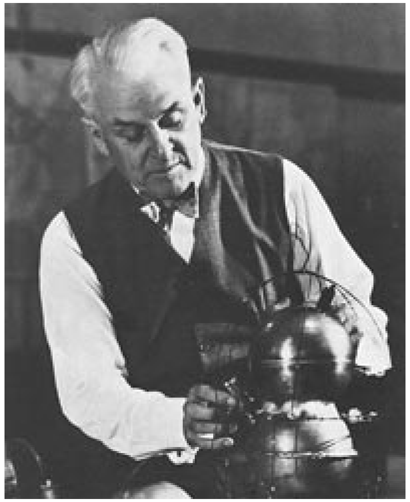
**Um ein theoretisches Modell experimentell durch eine Messung zu überprüfen, muss die Qualität und die Aussagekraft der Messung bekannt sein.**

Beispiel:

Die Bestimmung der Elementarladung ergab folgende Ergebnisse:

Messung 1: $e = (1{,}7 \pm 0{,}1) \times 10^{-19}$ C

Messung 2: $e = (1{,}62 \pm 0{,}01) \times 10^{-19}$ C



Robert Andrews Millikan (1868–1953)

**Welche Aussage kann über die beiden Messungen getroffen werden?**

Messung 1 ist konsistent mit dem Literaturwert

Messung 2 ist zwar präziser, stimmt aber innerhalb der Fehlergrenzen nicht mit dem Literaturwert überein!

**Wir wollen realistische Fehler im Praktikum !**

# Angabe einer Messgröße

**Ziel einer Messung:**
bestimme einen Schätzwert $x_B$ für die betreffenden Messgröße $x$, der zusammen mit der Messunsicherheit $\Delta x$ zur Kennzeichnung eines Wertebereichs für den wahren Wert der Messgröße dient.

- ▶ Beste Schätzung des „wahren“ Wertes $x_B$
- ▶ Messunsicherheit $\Delta x$ („Fehler“)
- ▶ Physikalische Einheit

**Angabe des absoluten Fehlers**

$$x = x_B \pm \Delta x$$

$e = (1{,}62 \pm 0{,}03) \times 10^{-19}$ C

**Angabe des Relativfehlers**

$$x = x_B \pm (\Delta x / x_B) \times 100$$

$e = 1{,}62 \times 10^{-19}$ C $\pm$ 1,9 %

zugehörige physikalische Einheit

gleiche Zehnerpotenzen für Messwert und Messunsicherheit

sinnvolle Zahl der angegebenen Stellen (eine, max. zwei signifikante Stellen)

# Messunsicherheiten

**Grobe Fehler**

z.B. verursacht durch:

defekter Messgeräte

falsches Ablesen von Skalen

Irrtum bei der
Protokollierung
oder Auswertung

etc.

**Grobe Fehler können durch sorgfältiges Experimentieren ausgeschlossen werden und sollten im Praktikum nicht auftreten !**

# Messunsicherheiten

**Systematische Fehler**

führen zu einseitigen Abweichungen vom „wahren Wert“.
Der Messwert ist entweder immer größer oder immer kleiner als der „wahre Wert“.

**Ursachen?**

Unvollkommenheit der Messgeräte

► Eich- und Justierfehler, Nichtlinearität, Reibung, ....
teilweise bekannt (Herstellerangaben: Genauigkeitsklassen)

Rückwirkung des Messgerätes (Prozesses) auf die Messgröße

► Innenwiderstand, Verformung, Erhitzung

Umwelteinflüsse

► Auftrieb, elektromagnetische Felder, Temperatur, Luftfeuchtigkeit, ...

**Systematische Abweichungen sind:**

► prinzipiell erfassbar
► oft aber schwer zu erkennen
► reproduzierbar und somit zumindest teilweise korrigierbar

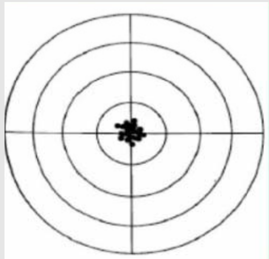
# Messunsicherheiten

## Zufällige oder Statistische Fehler

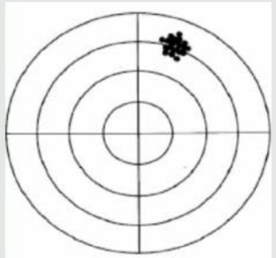
- ► Wiederholung von Messungen (unter gleichen Bedingungen): einzelne Messwerte werden sich voneinander unterscheiden.
- ► Statistische Fehler streuen „links“ und „rechts“ um den wahren Wert (in vielen Fällen sogar symmetrisch um den wahren Wert).
- ► Zufällige Abweichungen sind unvermeidlich und nicht exakt erfassbar.
- ► sind statistischer Analyse zugänglich:
  Die Größe zufälliger Messabweichungen kann mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitsaussagen bestimmt werden.

Durch Mehrfachmessungen können statistische Fehler prinzipiell beliebig klein gehalten werden !

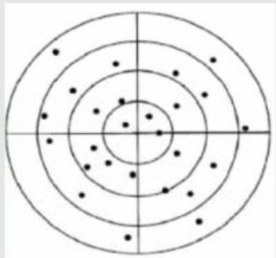
**Beispiel syst. und stat. Fehler:**
**Position eines Sterns**



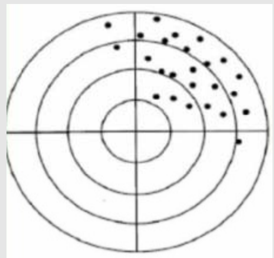
Stat. Fehler: klein
Syst. Fehler: klein



Stat. Fehler: klein
Syst. Fehler: groß



Stat. Fehler: groß
Syst. Fehler: klein



Stat. Fehler: groß
Syst. Fehler: groß

# Messunsicherheiten

**Beispiele für zufällige Messabweichungen:**

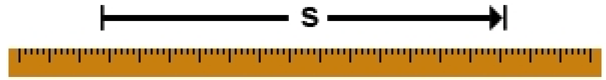
- Abweichungen beim Ablesen (Parallaxe)
- Reaktionsvermögen (z.B. bei Zeitmessung)
- Unsicherheit der Skaleninterpolation
- variable Umgebungsbedingungen (Druck, Temperatur, ...)
- statistischer Charakter der Messgröße (Rauschen, Radioaktivität,...)


Experiment zur Bestimmung des Schwerpunktes von Bierdosen
(Experimental Physik I, WS 2007/08)

# Fehlerbestimmung

**Beispiel: Streckenmessung**

Lineal




Auflösung: 1 mm

Schieblehre

Auflösung: 0,05 mm

Mikrometerschraube

Auflösung: 0,01 - 0,001 mm

**Messunsicherheit?**

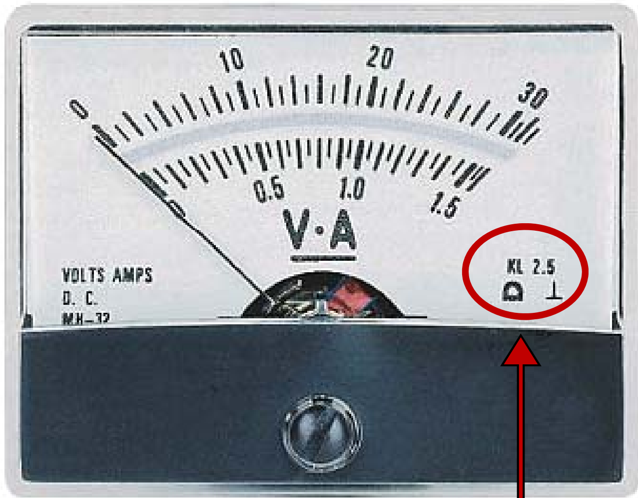
Falls keine Messgenauigkeiten angegeben sind, kann der Fehler aus der Skalenteilung abgeschätzt werden.

Messunsicherheit: 30% – 50% der Skalenteilung

# Fehlerbestimmung

An vielen Analogmessinstrumenten ist eine Genauigkeitsklasse angegeben.

Genauigkeitsangabe: Max. Unsicherheit in % des Skalenendwertes





Genauigkeitsklasse

Bei Skaleneinteilungen ist die absolute Genauigkeit in der Regel etwas besser als die Ablesegenauigkeit

# Fehlerbestimmung

**Im Praktikum: Genauigkeitsangabe der Bedienungsanleitung entnehmen !**


**7. Elektrische Angaben**

Bemerkung: Die Messgenauigkeit wird angegeben als Summe aus
- einem relativen Anteil des Messwertes und
- einer Anzahl von Digit (d.h. Zahlenschritte der letzten Stelle).

Diese Messgenauigkeit gilt bei Temperaturen von 18 °C bis 28 °C und einer relativen Luftfeuchtigkeit kleiner 80 %.

**7.1 Gleichspannungsbereiche**

Der Eingangswiderstand beträgt 10 MΩ (im 400 mV-Bereich 1 GΩ).

| Messbereich | Auflösung | Messgenauigkeit | Überlastschutz |
|---|---|---|---|
| 600 mV | 100 μV | ± (0,5 % des Messwertes + 2 Digit) | 1000 $V_{DC}$ |
| 6 V | 1 mV | ± (0,5 % des Messwertes + 2 Digit) | 1000 $V_{DC}$ |
| 60 V | 10 mV | ± (0,5 % des Messwertes + 2 Digit) | 1000 $V_{DC}$ |
| 600 V | 100 mV | ± (0,5 % des Messwertes + 2 Digit) | 1000 $V_{DC}$ |
| 1000 V | 1 V | ± (0,5 % des Messwertes + 2 Digit) | 1000 $V_{DC}$ |

**7.2 Wechselspannungsbereiche**

Der Eingangswiderstand beträgt 10 MΩ parallel 100 pF.

| Messbereich | Auflösung | Messgenauigkeit [1] im Frequenzbereich 50 Hz - 500 Hz | Überlastschutz |
|---|---|---|---|
| 600 mV | 100 μV | ± (0,9 % des Messwertes + 5 Digit) [2] | 750 $V_{eff}$ |
| 6 V | 1 mV | ± (0,9 % des Messwertes + 5 Digit) [2] | 750 $V_{eff}$ |

Beispiel:

Es wurde eine Wechselspannung von 4,736 V gemessen

Fehler: 0,9% von 4,736 = 0,043 V, 5 Digit = 5 mV

→ Messunsicherheit: 0,048 V   Ergebnis U = (4,74 ± 0,05) V

# Fehlerbestimmung

Beispiel:
Zeitmessung mit Handstoppuhr

Auflösung: 1/100 s

Messunsicherheit ?


zusätzlicher Fehler durch das endliche Reaktionsvermögen des Experimentators, Reaktionszeit ~ 0,2 s – 0,3 s
(Bei Differenzmessungen kleiner!)

