Versuch 212
Zähigkeit von Flüssigkeiten

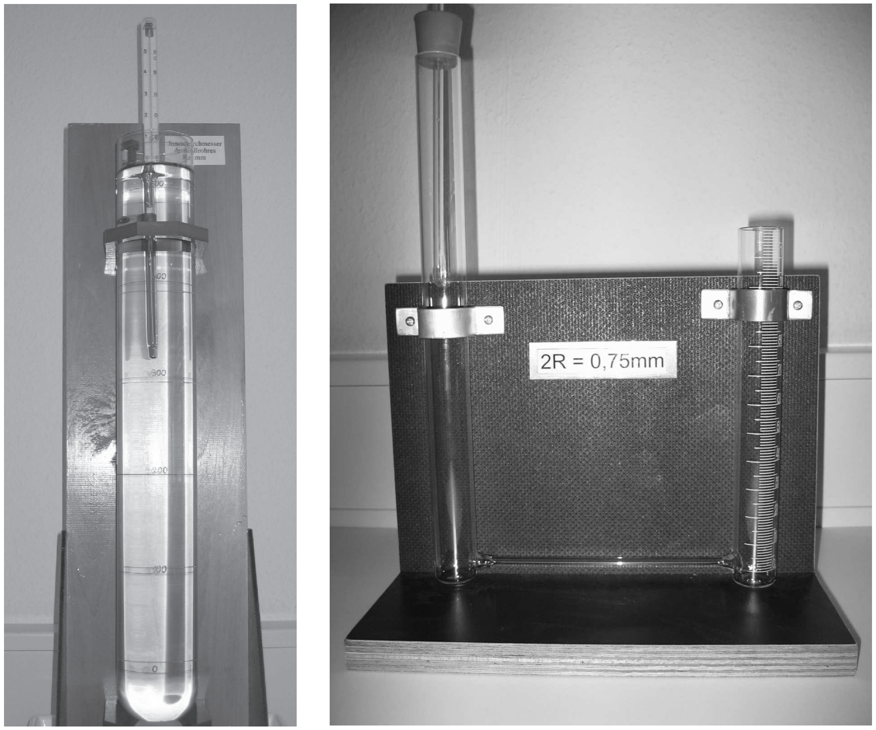

Abbildung 1: *Kugelfallviskosimeter und Kapillarviskosimeter.*

I Messaufbau

- Messzylinder aus Hartglas mit Messskaler, gefüllt mit Polyethylenglykol.
- Kugeln aus „Hostaform C“ mit folgenden Durchmessern: 2r = 3,0 / 4,0 / 5,0 / 6,0 / 8,0 mm (± 1%). Die Dichte der Kugeln ist jeweils angegeben.
- Thermometer
- Pinzetten, Bechergläser
- Maßstab
- Stoppuhren
- Zwei Kapillaren mit unterschiedlichen Durchmessern
- Diagramm mit der Dichte der Flüssigkeit als Funktion der Temperatur.

II Literatur

- Standardwerke der Physik: Gerthsen, Bergmann-Schäfer, Tipler.
- Demtröder, *Experimentalphysik 1*, Springer Verlag.
- W. Walcher, *Praktikum der Physik*, B.G.Teubner Stuttgart.
- Homepage des Praktikums (http://www.physikpraktika.uni-hd.de).

III Vorbereitung

Bereiten Sie sich auf die Beantwortung von Fragen zu folgenden Themen vor: Reale Flüssigkeiten, Kohäsion, Adhäsion, innere Reibung, Zähigkeit (Viskosität), Temperaturabhängigkeit der Zähigkeit, laminare Strömung, Turbulenz, Stokes'sches Gesetz, Gesetz von Hagen-Poiseuille, Mariottesche Flasche.

Verständnisfragen:

1. Welche Kräfte wirken auf eine fallende Kugel in einer Flüssigkeit und wie lautet die Differentialgleichung?
2. Erläutern Sie den Unterschied zwischen laminarer und turbulenter Strömung.
3. Welche Kraft wirkt, wenn zwei parallele Platten, zwischen denen sich eine Flüssigkeit befindet, gegeneinander verschoben wird?

4. Was besagt das Gesetz von Hagen-Poiseuille?

5. Um welchen Faktor muß der Druckabfall verändert werden, damit der Volumenstrom konstant bleibt, wenn der Durchmesser der Kapillare um 30% verringert wird?

IV Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Viskosität von Polyethylenglykol nach Stokes mit einem Kugelfallviskosimeter.

