Fakultät für Physik und Astronomie

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Diplomarbeit
im Studiengang Physik

vorgelegt von
Jochen Hartert
aus Backnang

September 2007

Messung der Verzweigungsverhältnisse von τ-Zerfällen in Endzustände mit drei geladenen Hadronen mit dem *BABAR*-Experiment

Die Diplomarbeit wurde von Jochen Hartert ausgeführt am
Physikalischen Institut
unter der Betreuung von
Herrn Prof. Dr. Ulrich Uwer

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit werden Verzweigungsverhältnisse von Zerfällen des τ-Leptons in Endzustände mit drei geladenen Hadronen gemessen. Dazu wird ein vom *BaBar*-Experiment aufgezeichneter Datensatz verwendet, welcher einer integrierten Luminosität von $\mathcal{L} = 384\,\mathrm{fb}^{-1}$ entspricht und insgesamt 353 Millionen $\tau^+\tau^-$-Paare enthält. Die gemessenen Verzweigungsverhältnisse sind $\mathcal{B}(\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau) = (8{,}77 \pm 0{,}01 \pm 0{,}19)\,\%$, $\mathcal{B}(\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau) = (0{,}297 \pm 0{,}002 \pm 0{,}019)\,\%$, $\mathcal{B}(\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau) = (0{,}1462 \pm 0{,}0008 \pm 0{,}0025)\,\%$ und $\mathcal{B}(\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau) = (1{,}53 \pm 0{,}12 \pm 0{,}13) \times 10^{-5}$, wobei die ersten Unsicherheiten statistischer und die zweiten systematischer Natur sind. Da die Kanäle gegenseitiger Untergrund sind, existieren starke Korrelationen, die ebenfalls bestimmt werden. Die Endzustände $K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ und $K^-K^+K^-\nu_\tau$ haben Beiträge der resonanten τ-Zerfälle $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$, deren Verzweigungsverhältnisse aus den Verteilungen der invarianten K^+K^--Masse bestimmt werden. Gemessen wurden die Werte $\mathcal{B}(\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau) = (4{,}01 \pm 0{,}51 \pm 0{,}57) \times 10^{-5}$ und $\mathcal{B}(\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau) = (3{,}29 \pm 0{,}25 \pm 0{,}34) \times 10^{-5}$. Der nichtresonante Anteil im Zerfallskanal $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ ist mit Null verträglich und kann auf $\mathcal{A}(\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau, \text{nichtresonant}) < 2{,}80\,\%$ bei einem 90 %-Vertrauensbereich eingeschränkt werden. Alle Messungen sind kompatibel mit den aktuellen Weltmittelwerten, wobei die Unsicherheiten mit diesen vergleichbar oder deutlich kleiner sind.

Abstract

This work presents branching fraction measurements of τ lepton decays into final states with three charged hadrons. The analysis is based on a data sample of 353 million $\tau^+\tau^-$ pairs collected with the *BaBar* experiment. It corresponds to an integrated luminosity of $\mathcal{L} = 384\,\mathrm{fb}^{-1}$. The measured branching fractions are $\mathcal{B}(\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau) = (8.77 \pm 0.01 \pm 0.19)\,\%$, $\mathcal{B}(\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau) = (0.297 \pm 0.002 \pm 0.019)\,\%$, $\mathcal{B}(\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau) = (0.1462 \pm 0.0008 \pm 0.0025)\,\%$ and $\mathcal{B}(\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau) = (1.53 \pm 0.12 \pm 0.13) \times 10^{-5}$, where the first uncertainties are statistical and the second systematic. Since the decay channels represent mutual backgrounds, strong correlations exist, which are also determined. Final states with two and three charged kaons contain resonant contributions of the decays $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$ and $\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$. Branching fraction measurements of these channels, exploiting the K^+K^- invariant mass distributions, result in $\mathcal{B}(\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau) = (4.01 \pm 0.51 \pm 0.57) \times 10^{-5}$ and $\mathcal{B}(\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau) = (3.29 \pm 0.25 \pm 0.34) \times 10^{-5}$. The non-resonant fraction of the decay $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ is compatible with zero and constrained to $\mathcal{A}(\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau, \text{non-resonant}) < 2.80\,\%$ at 90 % confidence level. All measurements agree well with current world averages whereas the uncertainties are comparable or significantly smaller.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