# Statistische Fehler

Um statistische Fehler zu bestimmen müssen mehrere Messungen unter gleichen Versuchsbedingungen durchgeführt werden: ► Stichprobe von N Messungen

Vorgabe:

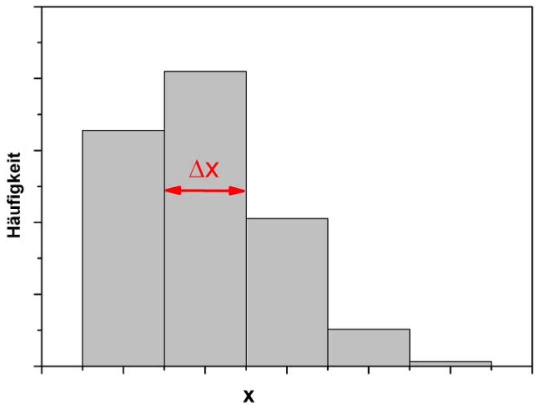
► Unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen

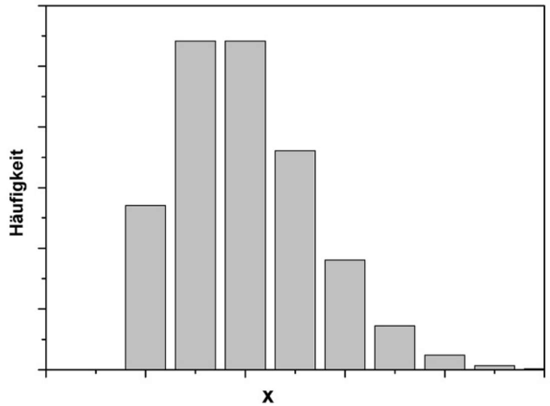
Gesucht:

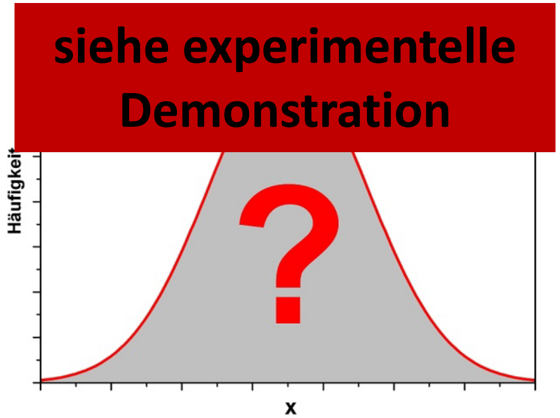
► Beste Schätzung des wahren Wertes $x_w$

► Aussagen über Genauigkeit der Messung

Graphische Darstellung als Histogramm: Häufigkeit der Ereignisse in einem Intervall $[x_i\,, x_i+\Delta x]$




**Der Zufall zeigt Gesetzmäßigkeiten – der zentrale Grenzwertsatz:**

**Die Summe der n unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen ist im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ normalverteilt („Gauß" verteilt).**

# Gaußverteilung

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left( -\frac{(\mu - x)^2}{2\sigma^2} \right)$$

P(x) heißt Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz $\sigma^2$


Johann Carl Friedrich Gauß (1777–1855)

Normierung: $$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)\,dx = 1$$

Erwartungswert: $$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot P(x)\,dx$$

Varianz: $$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot P(x)\,dx$$

Interpretation:

- ► Wahrscheinlichster Wert μ ist die beste Schätzung des „wahren Wertes“
- ► Breite σ der Verteilung ist ein Maß für die Messgenauigkeit !

# Gaußverteilung: σ-Abweichung

Aufgabe 4 (AB Fehlerrechnung)

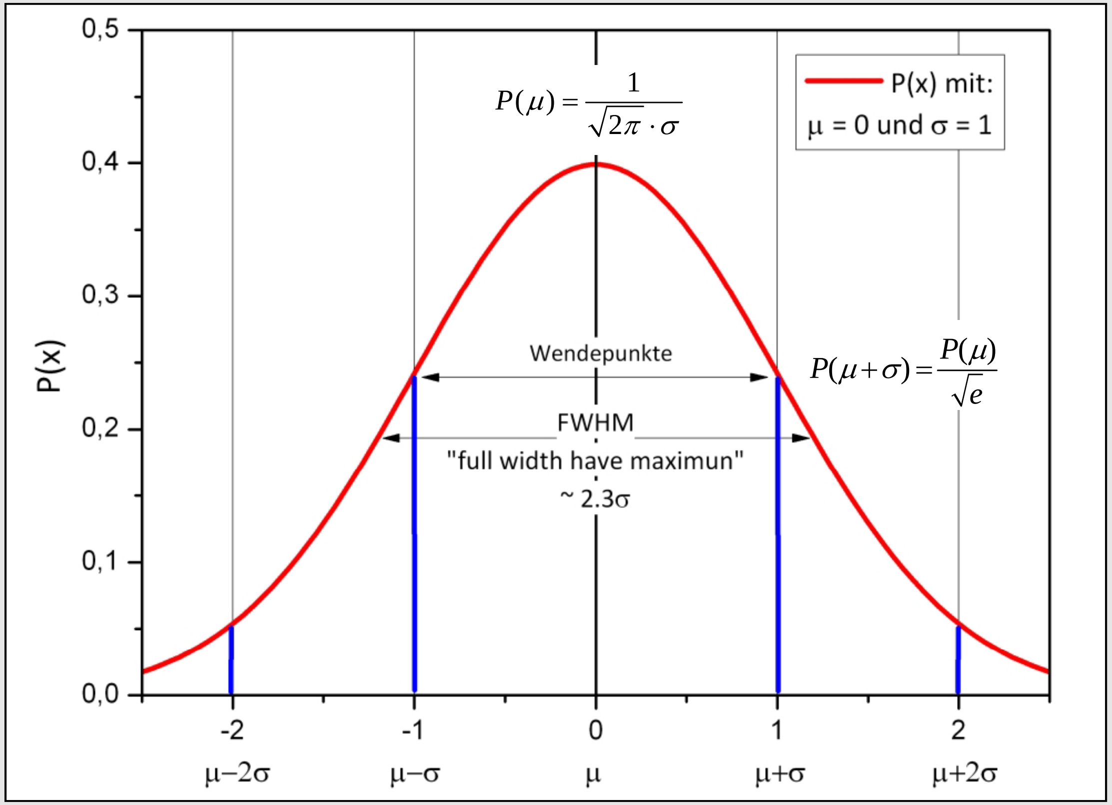
Interpretation des Ergebnisses

$x = \mu \pm \sigma$ bzw. $x = \overline{x} \pm \Delta x$

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} P(x)\,dx = 0{,}683$$

$$\int_{-2\sigma}^{2\sigma} P(x)\,dx = 0{,}955$$

$$\int_{-3\sigma}^{3\sigma} P(x)\,dx = 0{,}997$$




Als beste Schätzung für den „wahren Wert“ wurde bei einer Messung der Wert $\overline{x}$ bestimmt. Der wahre Wert liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3% im Intervall $[\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma]$ (1σ-Umgebung).

# Schätzwerte aus endlicher Stichprobe

Schätzwert für den Erwartungswert μ $(\overline{x} \to \mu \text{ für } n \to \infty)$

Der arithmetische Mittelwert ist die beste Schätzung des wahren Wertes

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Warum arithmetischer Mittelwert, und nicht geometrischer, „quadratischer" … ?

$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = 0$ d.h. die Summe der Fehler verschwindet

$\frac{\partial}{dx}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 0$ d.h. die Summe der Fehlerquadrate ist minimal

---

Schätzwert für die Standardabweichung σ $(S_E \to \sigma \text{ für } n \to \infty)$

Breite der Verteilung um den Mittelwert

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2}$$

Wann n bzw. n-1?

mittlerer Fehler einer Einzelmessung

$$S_E = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2}$$

kleine Stichprobenanzahl n: Streuung σ um den Mittelwert wird unterschätzt!

---

Schätzwert für die Standardabweichung des Mittelwerts

10 mal höhere Genauigkeit erfordert
100 mal mehr Messwerte!

mittlerer Fehler des Mittelwertes

$$S_M = \frac{S_E}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\overline{x} - x_i)^2}$$

# Arbeitsblatt Fehlerrechnung

1. Gegeben seien die folgenden 5 Einzelmessungen einer Länge a (in mm):

   $\{71, 72, 72, 73, 71\}$.

   Bestimmen Sie a) den Mittelwert, b) die Standardabweichung der Einzelmessung sowie c) den mittleren Fehler des Mittelwertes.

Mittelwert

$$\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{359}{5} mm = 71.8 mm$$

Standardabweichung der Einzelmessung

$$S_a = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{a} - a_i)^2} = \sqrt{\frac{2.8}{4}} \approx 0.84 mm$$

Mittlerer Fehler des Mittelwertes

$$S_{\bar{a}} = \frac{S_a}{\sqrt{n}} \approx \frac{0.84 mm}{\sqrt{5}} \approx 0.37 mm$$

Die Bearbeitung der beiden Arbeitsblätter verlangt Kenntnisse und Fähigkeiten, die für das erfolgreiche Arbeiten im Praktikum *notwendig* sind. Sie sollen Ihnen helfen, etwaige Lücken zu erkennen und diese *noch vor Beginn* des Praktikums zu schließen.

# Fehlerfortpflanzung

Der Einfluss einer fehlerbehafteten Eingangsgröße *x* auf das Ergebnis *f(x)* kann mittels der Taylorreihe abgeschätzt werden:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{1}{1!}\frac{\partial f(x)}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \ldots$$

Bei _enü_end kleinem |Δx| kann die Reihenentwicklung nach dem linearen Glied abgebrochen werden

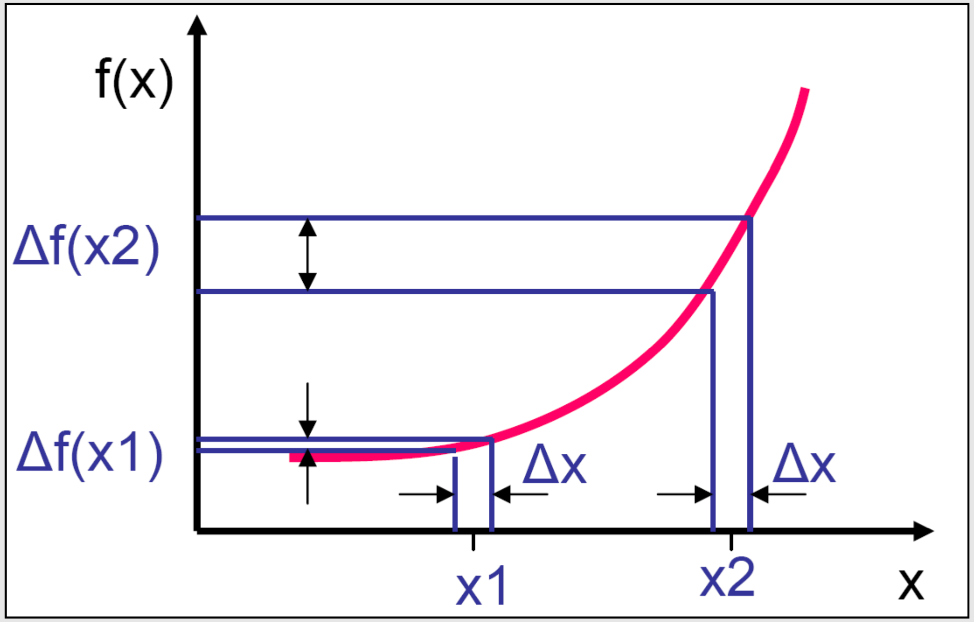
(*Näherungslösung!)*

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}\Delta x + Ordnung[(\Delta x)^2]$$

Wie wirkt sich der Fehler *Δx* einer Messgröße *x* auf eine abgeleitete physikalische Größe *f(x)* aus?

$$\Delta f(x_2) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_2)\Delta x$$

$$\Delta f(x_1) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_1)\Delta x$$



# Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz

In der Regel kann eine physikalische Größe nicht direkt gemessen werden, sondern wird aus einer oder mehreren Messgrößen bestimmt.