2. Bestimmen Sie die Zähigkeit von Wasser nach Hagen-Poiseuille.

V Grundlagen

Bewegt sich ein Körper mit **konstanter Geschwindigkeit** in einem fluiden oder gasförmigen Medium, so ist trotz der gleichförmigen Bewegung eine Kraft notwendig, um die Bewegung aufrecht zu erhalten. Dies scheint zunächst widersprüchlich zum zweiten Newtonschen Gesetz zu sein, nach dem ein Körper beschleunigt wird wenn auf ihn eine Kraft wirkt. Allerdings gilt dies nur im Vakuum. Bei der Bewegung in einem Medium wirken zusätzlich Reibungskräfte, die dazu führen, dass bei einer konstanten äußeren Kraft, die Nettokraft verschwindet und sich der Körper mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.
Die Reibung wird bei Flüssigkeiten durch zwischenmolekulare Kräfte verursacht. Diese führt dazu, dass bei der Bewegung eines Körpers durch eine Flüssigkeit, **das Medium teilweise mitbewegt wird**. Sie alle haben dies schon beim morgendliche Frühstück erlebt. Taucht man einen Löffel in ein Honigglas und zieht diesen dann senkrecht nach oben heraus, so bleibt aufgrund der Adhäsion eine dünne Honigschicht am Löffel haften. Diese Schicht wechselwirkt mit benachbarten Molekülen, so dass beim Herausziehen ein ganzer Honigklumpen mitbewegt wird. Die Reibungskräfte lassen sich auch beim Umrühren von Honig oder Marmelade beobachten. Sie müssen eine deutliche Kraft aufwenden um den Löffel im Glas zu bewegen. Beim Umrühren von Kaffee ist dieser Effekt kaum wahrzunehmen. Offenbar hängt die Reibungskraft von der „Zähigkeit“ der Flüssigkeit ab.
Um die Reibungskräfte eines Körpers in einer Flüssigkeit zu quantifizieren, betrachten wir die Anordnung nach Abbildung 2. Bei diesem (Gedanken)-Experiment befindet sich zwischen zwei gleich großen Platten, die im Abstand z

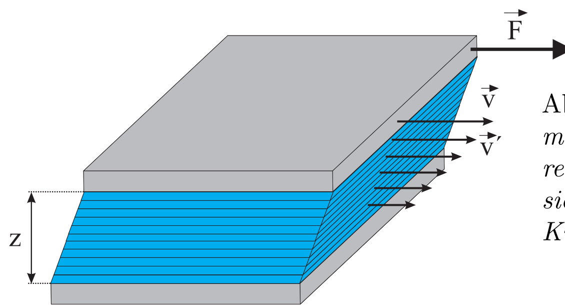

Abbildung 2: *Gedankenexperiment zur Bestimmung der inneren Reibung. Die Flüssigkeit soll sich schichtweise in Richtung der Kraft bewegen.*

parallel zueinander ausgerichtet sind, eine Flüssigkeit. Die untere Platte ruht. Auf die obere Platte wird eine Kraft ausgeübt, so dass sie sich mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt. Da an der oberen Platte aufgrund der Adhäsion ein Flüssigkeitsfilm haftet, bewegt sich dieser mit der Geschwindigkeit der Platte mit. Andererseits beträgt die Geschwindigkeit des Flüssigkeitsfilms die an der unteren, ruhenden Platte haftet, Null. Aus Stetigkeitsgründen müssen daher die dazwischen liegenden Flüssigkeitsschichten mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aneinander vorbeigleiten. Die oberste Flüssigkeitschicht, die sich mit der Platte mitbewegt, übt auf die darunter liegende Schicht eine Tangentialkraft aus und beschleunigt diese auf eine Geschwindigkeit v'. So beschleunigt jede Schicht die darunterliegende und wird gleichzeitig von dieser nach dem Reaktionsprinzip gebremst.
Experimentell zeigt sich, dass die Kraft F, die notwendig ist um die obere Platte zu bewegen, proportional zur Fläche A und zur Geschwindigkeit v und umgekehrt proportional zum Abstand z ist. Bewegt sich die obere Platte gleichförmig, so verschwindet die Nettokraft, d.h. die Reibungskraft F_r ist vom Betrag her gleich groß wie die auf die obere Platte ausgeübte Kraft F. Für die (Newtonsche) Reibungskraft gilt dann:

$$F_r = \eta \; A \; \frac{v}{z}. \tag{1}$$

Für den allgemeinen Fall drückt man diese Gleichung besser durch den Geschwindigkeitsgradienten dv/dz aus:

$$F_r = \eta \; A \; \frac{dv}{dz}. \tag{2}$$

Die Proportionalitätskonstante η ist eine flüssigkeitsspezifische Größe und wird

als dynamische Viskosität, Zähigkeit oder meist auch nur als Viskosität bezeichnet. Für die Maßeinheit gilt nach Gleichung (1): $[\eta]$=Pa s.[1]
Das Newtonsche Reibungsgesetz gilt natürlich auch für andere Körpergeometrien. Gleiten die einzelnen Flüssigkeitschichten aneinader ab ohne sich zu vermischen, spricht man von einer Schichtströmung oder von einer **laminaren Strömung**. Bei großen Geschwindigkeiten und bei speziellen Körpergeometrien, ist dies nicht mehr der Fall. In der Flüssigkeit kommt es dann zur Bildung von Wirbeln, die die Schichten vermischen. Bei diesen **turbulenten Strömungen** ist der Srömungswiderstand viel größer als bei einer laminaren Strömung, so dass das Newtonsche Reibungsgesetz seine Gültigkeit (Abbildung 3) verliert.

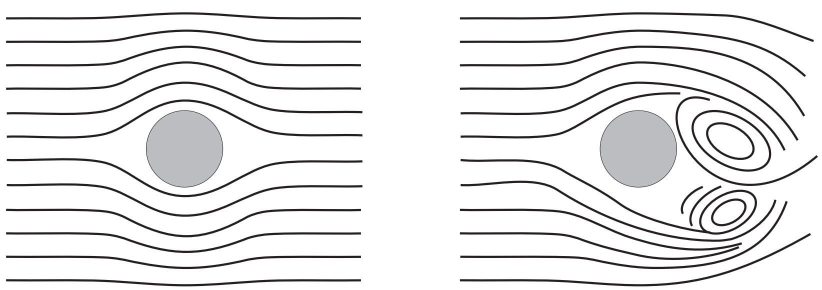

Abbildung 3: *Bewegung einer Kugel durch eine Flüssigkeit. Links: Laminare Strömung bei der die Flüssigkeit den Körper symmetrisch umfließt. Die einzelnen Schichten gleiten aneinander ab ohne sich zu vermischen. Rechts: Turbulente Strömung bei hohen Geschwindigkeiten. In Folge der Wirbelbildung kommt es zu einer Vermischung der Flüssigkeit.*

Bestimmung der Viskosität mit einem Kugelfallviskosimeter nach Stokes

Bewegt sich eine Kugel mit dem Radius r mit konstanter Geschwindigkeit v durch eine Flüssigkeit, so wirkt auf sie die Reibungskraft:

$$F_r = 6\pi\eta r v. \tag{3}$$

Diese Gleichung wird als das Gesetz von Stokes bezeichnet. Die Herleitung folgt aus dem Newtonschen Reibungsgesetz (1) und findet sich in den meisten Lehrbüchern der theoretischen Mechanik. Zu beachten ist, dass das Stokes'sche Gesetz eine Näherung für laminare Strömungen mit Re <1 ist und nur für unendlich ausgedehnte Flüssigkeiten gültig ist. Wir werden an späterer Stelle daher noch Korrekturen anbringen müssen.

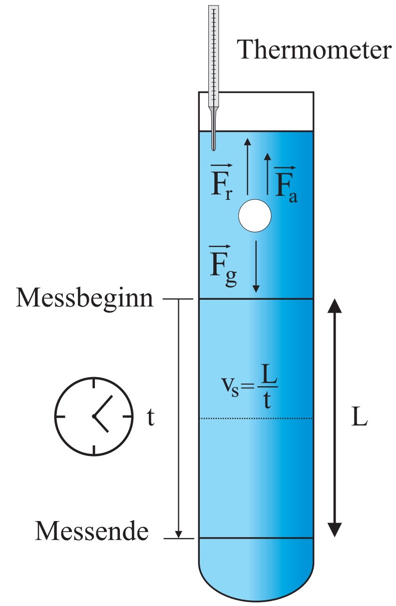

Abbildung 4: *Bestimmung der Viskosität einer Flüssigkeit mit einem Kugelfallviskosimeter. Bewegt sich die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit, heben sich alle angreifenden Kräfte auf.*