1 Theoretische Grundlagen **3**
1.1 Das Standardmodell der Teilchenphysik . . . 3
1.2 Messungen von $|V_{\mathrm{us}}|$ . . . 5
1.2.1 Semileptonische Kaonzerfälle . . . 5
1.2.2 Hadronische τ-Zerfälle . . . 6

2 Das *BaBar*-Experiment **9**
2.1 Die Speicherringanlage PEP-II . . . 9
2.2 Der *BaBar*-Detektor . . . 10
2.3 Teilchenidentifikation . . . 15
2.3.1 Messgrößen der Teilchenidentifikation . . . 15
2.3.2 Kriterien der Teilchenidentifkation . . . 18
2.3.3 Korrekturen der simulierten Ereignisse . . . 19
2.4 Daten und Monte-Carlo-Simulation . . . 21
2.4.1 Daten . . . 21
2.4.2 Monte-Carlo-Simulation . . . 21

3 Ereignisselektion **23**
3.1 Vorselektion von $\tau^+\tau^-$-Ereignissen . . . 23
3.2 Selektion von Ereignissen der Art $\tau^- \to h^-h^+h^-\nu_\tau$ . . . 27
3.2.1 Unterdrückung von QED-Untergründen . . . 28
3.2.2 Unterdrückung von Untergründen vom Typ $\tau^- \to h^-h^+h^-\pi^0\nu_\tau$ und $e^+e^- \to q\bar{q}$ . . . 32
3.3 Selektion der Signalkanäle . . . 37

4 Fit der ϕ-Resonanz **41**
4.1 Fit der ϕ-Resonanz in $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ . . . 42
4.2 Fit der ϕ-Resonanz in $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ . . . 50
4.3 Nichtresonanter Anteil in $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ . . . 57

5 Bestimmung der Verzweigungsverhältnisse **61**
5.1 Berechnung von Verzweigungsverhältnissen . . . 61
5.2 Bestimmung der Migrationsmatrix . . . 64
5.3 Die Verzweigungsverhältnisse . . . 65
5.3.1 Verzweigungsverhältnisse von $\tau^- \to h^-h^+h^-\nu_\tau$ . . . 66

5.3.2 Verzweigungsverhältnisse von $\tau^- \to \phi h^- \nu_\tau$ 67
5.4 Statistische Fehler und Korrelationen 68
5.5 Systematische Unsicherheiten 71
5.5.1 Luminosität 71
5.5.2 Wirkungsquerschnitt $\sigma(e^+e^- \to \tau^+\tau^-)$ 72
5.5.3 Normierungen der Untergründe 73
5.5.4 Effizienz der Spurrekonstruktion 74
5.5.5 Effizienzen der Teilchenidentifikation 75
5.5.6 Signaleffizienzen 75
5.5.7 Untergrundeffizienzen 77
5.5.8 Variation der Schnitte 78
5.5.9 Elektron-Tag vs. Myon-Tag und Datennahmeperioden 79
5.5.10 Systematiken beim Fit der ϕ-Resonanz 82
5.5.11 Resultate 84