Hängt eine physikalische Größe f von den Messgrößen $x_1, x_2, \ldots, x_n$

mit den Fehlern $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ ab, d.h. $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

so berechnet sich der Mittelwert von f gemäß: $\overline{f} \approx f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$

und der absolute Gesamtfehler zu: $\_f(x_i) \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \_x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} \_x_2 \cdot \cdots$

Der Gesamtfehler $\Delta f(\Delta x_i)$ von $f(x_i)$ ergibt sich zu:

$$\Delta f(\Delta x_i) \approx \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2}$$

Warum quadratische Addition ?

Messewerte streuen statistisch „links“ und „rechts“ um den Mittelwert, d.h. die Fehler kompensieren sich teilweise!

Carl Friedrich Gauß
(1777–1855)

# Fehlerfortpflanzung

**Hängt eine physikalische Größe *f* von den Messgrößen x und y ab, ergibt sich für den Gesamtfehler $\Delta$f:**

$$\Delta f(\Delta x, \Delta y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)^2}$$

**Einfache Fälle *f(x,y)* - nützlich zu Erinnern bei der Auswertung:**

$$f = kx \qquad \Delta f = k\Delta x$$

$$f = x + y, \quad f = x - y \qquad \Delta f = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$f = xy, \quad f = \frac{x}{y} \qquad \frac{\Delta f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}$$

$$f = x^{\pm n} \qquad \frac{\Delta f}{f} = |n|\frac{\Delta x}{x}$$

**Die einfachen Fälle brauchen bei der Auswertung nicht hergeleitet werden, sondern können direkt angewendet werden!**

# Arbeitsblatt Fehlerrechnung

2. Bestimmen Sie das vollständige Differential der Funktionen $w = f(x, y, z)$ mit

   a) $w = 3xy + 5/z$

   b) $w = 5y + 6x^2/z$

a)

$$dw = 3y\ dx + 3x\ dy + \frac{-5}{z^2} dz$$

b)

$$dw = \frac{12}{z}\ dx + 5\ dy + \frac{6x^2}{z^2} dz$$

3. Der Wert der in 2a) gegebenen Funktion $w$ wird durch die Messungen der Variablen $x$, $y$, und $z$ mit den statistischen Fehlern $\Delta x$, $\Delta y$, und $\Delta z$ bestimmt. Berechnen Sie den Fehler $\Delta w$ nach dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz.

a)

$$\Delta w = \sqrt{(3y\ dx)^2 + (3x\ dy)^2 + \left(\frac{-5}{z^2} dz\right)^2}$$

b)

$$\Delta w = \sqrt{\left(\frac{12}{z}\ dx\right)^2 + (5\ dy)^2 + \left(\frac{6x^2}{z^2} dz\right)^2}$$

Vollständiges Differential der Funktion *w(x,y,z)*:

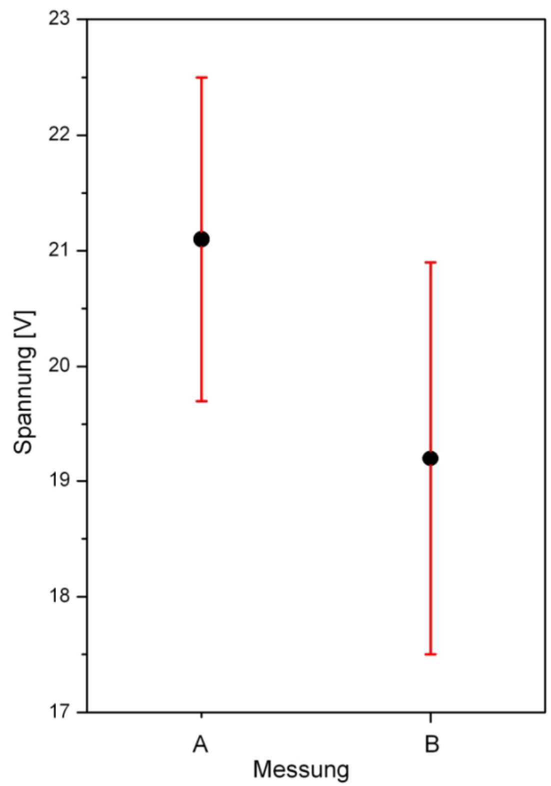
$$aw = \frac{\partial f}{\partial x} ax + \frac{\partial f}{\partial y} ay + \frac{\partial f}{\partial z} az$$

# Arbeitsblatt Fehlerrechnung

5. Die Spannung einer Spannungsquelle wird mit zwei verschiedenen Methoden bestimmt ($1\sigma$-Fehler):

   a) Messwert A: 21,1 $\pm$ 1,4 V
   b) Messwert B: 19,2 $\pm$ 1,7 V.

   Ist der Unterschied zwischen A und B signifikant? Begründung?




**Differenz D**

$$D \equiv U_A - U_B = 1.9V$$

**Fehler der Differenz ΔD**

$$\Delta D = \sqrt{(\Delta U_A)^2 + (\Delta U_B)^2}$$

$$\Delta D = \sqrt{(1.4V)^2 + (1.7V)^2} \approx 2.2V$$

**Vergleich von D mit ΔD der Differenz**

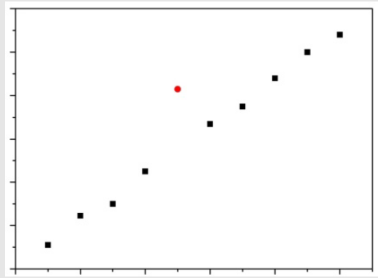
$D = 1.9V < \Delta D \approx 2.2V$ ► **nicht signifikant!**

**Der Unterschied kann zufällig sein -> nicht signifikant**

**Der Unterschied ist signifikant wenn es unwahrscheinlich ist, dass dies durch Zufall zustande kam.**

# Graphische Darstellung

wesentlicher Bestandteil einer Messung



► Veranschaulicht funktionale Zusammenhänge

► Erlaubt Kontrolle über mögliche Abweichungen
(prinzipielle Abweichungen oder „Ausreißer“)

Für das Praktikum bitte beachten:

► Wahl von geeignetem Millimeterpapier (linear / log. / doppelt log.)
► Wahl eines geeigneten Maßstabs für die Achsen
► Beschriftung der Achsen
► Messwerte (mit Fehlern) eintragen
► Graph der Funktion eintragen
► Bei linearer Beziehung: Abschätzung der Steigung der Ausgleichgeraden und deren Fehler

**Für das PAP 1 Praktikum:**
**Diagramme von Hand anfertigen, keine Computerausdrucke !!!**

**(Im PAP 2: Diagramme mit PC & Statistiksoftware)**

# Arbeitsblatt Graphische Darstellung

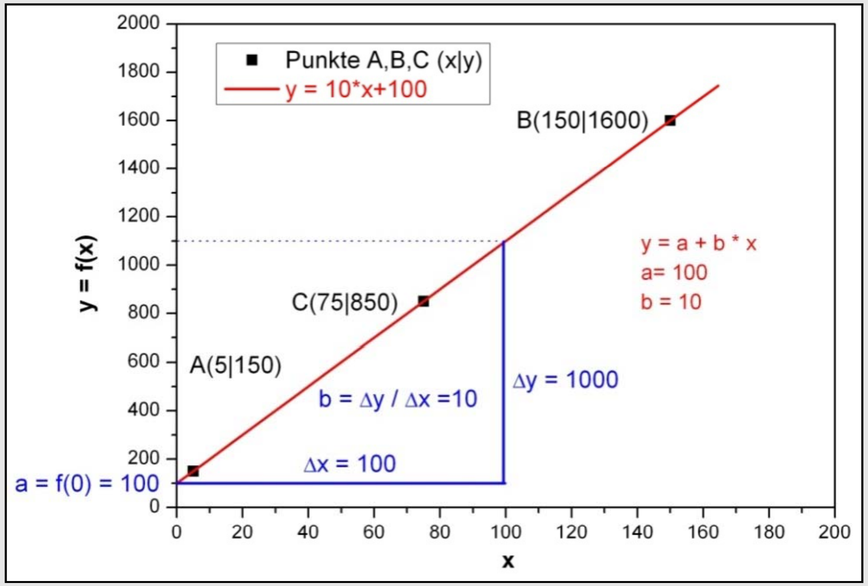
1. Tragen Sie folgende Punkte $(x|y)$ in das Millimeterpapier ein:

   A: $(5\,|\,150)$
   B: $(1,5 \times 10^2\,|\,0,16 \times 10^4)$
   C: $(75\,|\,8,5 \times 10^2)$

   Die zugehörige Funktion hat die Form

   $$y = a \cdot x + b$$

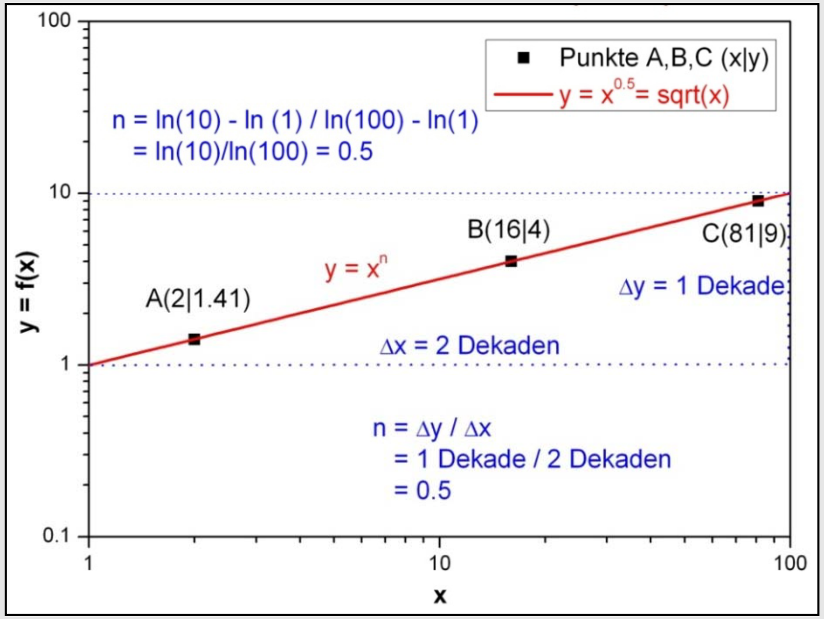
   Tragen Sie den Graph der Funktion ein und bestimmen Sie graphisch a und b.