Unter Ausnutzung des Stokes'sche Gesetz lässt sich die Viskosität η einer Flüssigkeit bestimmen. Beim Kugelfallviskosimeter wird eine Kugel mit dem Radius r in die Flüssigkeit, dessen Viskosität bestimmt werden soll, fallen gelassen. Nach einer Beschleunigungsphase bewegt sich die Kugel mit einer konstanten Sinkgeschwindigkeit v_s. In diesem Fall verschwinden alle an die Kugel angreifende Kräfte, d.h. Gewichtskraft $F_g = \rho_k V_k g$, Auftriebskraft $F_a = -\rho_f V_k g$ und Reibungskraft $F_r = -6\pi\eta\rho_f v_s$ heben sich auf:

$$F_g + F_a + F_r = 0. \tag{4}$$

Dabei beziehen sich die mit k indizierten Größen auf die Kugel und die mit f indizierten, auf die Flüssigkeit. Einsetzen der einzelnen Kräfte und Auflösen nach η liefert für die Viskosität der Flüssigkeit:

$$\eta = \frac{2}{9} g \frac{(\rho_k - \rho_f)}{v_s} r^2. \tag{5}$$

[1]In manchen Lehrbüchern findet man auch noch die Einheit Poise: 10 Poise=1 Pa s.

Durch Messung der Sinkgeschwindigkeit v_s kann so die Viskosität bestimmt werden.

Bestimmung der Viskosität nach Hagen-Poiseuille: Laminare Rohrströmung

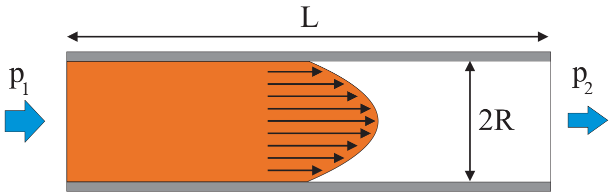

Abbildung 5: *Laminare Rohrströmung. Unter dem Einfluss der Druckdifferenz $p_1 - p_2$ strömt die Flüssigkeit in einem zylindrischen Rohr mit einem parabelförmigen Geschwindigkeitsprofil.*

Eine andere Methode die Viskosität einer Flüssigkeit zu bestimmen, ist die Messung des Volumenstroms einer laminaren Rohrströmung. Betrachten wir dazu ein Rohr der Länge L und Radius R (Abbildung 5). Damit eine Strömung überhaupt möglich ist, muss an den Stirnflächen eine Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2$ vorhanden sein. Im Fall einer laminaren Strömung kann die Bewegung der Flüssigkeit wieder als Schichtströmung interpretiert werden, wobei bei einem Rohr mit kreisförmigen Querschnitt, einzelne Zylindermäntel aneinander abgleiten. Auf einen koaxialen Teilzylinder in der Flüssigkeit mit dem Radius $r < R$, wirkt aufgrund der Druckdifferenz eine Kraft

$$F_p = \pi r^2 (p_1 - p_2). \tag{6}$$

Andererseits wirkt auch die Newtonsche Reibungskraft

$$F_r = -2\pi r L \eta \frac{dv}{dr}. \tag{7}$$

Bei einer stationären Strömung, bei der sich die einzelnen Schichten mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, muss die Nettokraft verschwinden, d.h. $F_p = F_r$:

$$-2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} = \pi r^2 (p_1 - p_2). \tag{8}$$

Hieraus folgt für den Geschwindigkeitsgradienten

$$\frac{dv}{dr} = \frac{p_1 - p_2}{2\eta L} r. \tag{9}$$

Integration über r unter Berücksichtigung der Randbedingung $v(R) = 0$, liefert für die Geschwindigkeitsverteilung in der Flüssigkeit

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L}(R^2 - r^2). \tag{10}$$

Diese Gleichung stellt ein Rotationsparaboloid dar. Die Flüssigkeit besitzt demnach das in Abbildung 5 gezeigte parabolische Geschwindigkeitsprofil.
Um den Volumenstrom, d.h. die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch die Querschnittsfläche des Rohres strömt, zu bestimmen, müssen wir über die gesamte Querschnittsfläche integrieren:

$$\frac{dV}{dt} = \int_0^R 2\pi r v(r) dr = \frac{\pi (p_1 - p_2) R^4}{8\eta L}. \tag{11}$$

Beachten Sie die Abhängigkeit von R^4. Eine Verdopplung des Rohrradius versechzehnfacht den Volumenstrom!
Gleichung (11) wird nach dem deutschen Wasserbau-Ingenieur Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen und nach dem französischen Arzt und Physiologen Poiseuille, auch als das Gesetz von Hagen-Poiseuille bezeichnet.
Sind Länge und Radius des Rohres und die Druckdifferenz bekannt, so kann durch Messung des Volumenstroms die Viskosität bestimmt werden.