6 Zusammenfassung und Ausblick 87

A Korrelationsmatrizen 91

B Korrekturen der Teilchenidentifikationseffizienz 93

C Parameter der Fit-Funktionen 97

Abbildungsverzeichnis 99

Tabellenverzeichnis 101

Literaturverzeichnis 103

Danksagungen 109

Einleitung

Die Kopplungsstärke der schwachen Wechselwirkung zwischen u-Quark und s-Quark wird durch $|V_{\mathrm{us}}|$, ein Element der Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (CKM-Matrix) [1] beschrieben. Der aktuelle Weltmittelwert basiert auf Untersuchungen semileptonischer Kaon-Zerfälle [2]. Der Fehler dieser Messungen ist durch die theoretische Unsicherheit des bei dieser Methode auftretenden Formfaktors dominiert [3]. Eine davon experimentell und theoretisch unabhängige Bestimmung von $|V_{\mathrm{us}}|$ kann über hadronische τ-Zerfälle erfolgen. Dazu werden τ-Zerfälle mit Netto-Strangeness, d.h. mit einer ungeraden Anzahl von Kaonen im Endzustand untersucht. $|V_{\mathrm{us}}|$ kann aus dem inklusiven Verzweigungsverhältnis dieser Zerfälle bestimmt werden. Bei ausreichender Statistik ist zudem eine gleichzeitige Bestimmung von $|V_{\mathrm{us}}|$ und m_{s}, der Strangequark-Masse, aus dem Spektrum der invarianten Masse der Hadronen aus Zerfällen mit Netto-Strangeness möglich [4]. Zur Bestimmung dieses Spektrums ist es nötig, alle Zerfälle mit Netto-Strangeness exklusiv zu messen.

Das *BaBar*-Experiment am „Stanford Linear Accelerator Center“ (SLAC) wurde gebaut, um Zerfälle von B-Mesonen und die CP-Verletzung im B-Mesonen-System zu untersuchen [5]. Dazu werden im *BaBar* Detektor e^+e^--Paare bei einer Schwerpunktsenergie von 10,58 $\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$, welche der Masse der $\Upsilon(4S)$-Resonanz entspricht, zur Kollision gebracht. Wegen der großen Anzahl der dabei erzeuten B-Mesonpaare wird das Experiment als „B-Fabrik“ bezeichnet. Der Wirkungsquerschnitt für die Produktion von $\tau^+\tau^-$-Paaren ist vergleichbar mit dem für B-Mesonpaare. Bis September 2007 wurden etwa 440 Millionen $\tau^+\tau^-$-Paare erzeugt.

In dieser Arbeit wird der bis Ende 2006 aufgezeichnete Teil dieses Datensatzes verwendet, er entspricht einer integrierten Luminosität von 384 fb^{-1} und etwa 353 Millionen $\tau^+\tau^-$-Paaren. Untersucht werden τ-Zerfälle mit drei geladenen Hadronen im Endzustand. Dabei werden die Verzweigungsverhältnisse der Zerfallskanäle

$$\begin{aligned}
\tau^- &\to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau, \\
\tau^- &\to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau, \\
\tau^- &\to K^-K^+\pi^-\nu_\tau \text{ und} \\
\tau^- &\to K^-K^+K^-\nu_\tau
\end{aligned}$$

bestimmt. Die Endzustände mit einem und drei Kaonen tragen Netto-Strangeness. Bei Zerfällen mit zwei und drei Kaonen im Endzustand kann die ϕ-Resonanz als kurzlebiger Zwischenzustand auftreten, welche dann in zwei Kaonen zerfällt. Die Verzweigungsverhältnisse der entsprechenden Zerfallskanäle,

$$\begin{aligned}
\tau^- &\to \phi\pi^-\nu_\tau \text{ und} \\
\tau^- &\to \phi K^-\nu_\tau,
\end{aligned}$$

werden ebenfalls bestimmt. Dies geschieht durch eine Analyse der Spektren invarianter Massen der auftretenden Paare entgegengesetzt geladener Kaonen.

Der Zerfall $\tau^- \to \phi K^- \nu_\tau$ ist Cabibbo-unterdrückt und stark phasenraumlimitiert. Er wurde erstmalig 2006 durch die Belle-Kollaboration nachgewiesen und das Verzweigungsverhältnis wurde dabei zu $\mathcal{B}(\tau^- \to \phi K^- \nu_\tau) = (4{,}05 \pm 0{,}25 \pm 0{,}26) \times 10^{-5}$ bestimmt [6]. Der Zerfall $\tau^- \to \phi \pi^- \nu_\tau$ ist OZI-unterdrückt und wurde 2007 von der *BaBar*-Kollaboration in einer Analyse, die der hier vorgestellten ähnlich ist, beobachtet. Das dabei gemessene Verzweigungsverhältnis ist $\mathcal{B}(\tau^- \to \phi \pi^- \nu_\tau) = (3{,}42 \pm 0{,}55 \pm 0{,}25) \times 10^{-5}$ [7].