2. Tragen Sie folgende Punkte in das doppelt-logarithmische Papier ein:

   A: $(2\,|\,1,41)$
   B: $(16\,|\,400 \times 10^{-2})$
   C: $(0,81 \times 10^2\,|\,0,09 \times 10^2)$

   Die zugehörige Funktion hat die Form
   $$y = x^n$$
   Tragen Sie den Graph der Funktion ein und bestimmen Sie graphisch $n$.




doppelt logarithmischer Plot:

Exp. Funktionen $y=x^n$ ergeben eine Gerade mit der Steigung des Exponenten:

*ln(y) = x * ln(x)*

# Arbeitsblatt Graphische Darstellung

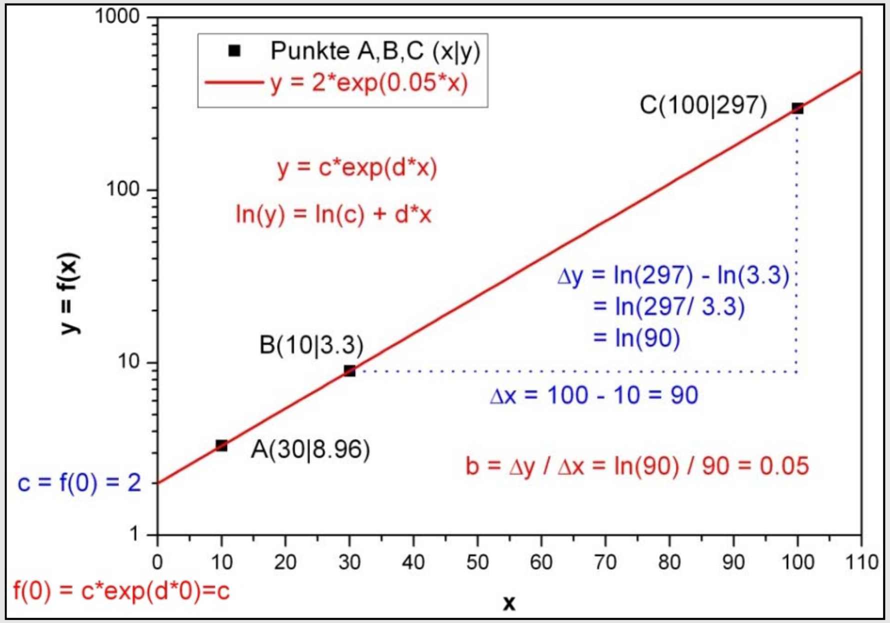
3. Tragen Sie folgende Punkte in das halb-logarithmische Papier ein:

   A: $(30 \,|\, 0,896 \times 10^1)$
   B: $(10 \,|\, 0,330 \times 10^1)$
   C: $(10^2 \,|\, 0,297 \times 10^3)$

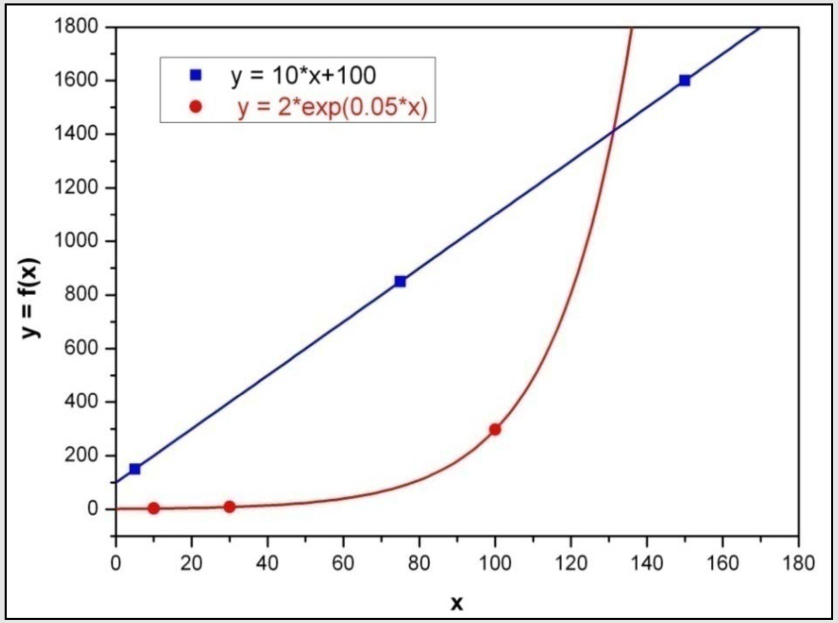
   Die zugehörige Funktion hat die Form

$$y = c \cdot e^{dx}$$

   Tragen Sie den Graph der Funktion ein und bestimmen Sie graphisch $c$ und $d$.




4. Tragen Sie den Graph der Funktion aus 3. ebenfalls in das Millimeterpapier ein.




Halb-logarithmischer Plot:

Exponentialfunktionen *y=c∗exp(d∗x)* ergeben eine Gerade mit der Steigung *d* und y-Achsenabschnitt *c*: *ln(y) = ln(c) + d∗x*

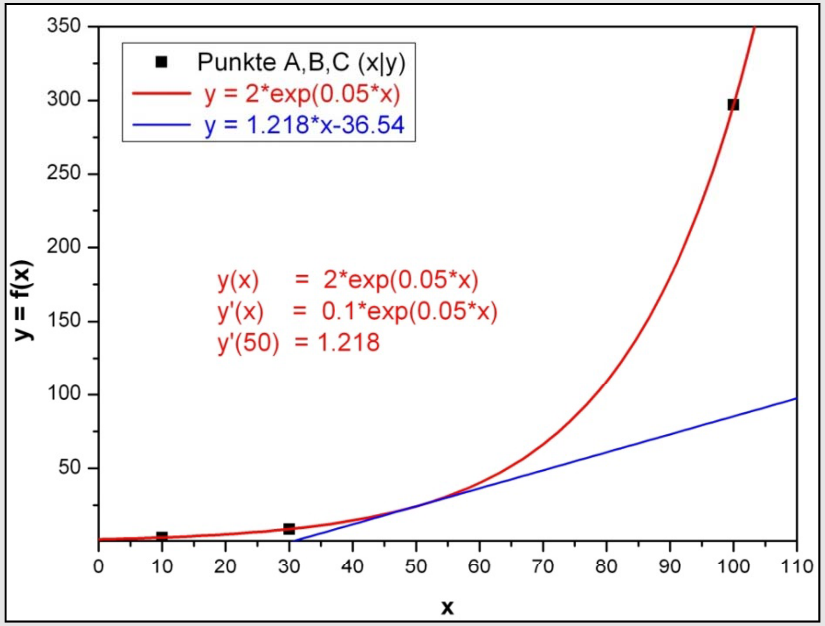
# Arbeitsblatt Graphische Darstellung

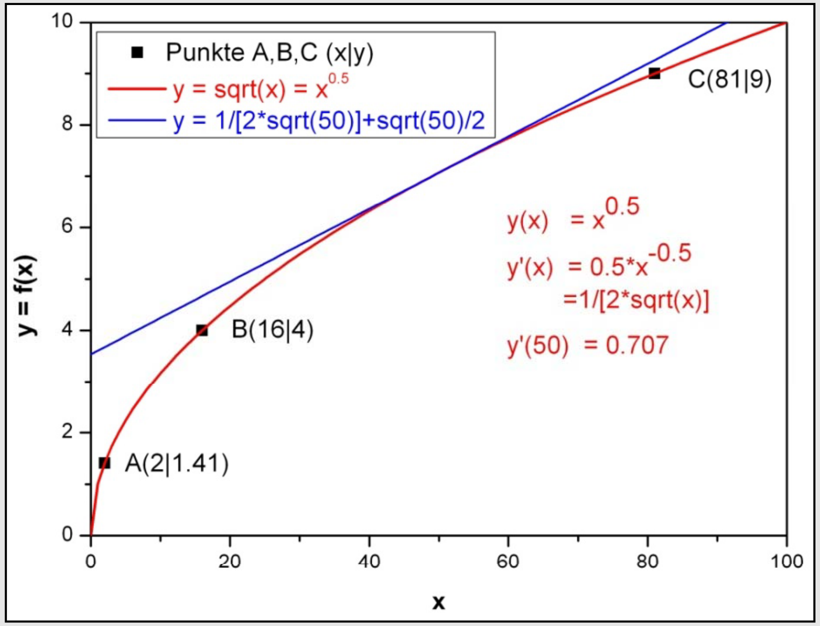
5. Berechnen Sie die Steigungen der 3 Funktionen für $x = 50$.

*(1) y‘(x=50) = 10*

(2) *y‘(x=50) = 1.218*

(3) *y‘(x=50) = 0.707*



# Arbeitsblatt Graphische Darstellung

6. Zum Einführungsversuch (siehe Versuch 11 im Skript):

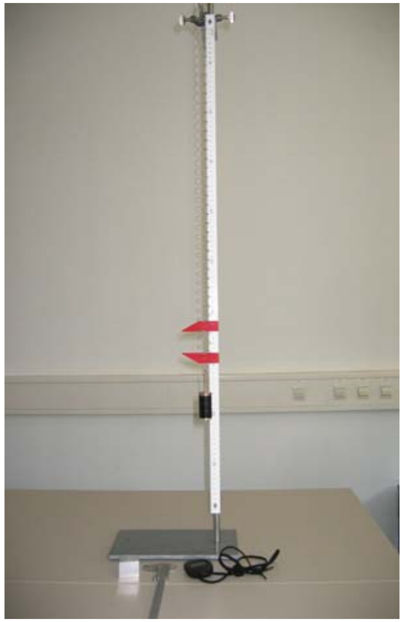
Gegeben sei eine Messreihe der Schwingungsdauer $T$ und deren Fehler $\Delta T$ eines Federpendels als Funktion der Masse $m$:

| Masse $m$ [g] | Schwingungsdauer $T$ [s] | Fehler $\Delta T$ [s] |
|---|---|---|
| 50 | 1,02 | 0,04 |
| 100 | 1,30 | 0,04 |
| 150 | 1,53 | 0,04 |
| 200 | 1,71 | 0,04 |
| 250 | 1,90 | 0,04 |

Zur Bestimmung der Federkonstanten $D$ wird die Gleichung $T^2 = (4\pi^2/D)m$ als Geradengleichung $y = a\,x + b$, mit $y = T^2$, $a = (4\pi^2/D)$ und $x = m$ interpretiert.

Berechnen Sie aus der vorliegenden Messreihe die entsprechenden Wertepaare $(y_i, \Delta y_i)$ und bestimmen Sie nach folgenden Methoden die Steigung $a$ und deren Fehler $\Delta a$:

a) grafisch mit Hilfe einer Ausgleichs- und Fehlergeraden (siehe Kapitel VI im Abschnitt „Messgenauigkeit und Fehlerabschätzung“ im Praktikumsskript),



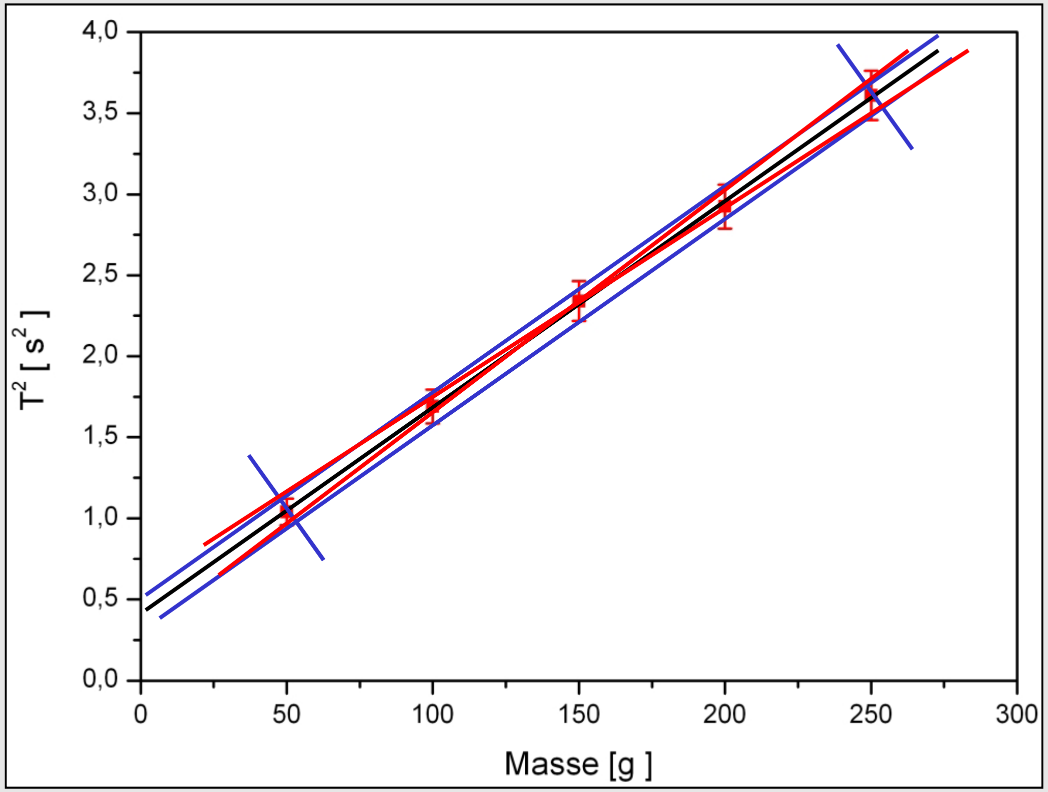
Fehler $\Delta(T^2)$ von $T^2$: Berechnung aus Fehlerfortpflanzung !