VI Durchführung des Versuchs

1. Bestimmung der Viskosität nach Stokes mit einem Kugelfallviskosimeter

Bei dem Versuch wird die Fallzeit Δt der Kugel zwischen zwei im Abstand Δs angebrachten Markierungen gemessen. Die Messungen mit dem Kugelfallviskosimeter sind entweder mit steigendem oder mit fallendem Kugelradius durchzuführen. Notieren Sie sich die Temperaturen der Flüssigkeiten während der Messung mit den kleinsten Kugeln. Legen Sie die Fallstrecke der Kugeln fest und notieren Sie diesen Wert. Der Abstand der ersten Messmarke von der Flüssigkeitsoberfläche ist so zu wählen, dass sich die Kugel beim

Durchlaufen der ersten Messmarke, mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Lassen Sie von jedem Durchmesser 3 Kugeln die Fallstrecke möglichst in der Rohrachse durchfallen. Zur Bestimmung der Fallzeit dienen die zahlreich beigegebenen Handstoppuhren. Bei den kleinsten Durchmessern empfiehlt sich eine Simultanmessung von mehreren Kugeln durchzuführen. Damit sich die Messzeiten bei den kleinen Kugeln nicht über einen zu langen Zeitraum erstrecken, können Sie hier eine kürzere Fallstrecke verwenden. Der Innendurchmesser des Kugelfallgefäßes ist am Viskosimeter angegeben. Vergessen Sie nicht diesen Wert in Ihr Protokoll aufzunehmen.
Sie müssen bei der Durchführung des Experiments unbedingt darauf achten, dass an den Kugeln keine Luftbläschen haften. Sortieren Sie daher vor dem Einbringen der Kugeln in das Fallgefäß, zunächst einige Kugeln des jeweiligen Durchmessers in ein Becherglas und geben Sie etwas Flüssigkeit mit hinein. Schwenken Sie das Becherglas vorsichtig um, so dass die Kugeln vollständig benetzt sind und keinerlei Luftbläschen mehr daran zu erkennen sind. Mit der Pinzette werden dann die mit der Flüssigkeit benetzten Kugeln in das Fallgefäß gegeben.

2. Bestimmung der Viskosität nach Hagen-Poiseuille mit einem Kapillarviskosimeter

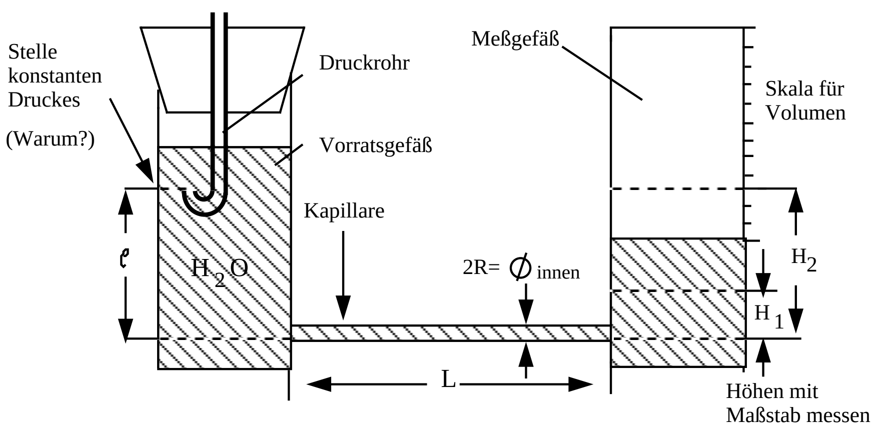

Abbildung 6: *Aufbau zur Bestimmung der Viskosität nach Hagen-Poiseuille.*

a) Das Vorratsgefäß wird aufgefüllt und mit dem Gummistopfen abgedichtet. Warten Sie solange, bis aus dem Druckrohr Luftblasen aufsteigen. Im Verlauf der Messung soll das Ende des Druckrohres im Vorratsgefäß immer unter Wasser sein (Mariottesche Flasche).

b) Bestimmen Sie vor Beginn der Messung die Temperatur (T) des Wassers.

c) Messen Sie mit dem Maßstab die Größen L, ℓ, H_1 und H_2 (s. Versuchsaufbau). (Da für die Auswertung nur die Druckdifferenz benötigt wird, ist es gleichgültig wohin Sie den Fußpunkt der Längenmessungen legen, er muß auf beiden Seiten gleich gewählt werden. In der Zeichnung liegt er am unteren Rand der Kapillarenöffnung.)