Ziel der Heidelberger *BaBar*-Gruppe ist eine eigenständige Messung von $|V_{\mathrm{us}}|$, basierend auf dem Datensatz des *BaBar*-Experiments. Die vorliegende Arbeit stellt einen Beitrag zu dieser Messung dar. Neben der Bestimmung der genannten Verzweigungsverhältnisse wird besonderer Wert auf die Untersuchung systematischer Unsicherheiten und ihrer Korrelationen zwischen den Zerfallskanälen gelegt. Ein gutes Verständnis dieser Größen ist für die Kombination aller Zerfälle mit Netto-Strangeness und die Bestimmung von $|V_{\mathrm{us}}|$ essenziell.

Kapitel 1

Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel wird zunächst eine kurze Zusammenfassung der wesentlichen Eigenschaften des Standardmodells der Teilchenphysik gegeben. Anschließend werden Methoden zur Bestimmung des Elements $|V_{\mathrm{us}}|$ der Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (CKM-Matrix) vorgestellt. Die aktuelle experimentelle Bestimmung dieser Größe (genauer gesagt der Weltmittelwert) basiert auf Messungen semileptonischer Kaonzerfälle [2]. Eine alternative Methode nutzt hadronische τ-Zerfälle mit Netto-Strangeness. In der vorliegenden Arbeit werden Zerfälle dieser Art untersucht.

1.1 Das Standardmodell der Teilchenphysik

In den letzten fünfzig Jahren wurden große Anstrengungen unternommen, um ein Verständnis der fundamentalen Bausteine der Materie und der zwischen ihnen stattfindenden Wechselwirkungen zu erlangen. Ein Ergebnis dieser Bemühungen ist eine Quantenfeldtheorie, deren Vorhersagen in sehr guter Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen sind. Sie wird als „Standardmodell der Teilchenphysik“ oder kurz „Standardmodell“ bezeichnet und beschreibt drei der vier bekannten fundamentalen Wechselwirkungen: Die elektromagnetische, starke und schwache Wechselwirkung. Als vierte fundamentale Wechselwirkung konnte die Gravitation bisher nicht in diese Theorie einbezogen werden. Während die Reichweite der elektromagnetischen Wechselwirkung und der Gravitation unendlich ist, ist sie für die starke und schwache Wechselwirkung auf sehr kurze Abstände (etwa 10^{-15} m bzw. 10^{-18} m) beschränkt.

Nach dem Standardmodell ist die gesamte Materie im Universum aus elementaren Spin-1/2-Teilchen (Fermionen) aufgebaut. Die im Standardmodell enthaltenen Wechselwirkungen zwischen diesen Teilchen werden durch Spin-1-Teilchen (Eichbosonen) vermittelt. Sie sind in Tabelle 1.1 aufgelistet. Die Fermionen lassen sich in Leptonen und Quarks unterteilen, welche jeweils in sechs Arten (Flavor) vorkommen. Zu jedem Fermion gibt es ein Antifermion, welches entgegengesetzt geladen ist. Des Weiteren enthält diese Theorie ein Spin-0-Teilchen, das zur Erklärung der Massen der Teilchen benötigt wird. Die Existenz dieses sogenannten Higgs-Bosons konnte bisher nicht experimentell verifiziert werden [2].

Leptonen und Quarks lassen sich, wie in Tabelle 1.2 dargestellt, in jeweils drei Familien oder Generationen anordnen. Alle (bekannte) stabile Materie besteht aus den Fermionen der ersten Generation. Die elektrische Ladung der beiden Teilchen einer

Tabelle 1.1: *Die Eichbosonen des Standardmodells, Austauschteilchen und Vermittler der Wechselwirkungen. Alle aufgeführten Teilchen sind Spin-1-Teilchen [2].*

Wechselwirkung	Eichboson(en)	Ladung [e]
Elektromagnetisch	Photon (γ)	0
Stark	8 Gluonen	0
Schwach	W^+	$+1$
	W^-	-1
	Z^0	0