| Masse [Gramm] | T [Sekunden] | Fehler T [Sekunden] | T2 [s2] | Fehler T2 [s2] |
|---|---|---|---|---|
| 50 | 1,02 | 0,04 | 1,0404 | 0,0816 |
| 100 | 1,3 | 0,04 | 1,69 | 0,104 |
| 150 | 1,53 | 0,04 | 2,3409 | 0,1224 |
| 200 | 1,71 | 0,04 | 2,9241 | 0,1368 |
| 250 | 1,9 | 0,04 | 3,61 | 0,152 |
| $x_i$ | | | $y_i$ | $\Delta y_i$ |

Einführungsversuch:
Berechnung der Federkonstante D aus der Steigung;
der Fehler $\Delta$D ist ebenfalls anhand der Fehlerfortpflanzung zu berechnen !

# Ausgleichsgerade „von Hand“

***y = a*x + b*** Gesucht: Steigung ***a*** sowie den Achsenabschnitt ***b*** und deren Fehler




Ergebnis:

$$a = (0{,}0120 \pm 0{,}0009)\frac{s^2}{g}$$

$$b = (0{,}407 \pm 0{,}099)s^2$$

Zeichnung der Ausgleichsgeraden

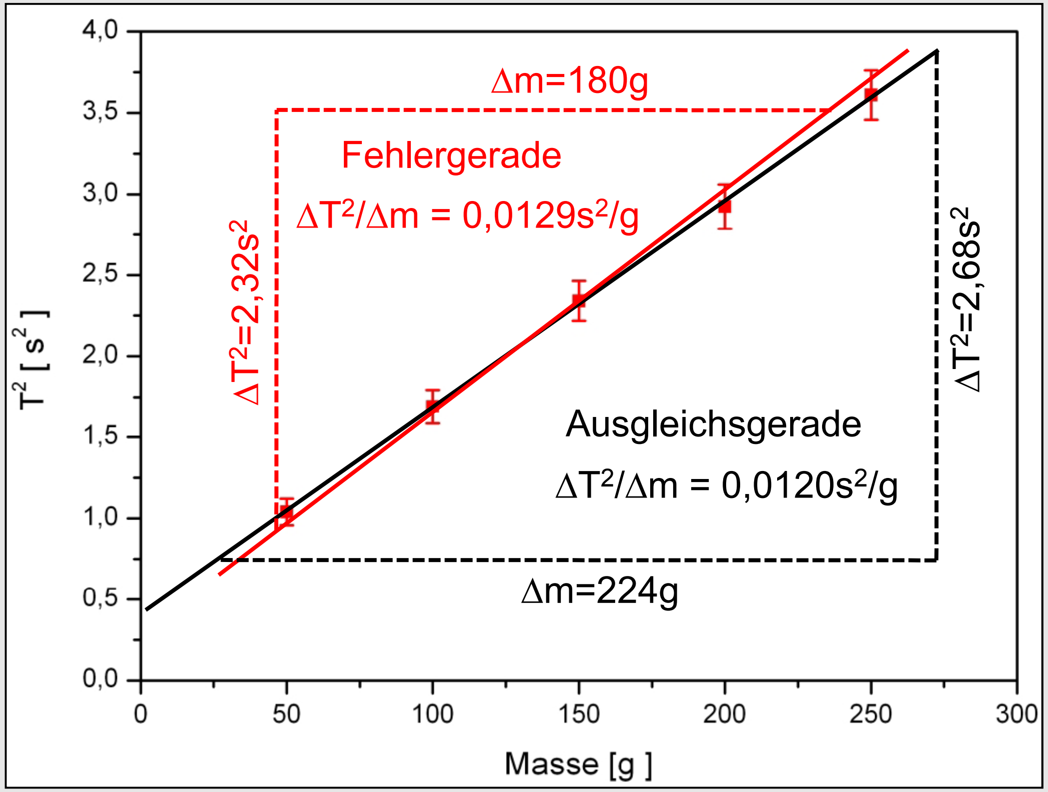
Eintragen von 2 weiteren parallelen nach oben bzw. unten verschobenen Geraden: ca. 70% der Messpunkte innerhalb der Geraden (1σ Abweichung)

Fertigstellen des “Streubereichsrechtecks”

Die Diagonalen in diesem Rechteck liefern in etwa den Fehler der Steigung sowie des Achsenabschnitts

# Ausgleichsgerade „von Hand“

Im Praktikum auch erlaubt: Min/Max- Abschätzung




Zeichnen der Ausgleichgerade

Zeichnen der Fehlergerade

Berechnung der Steigungen

Berechnung des Fehlers:

$\Delta a = a_{Fehler} - a_{Ausgleich}$

**Ergebnis:**

$$a = (0{,}0120 \pm 0{,}0009)\frac{s^2}{g}$$

Fehlerabschätzungen -> Augenmaß ausreichend
Eine exakte Fehlerrechnung ist mit einer Hilfe linearen Regression möglich !

# Lineare Regression

**Gegeben:** N Paare von Messwerten $(x_i, y_i)$ mit linearer Abhängigkeit $y = a \cdot x + b$

$x_i$-Werte fehlerfrei, $y_i$-Werte mit Standardabweichung $\sigma_i$

**„Prinzip der kleinsten Quadrate“ (C.F. Gauß, 1795)**

$$\chi^2 = \sum_i \left[\frac{\Delta y_i}{\sigma_i}\right]^2 = \sum_i \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i}\right]^2 \quad \text{sei minimal}$$

( $\chi^2$-Methode und fitten von Funktionen wird im PAP 2 behandelt)

b) mittels linearer Regression (siehe Kapitel VII im Abschnitt „Messgenauigkeit und Fehlerabschätzung“ im Praktikumsskript).

$$a = \frac{1}{\xi}\left(\sum_i \frac{1}{\Delta y_i^2}\sum_i \frac{x_i y_i}{\Delta y_i^2} - \sum_i \frac{x_i}{\Delta y_i^2}\sum_i \frac{y_i}{\Delta y_i^2}\right) \qquad \Delta a^2 = \frac{1}{\xi}\sum_i \frac{1}{\Delta y_i^2}$$

$$b = \frac{1}{\xi}\left(\sum_i \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2}\sum_i \frac{y_i}{\Delta y_i^2} - \sum_i \frac{x_i}{\Delta y_i^2}\sum_i \frac{x_i y_i}{\Delta y_i^2}\right) \qquad \Delta b^2 = \frac{1}{\xi}\sum_i \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2}$$

$$\xi = \sum_i \frac{1}{\Delta y_i^2}\sum_i \frac{x_i^2}{\Delta y_i^2} - \left(\sum_i \frac{x_i}{\Delta y_i^2}\right)^2$$

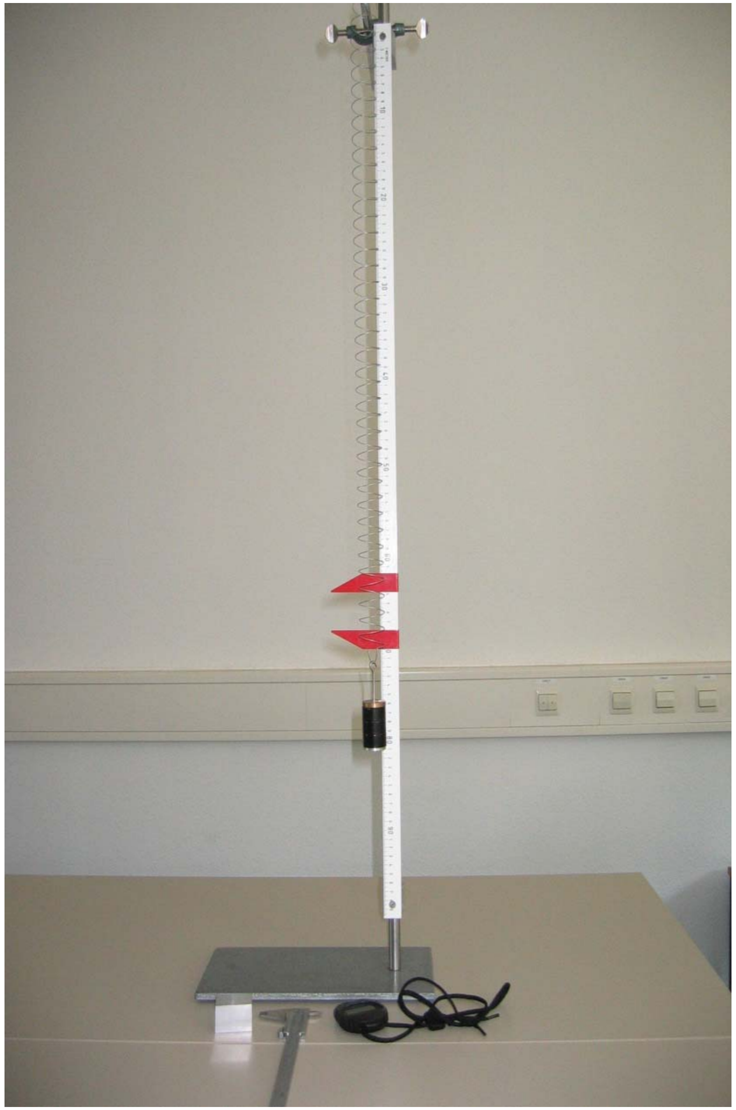
Steigung $a = 0.01276\ s^2/g$

Fehler $\Delta a = 0.00072\ s^2/g$

y-Achsenabschnitt $b = 0.40701\ s^2$

Fehler $\Delta b = 0.09938\ s^2$

# Einführungsversuch Federpendel



Aufgabe:
Bestimmung der Erdbeschleunigung
mit einem Federpendel

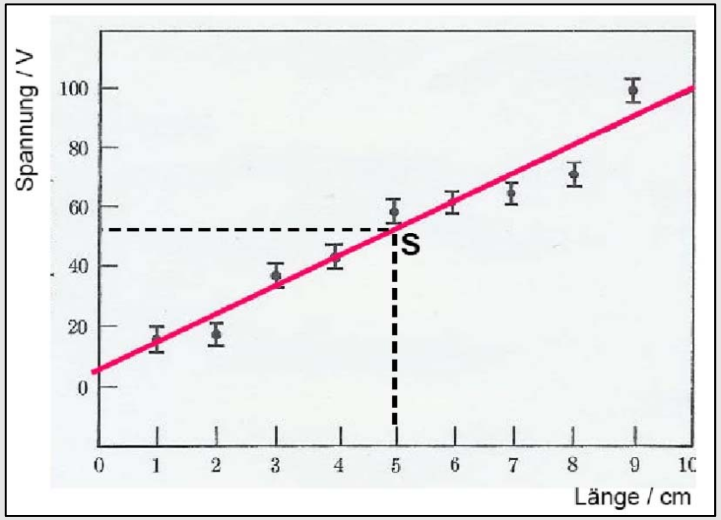
Durchführung und Auswertung:
Gemeinsam mit den Betreuern am ersten Tag