d) Messen Sie dann die Zeit Δt, die die Wassersäule im Meßgefäß braucht, um von einer bestimmten Marke zu einer anderen zu steigen. (Die Marken geben die Wassermengen in cm^3 und nicht die Höhe in cm an!) Aus der Differenz der Marken wird das durch die Kapillare gelaufene Flüssigkeitsvolumen ΔV berechnet (siehe Skizze).

e) In der gleichen unter a), b), c), d) angegebenen Weise verfahren Sie mit der zweiten Kapillare (anderer Durchmesser).

f) Schütten Sie nach Versuchsende das Wasser aus.

VII Auswertung

Zu 1)

a) Nach Gleichung (5) ergibt sich für die Sinkgeschwindigkeit v_s einer Kugel unter dem Einfluss Stokes'scher Reibung bei laminarer Strömung:

$$v_s = \frac{2}{9}\, g\, \frac{\rho_k - \rho_f}{\eta}\, r^2. \tag{12}$$

Demnach ist die Fallgeschwindigkeit der Kugeln proportional zu r^2. Zur Überprüfung dieser Gesetzmäßigkeit tragen Sie die Fallgeschwindigkeit über r^2 auf. Die Fallgeschwindigkeit ist aus dem Mittelwert der einzelnen Fallzeiten bei dem jeweiligen Kugeldurchmesser zu berechnen.

b) Ist der Radius der Kugel r nicht klein gegen den Radius des Fallrohres R, tritt die Strömung um die Kugel zusätzlich in Wechselwirkung mit der Rohrwand. Dadurch erhöht sich der Reibungswiderstand und somit auch die Fallzeit.

Dies lässt sich durch die sogenannte Ladenburg'sche Korrektur λ berücksichtigen:

$$\lambda = \left(1 + 2,4\frac{r}{R}\right), \tag{13}$$

Multiplizieren Sie die gemessenen Fallgeschwindigkeit mit λ und tragen Sie die so korrigierten Werte wie bei Aufgabe a) über r^2 auf. Legen Sie durch die Punkte eine Gerade die durch den Nullpunkt geht und bestimmen Sie aus der Steigung die Viskosität. Schätzen Sie den Fehler ab.

Zu 2)

a) Mit Hilfe der Formel $p = \varrho \cdot g \cdot h$ für den Druck einer Flüssigkeitssäule der Höhe h ist zunächst der Druckabfall Δp über der Kapillare zu bestimmen. Trotz der abnehmenden Wassersäule ist der Druck auf der linken Seite (im Vorratsgefäß) konstant. (In Höhe der Öffnung des Druckrohres herrscht stets Luftdruck.) Im Mittel ist die Höhe der rechten Wassersäule h = (H_1+H_2)/2 und der Druck p_2 = $g\varrho$ (H_1 + H_2)/2. Damit ist im Mittel $\Delta p = p_1 - p_2 = g\varrho(\ell - (H_1 + H_2)/2)$.

b) Aus den für beide Kapillaren gemessenen Größen ist die Zähigkeit von Wasser bei der entsprechenden Wassertemperatur zu bestimmen.

c) Führen Sie eine Fehlerrechnung durch.
Zur Vereinfachung wird angenommen, dass die Absolutfehler der Flüssigkeitshöhen außer acht gelassen werden können (sowohl für die $\Delta p-$Bestimmung als auch für die ΔV-Bestimmung). Nehmen Sie für die Zeitmessung einen absoluten Zeitfehler von 1 Sekunde an und für den Kapillarradius einen absoluten Fehler von 1/20 mm. Wegen der R^4 Abhängigkeit von η folgt für den relativen Fehler:

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \sqrt{(4\frac{\Delta\ R}{R})^2 + (\frac{\Delta\ t}{t})^2}$$

Berechnen Sie damit $\frac{\Delta\eta}{\eta}$ für die beiden Messungen.

d) Um wieviel weichen die beiden Messungen der Zähigkeit voneinander ab?

VIII Anhang

Viskosität (η)	
Stoff	$Pa \cdot s$
Blut (37^0C)	$4.5 \cdot 10^{-3}$
Wasser (0^0C)	$1.8 \cdot 10^{-3}$
Wasser (20^0C)	$1.0 \cdot 10^{-3}$
Wasser (60^0C)	$0.65 \cdot 10^{-3}$
Luft	$0.018 \cdot 10^{-3}$