Tabelle 1.2: *Übersicht der Quarks und Leptonen des Standardmodells der Teilchenphysik und ihre Einordnung in Generationen [2].*

	Ladung [e]	1. Generation		2. Generation		3. Generation	
Quarks	$+2/3$	Up	u	Charm	c	Top	t
	$-1/3$	Down	d	Strange	s	Bottom	b
Leptonen	0	Elektron-Neutrino	ν_e	Myon-Neutrino	ν_μ	Tau-Neutrino	ν_τ
	-1	Elektron	e	Myon	μ	Tauon	τ

Familie unterscheidet sich um eine Elementarladung e. Leptonen tragen Ladung $-1\,e$ oder $0\,e$, Quarks hingegen $+2/3\,e$ oder $-1/3\,e$. Quarks tragen zusätzlich „Farbladung“, die Ladung der starken Wechselwirkung, welche sie in zusammengesetzten Teilchen (Hadronen) bindet. Alle Quarks und Leptonen tragen „schwache Ladung“ und interagieren somit über die schwache Wechselwirkung miteinander. Im Gegensatz zu den anderen Wechselwirkungen ermöglicht die schwache Wechselwirkung den Quarks Übergänge von einer Art zur anderen. Insbesondere sind dabei auch Übergänge zwischen den Quarks verschiedener Generationen möglich. Übergänge sind nur durch den Austausch von $W^\pm$-Bosonen, nicht jedoch durch den Austausch neutraler Z^0-Bosonen möglich. Es sind also nur Übergänge zwischen Quarks mit Ladung $+2/3\,e$ und $-1/3\,e$ möglich. Im Vergleich dazu sind Übergänge zwischen Leptonen im Standardmodell nur innerhalb der Generationen möglich. Für Zerfälle von τ-Leptonen bedeutet dies zum Beispiel, dass immer ein τ-Neutrino (bzw. τ-Antineutrino) entsteht, welches einen Teil des Impulses trägt.

Übergange zwischen den Quarks verschiedener Generationen sind möglich, weil die Eigenzustände der schwachen Wechselwirkung nicht gleich den Masseneigenzuständen sind. Der Zusammenhang zwischen den beiden Arten von Eigenzuständen ist linear und kann als eine Rotation im Flavor-Raum durch die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix

(CKM-Matrix) [1], oder Quarkmischungsmatrix, beschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{\mathrm{ud}} & V_{\mathrm{us}} & V_{\mathrm{ub}} \\ V_{\mathrm{cd}} & V_{\mathrm{cs}} & V_{\mathrm{cb}} \\ V_{\mathrm{td}} & V_{\mathrm{ts}} & V_{\mathrm{tb}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} .$$

Dabei bezeichnet (d', s', b') die Eigenzustände der schwachen Wechselwirkung und (d, s, b) die Masseneigenzustände. Da nur Übergäge zwischen den Quarks unterschiedlicher Ladung möglich sind, genügt es, diese Rotation auf Quarks der Ladung $-1/3\,e$ (d, s, b) zu beschränken. Diese Wahl ist historisch durch die Reihenfolge der Entdeckung der Quarks bedingt [8]. Im Standardmodell ist die CKM-Matrix unitär:

$$\sum_{i=1}^{3} V_{ij} V_{ik}^{\star} = \delta_{jk} \qquad \text{mit } \delta_{jk} = \begin{cases} 1, \; j = k \\ 0, \; j \neq k \end{cases} ,$$

was nichts anderes bedeutet, als dass ein Quark auf jeden Fall in ein Quark übergeht, nicht aber verschwinden kann. Zur Überprüfung dieser Eigenschaft ist es nötig die einzelnen Matrixelemente so präzise wie möglich zu messen. Eine signifikante Abweichung von der Unitarität wäre ein Hinweis auf Physik jenseits des Standardmodells.