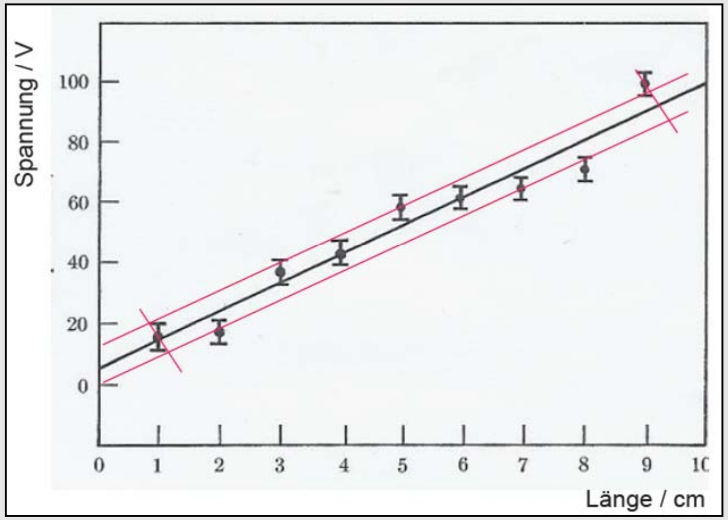
Ziel:
Einführung in das
physikalische Experimentieren,
Protokollführung,
Fehlerabschätzung
und grafische Darstellung

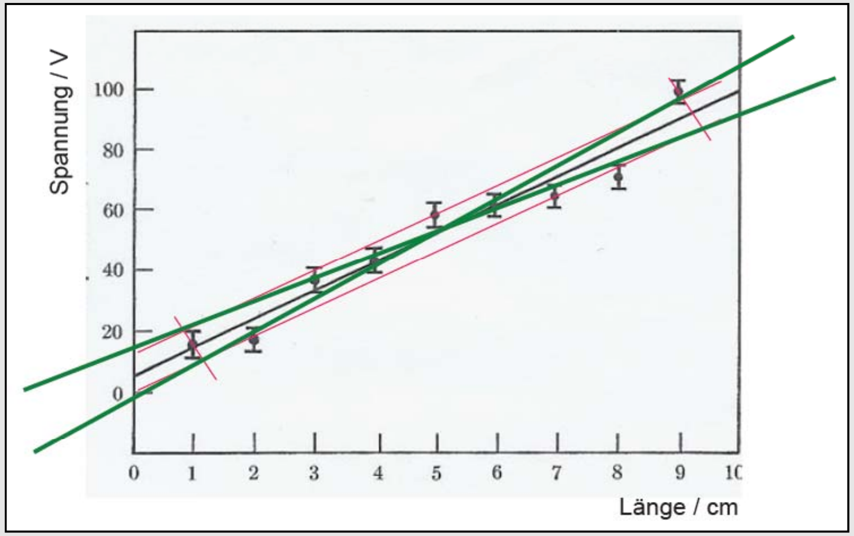
# Zusätzliches Material

# Ausgleichsgerade „von Hand“

***y = a∗x + b*** Gesucht: Steigung ***a*** sowie den Achsenabschnitt ***b*** und deren Fehler




Zeichnung der Ausgleichsgeraden
(geht bei gleichen Standardabweichungen durch Schwerpunkt S der Daten)

Eintragen von 2 weiteren parallelen nach oben bzw. unten verschobenen Geraden:
ca. 70% der Messpunkte innerhalb der Geraden

Fertigstellen des “Streubereichsrechtecks”.

Die Diagonalen in diesem Rechteck liefern in etwa den Fehler der Steigung sowie des Achsenabschnitts.

# Lineare Regression mit $\chi^2$-Fit

$$\chi^2 = \sum_i \left[\frac{\Delta y_i}{\sigma_i}\right]^2 = \sum_i \left[\frac{[y_i - (ax_i + b)]^2}{\sigma_i^2}\right]$$

$\chi^2$ sei minimal (Beispielrechnung für $\sigma_i = \sigma \ \forall \ i$)*

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = \frac{-2}{\sigma^2} \sum_i [y_i - ax_i - b)] \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = \frac{-2}{\sigma^2} \sum_i x_i [y_i - ax_i - b)] \overset{!}{=} 0$$

$$\sum_i y_i = \sum_i b + \sum_i ax_i = bN + a\sum_i x_i$$

$$\sum_i x_i y_i = \sum_i bx_i + \sum_i ax_i^2 = b\sum_i x_i + a\sum_i x_i^2$$

* Allgemeiner Fall: siehe Praktikumsanleitung

Aufstellen der Funktion $\chi^2(a,b)$

Partielles Ableiten:

nach *a* & Nullsetzen

nach *b* & Nullsetzen

Gleichungssystem umformen

# Lineare Regression mit $\chi^2$-Fit

$$\sum_i y_i = \sum_i b + \sum_i a x_i = bN + a \sum_i x_i$$

$$\sum_i x_i y_i = \sum_i b x_i + \sum_i a x_i^2 = b \sum_i x_i + a \sum_i x_i^2$$

Auflösen nach *a* und *b*:

Achsenabschnitt

$$b = \frac{1}{\Delta}\left[\sum_i x_i^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i\right]$$

Steigung

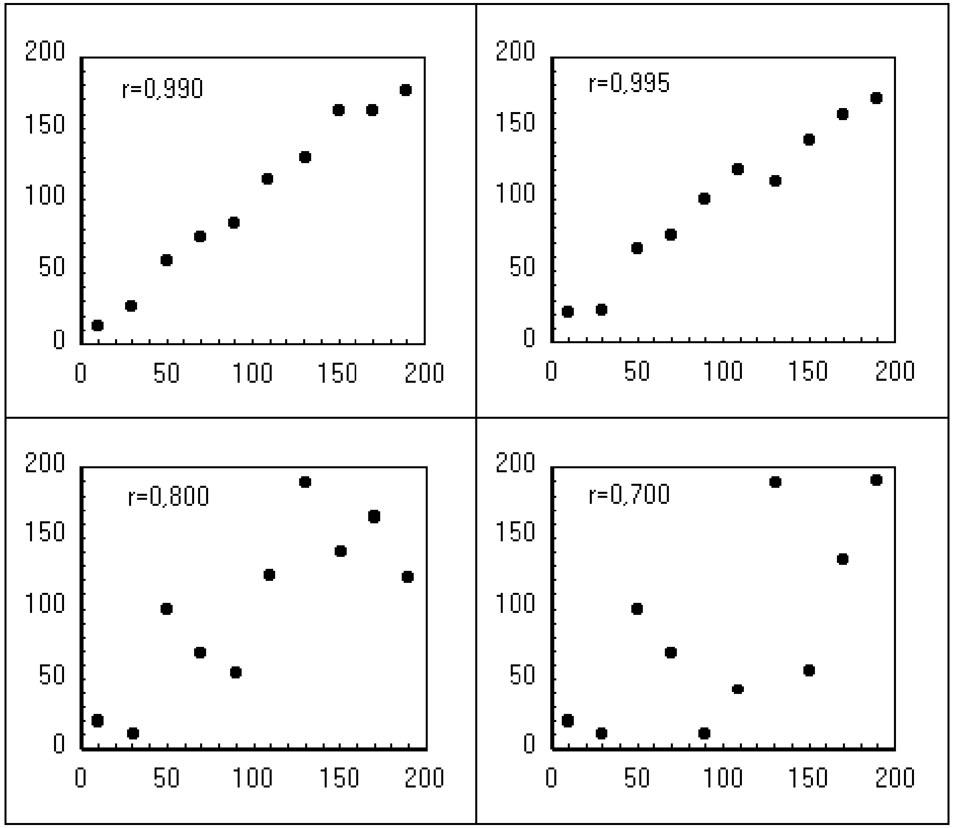
$$a = \frac{1}{\Delta}\left[N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i\right]$$

$$mit\ \Delta = N \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2$$

Varianz

$$\sigma^2 \approx s^2 = \frac{1}{N-2} \sum_i \left[y_i - a x_i - b\right]^2$$

# Korrelationskoeffizient (nach Pearson)




$$\rho(x,y) := \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var\ x} \cdot \sqrt{Var\ y}}$$

$$r_{xy} := \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}$$

dimensionsloses Maß für den Grad des linearen Zusammenhangs zwischen zwei Merkmalen. Bei einem Wert von +1 (bzw. −1) besteht ein vollständig positiver (bzw. negativer) linearer Zusammenhang zwischen den betrachteten Merkmalen. Wenn der Korrelationskoeffizient den Wert 0 aufweist, hängen die beiden Merkmale überhaupt nicht linear voneinander ab.

Quadrat des Korrelationskoeffizienten $r^2$ : Bestimmtheitsmaß

Es gibt an, wie viel Prozent der Varianz, d. h. an Unterschieden der einen Variable durch die Unterschiede der anderen Variable erklärt werden können.

Beispiel: Bei *r=0,3* bzw. *0,8* werden *9%* bzw. *64%* der gesamten auftretenden Varianz im Hinblick auf einen statistischen Zusammenhang erklärt.

# Regressionsanalyse

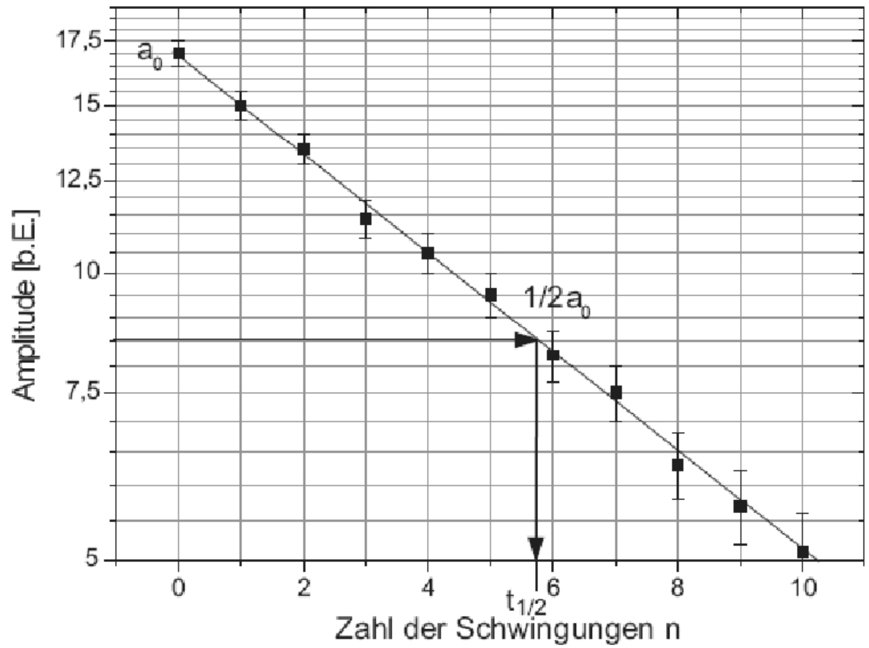
Per Hand bzw. mit Taschenrechner mit überschaubarem Aufwand durchführbar bei linearen Funktionen mit wenigen Stichproben.

Beispiel:

Linearisierung von Funktionen

$$y = a\, e^{bx}$$

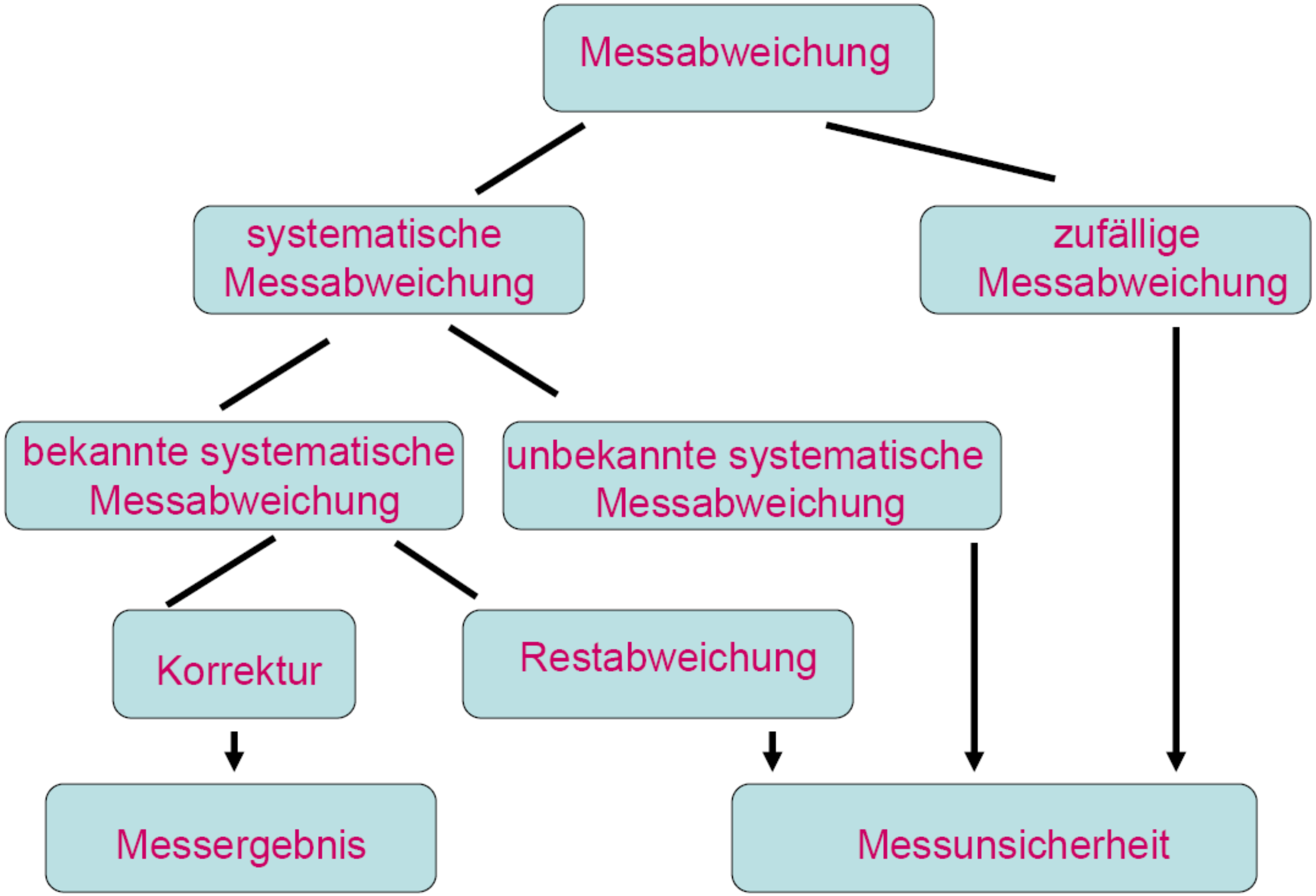
$$\ln y = \ln a + bx$$




„multiple“ Regression:

Für komplexere Funktionen mit mehreren Variablen (alle mit Fehler behaftet) ist es sinnvoll geeignete Statistik Software verwenden (z.B. Mathematica, Maple, Origin, SPSS, Stata, SAS, … ).

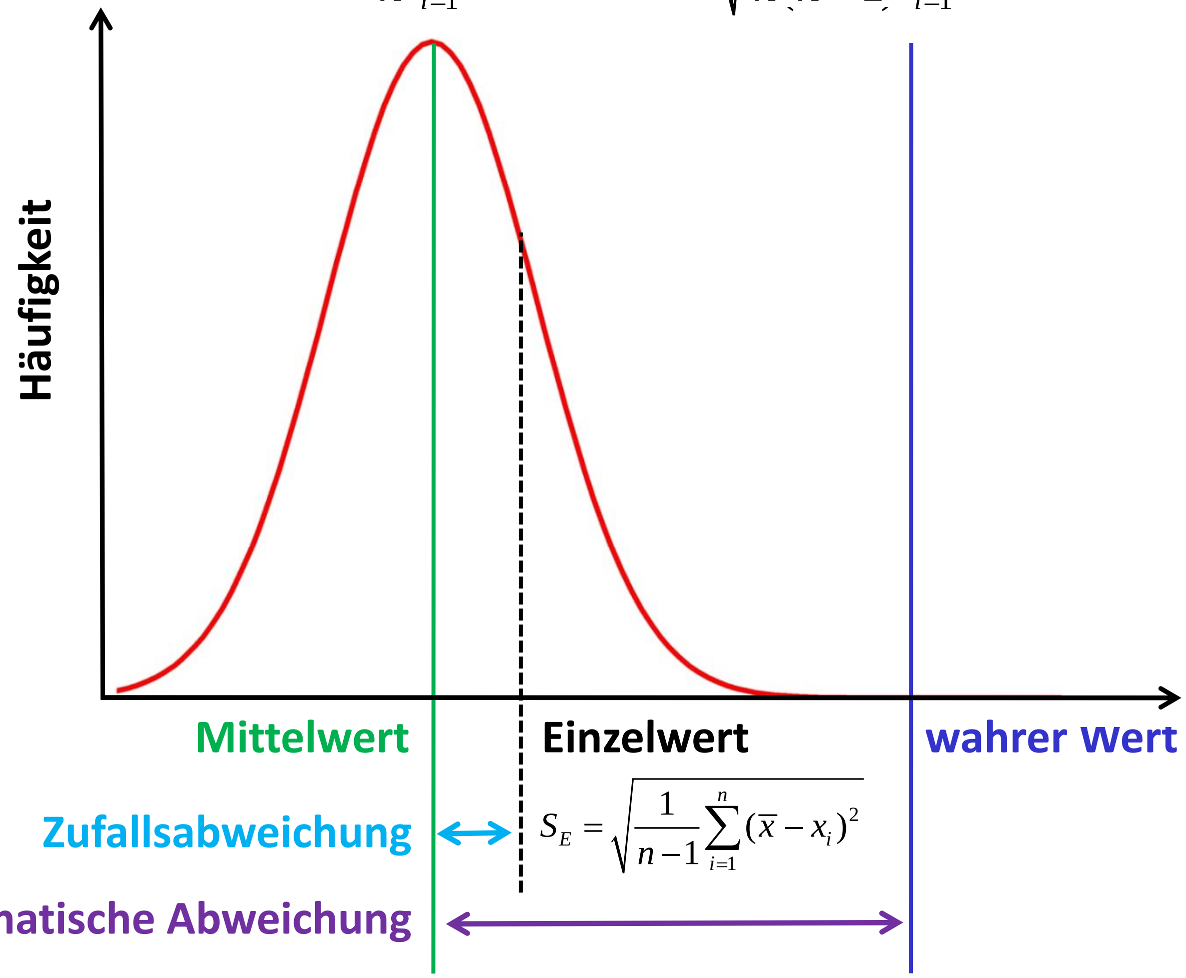
# Prinzipielle Vorgehensweise




nach M.Hemla, OZ 41 (1995) 1156

# Zusammenfassung

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad S_M = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)^2}$$




**Messergebnis:**

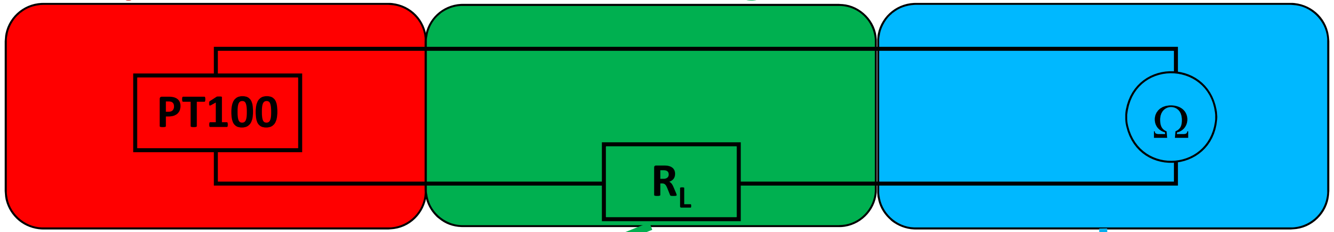
$$x = \bar{x} \pm k \cdot u$$

$$u = \sqrt{(\sigma_M)^2 + (\sigma_{Sys})^2}$$

k=1 für
68% Konfidenz
und hinreichende
Anzahl *n* von
Einzelmessungen

# Beispiel Temperaturmessung mit PT100

**Temperatursensor** | **Zuleitung** | **Ohmmeter**




**Anzeigewerte**

140.12Ω
140.13Ω
140.19Ω
140.08Ω
140.11Ω
140.12Ω
140.09Ω
140.10Ω
140.11Ω

**Systematischer Fehler (Zuleitungswiderstand)**

$sys = R_L = 1.00\ \Omega$

**Arithmetischer Mittelwert**

$m = 140.10\ \Omega$

**Herstellerangabe (Genauigkeit Messgerät)**

$a = 0.15\ \Omega$

**Standardabweichung Des Mittelwerts**

$sm = 0.10\ \Omega$

**Korrektur des Mittelwertes m mit dem bekannten systematischen Fehler**

$m_{korrig} = m - sys = 139.10\ \Omega$

**Kombinierte Messunsicherheit Messgerät und Messunsicherheit**

$u_{res}^2 = sm^2 + a^2 \quad u_{res} = 0.18\ \Omega$

**Vollständiges Messergebnis:**

$(m - sys) \pm u_{res} = 139.10\ \Omega \pm 0.18\ \Omega$

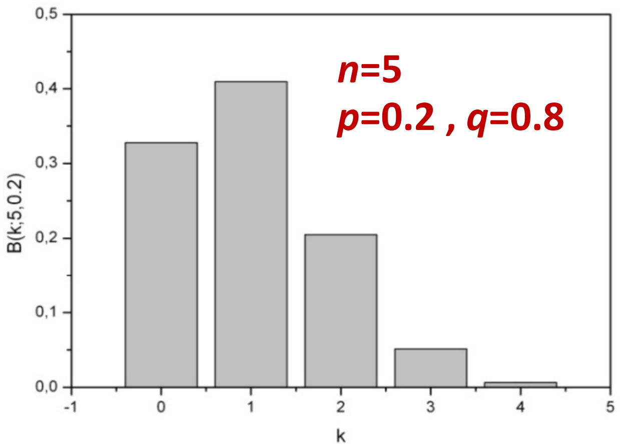
# Binomial-Verteilung

$$B(k;n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Ausfallwahrscheinlichkeit

Trefferwahrscheinlichkeit

Anzahl der Möglichkeiten (Permutationen)




Normierung: $\sum_{k=0}^{\infty} B(k;n,p) = 1$

Mittelwert: $\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot B(k;n,p) = np$

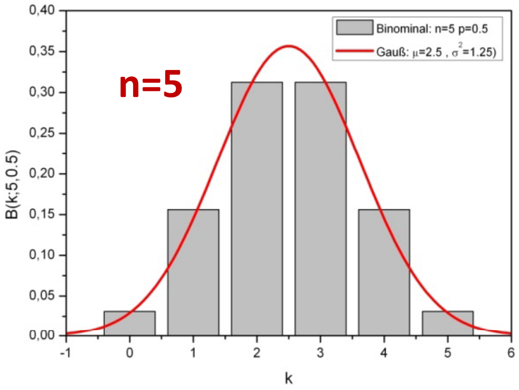
Varianz: $\sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot B(k;n,p) - \langle k \rangle^2 = np(1-p)$

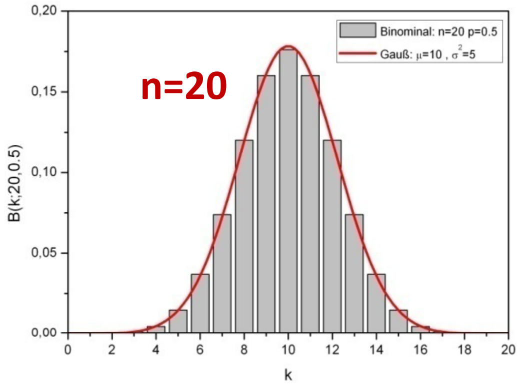
Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

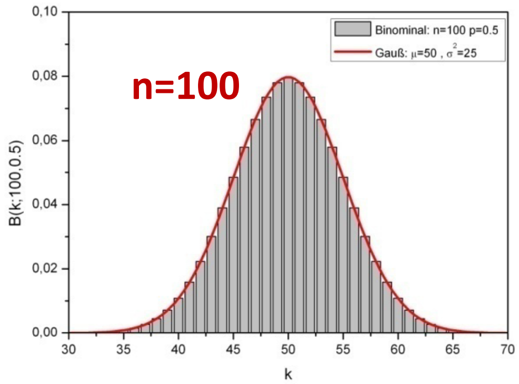
Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis genau k-mal bei n voneinander unabhängigen Versuchen eintritt, wobei p die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses, und (1-p) die Wahrscheinlichkeit für das nicht Eintreten des Ereignisses darstellt.

# Zentraler Grenzwertsatz

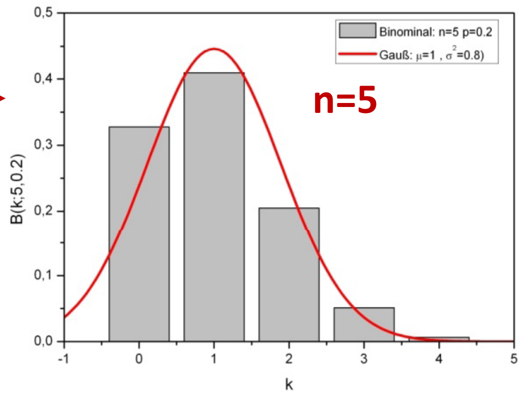
p=0.5 ▶

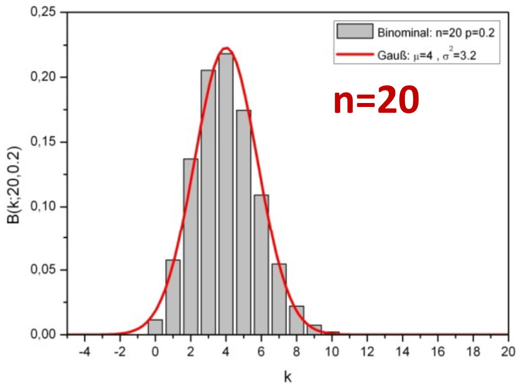


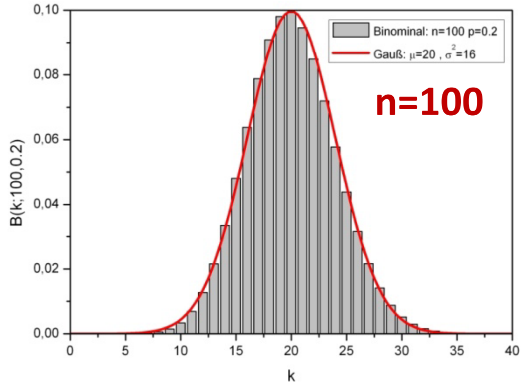




p=0.2 ▶



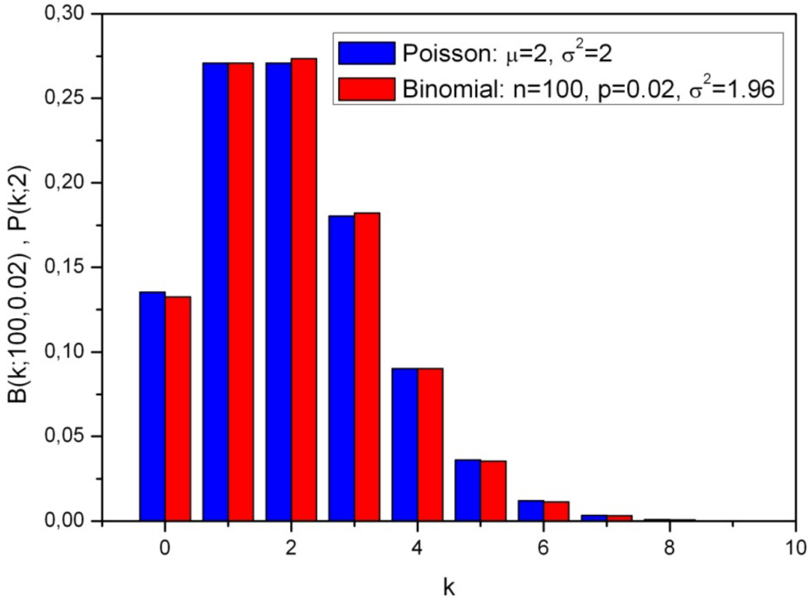

Konvergenz der Binomialverteilung an die Normalverteilung (Gauß) für $n \to \infty$

$$B(k;n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left( -\frac{(\mu - x)^2}{2\sigma^2} \right)$$

# Poisson-Verteilung

Eine asymptotisch asymmetrische Binomialverteilung, deren Erwartungswert *np* für große *n* und kleine *p* gegen eine von *n* unabhängige Konstante λ konvergiert, kann durch die Poisson-Verteilung angenähert werden.

$$P(k;\mu) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$$




Normierung: $\sum_{k=0}^{\infty} P(k;\mu) = 1$

Mittelwert: $\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(k;\mu) = \mu$

Varianz: $\sigma^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(k;\mu) - \langle k \rangle^2 = \mu$

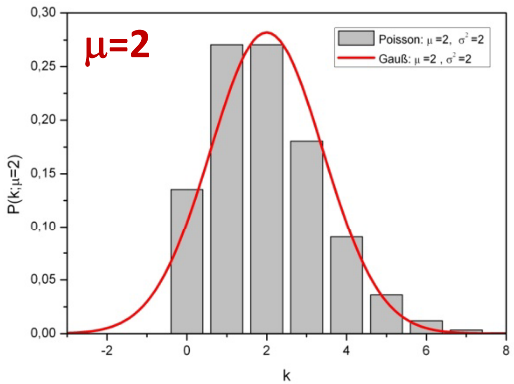
Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\mu}$

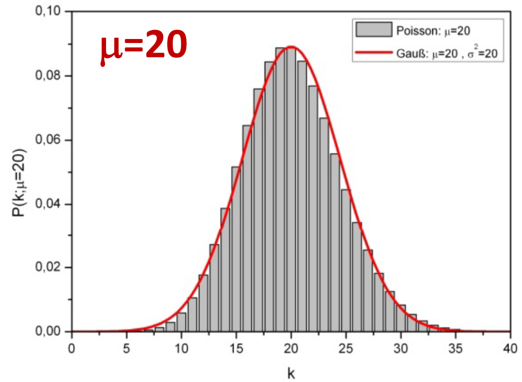
Die Poisson-Verteilung ist also die Grenzverteilung der Binomialverteilung für große *n* und kleine *p*. Die Verteilung wird durch einen Parameter $\mu$ (Erwartungswert) beschrieben. $P(k;\mu) = \lim\ (k; n \to \infty, p \to 0)\ ;\ np \to \lambda$

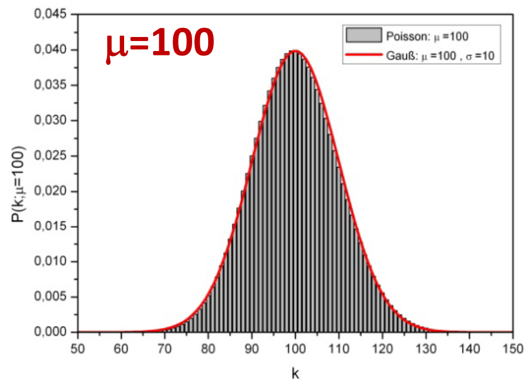
# Poisson-Verteilung & „Wurzel N Gesetz“

Für einen großen Mittelwert $\mu$ ($\mu$ >30) lässt sich die Poisson-Verteilung in guter Näherung durch eine Gaußverteilung approximieren.

$$G(k;\,,\,) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu}} e^{-\frac{(\mu-k)^2}{2\mu}} \quad mit \quad \sigma = \sqrt{,}$$




*G(μ,k)* ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine sehr lange Messreihe den Mittelwert $\mu$ ergeben würde, wobei das Resultat *k* einer einzigen Messung gegeben ist. Näherungswert für die Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{k}$

Beispiel (z.B. Zählrate beim radioaktiver Zerfall):

Interpretation einer Messung als Schätzung des Mittelwerts: N=4711 „counts“

Schätzung der Standardabweichung (absoluter Fehler): $\sqrt{N}$

Relativer Fehler : $\sqrt{N}\,/\,N = 1/\sqrt{N}$

# Literatur


P.R. Bevington
Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences
McGraw-Hill, New York,1969, Lib Congress 69-16942

C.B. Lang & N. Pucker
Mathematische Methoden in der Physik
Spektrum, Akad. Verlag, Heidelberg, 1998, ISBN 3-8274-0225-5

W. Gränicher
Messung beendet was nun?
Teubner Verlag, Stuttgart, 1996, ISBN 3-519-13659-7


<u>Praktikumsanleitung!</u>

“Wir wollen richtige Fehler” , J.Stiewe in der Praktikumsanleitung