1.2 Messungen von $|V_{\mathrm{us}}|$

Die Amplitude für den Übergang von einem s-Quark in ein u-Quark ist proportional zu V_{us}, einem Element der CKM-Matrix. Der Feynmangraph dieses Übergangs ist in Abbildung 1.1 gezeigt. In diesem Abschnitt werden Möglichkeiten zur Messung von $|V_{\mathrm{us}}|$ erläutert. Zunächst wird auf die Methode der Bestimmung aus semileptonischen Kaonzerfällen eingegangen, auf welcher der aktuelle Weltmittelwert basiert [2]. Eine davon unabhängige Methode basiert auf der Untersuchung hadronischer τ-Zerfälle, wie sie in der vorliegenden Arbeit untersucht werden. Sie wird im zweiten Teil dieses Abschnitts erklärt.

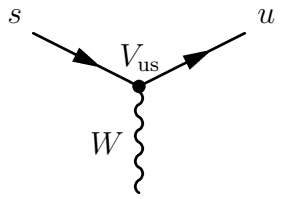


Abbildung 1.1: *Feynmangraph für den Übergang von einem s-Quark in ein u-Quark.*

1.2.1 Semileptonische Kaonzerfälle

Die Bestimmung von $|V_{\mathrm{us}}|$ aus semileptonischen Kaonzerfällen, sogenannten K_{l3}-Zerfällen, basiert auf der Messung der Zerfallsbreite $\Gamma_{K_{l3}} = \Gamma(K \to \pi l \nu_l)$ dieser Zerfälle,

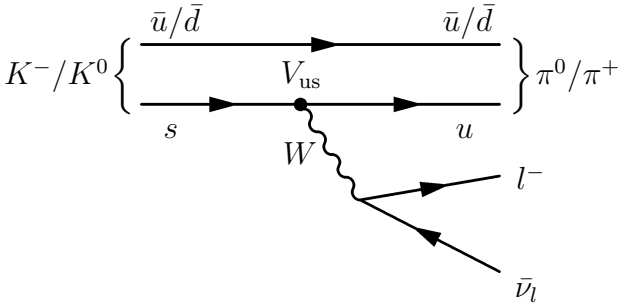


Abbildung 1.2: *Feynmangraph der semileptonischen Kaonzerfälle $K^- \to \pi^0 l^- \nu_l$ und $K^0 \to \pi^+ l^- \nu_l$, wobei $l = e$ oder $l = \mu$ bedeuten kann.*

wobei l für Elektron e oder Myon μ steht. Ein Feynmangraph eines solchen Zerfalls ist in Abbildung 1.2 gezeigt. Die Zerfallsbreite ist gegeben durch [3]:

$$\Gamma_{K_{l3}} = \frac{G_F^2 m_K^5}{192\pi^3} S_{\mathrm{EW}}(1+\delta_K^l) C^2 |V_{\mathrm{us}}|^2 f_+^2(0) I_K^l.$$

Dabei ist G_F die Fermi-Konstante, m_K bezeichnet die Kaon-Masse, S_{EW} und δ_K^l sind Strahlungskorrekturen für kleine bzw. große Abstände. $f_+(0)$ ist der berechnete Formfaktor für den Übergang zwischen Kaon und Pion bei Impulsübertrag Null an das $l\nu$-System. Er berücksichtigt, dass das K-Meson und das π-Meson aus Quarks zusammengesetzt sind. I_K^l ist das Phasenraumintegral und C^2 beträgt 1 für neutrale und 1/2 für geladene Kaonen [3]. Die aufgezählten Größen sind aus Messungen oder theoretischen Rechnungen bekannt. Mit einer Messung der Zerfallsbreite $\Gamma_{K_{l3}}$ erhält man somit einen Wert für $|V_{\mathrm{us}}|$. Der aktuelle Weltmittelwert, der ausschließlich auf Messungen dieser Art basiert, ist [2]:

$$|V_{\mathrm{us}}| = 0{,}2257 \pm 0{,}0021.$$

Der relative Fehler beträgt etwa 0,9 %. Der Wert des verwendeten Formfaktors $f_+(0)$ stammt aus theoretischen Rechnungen, sein relativer Fehler beträgt etwa 0,8 % [3]. Er liefert somit den dominanten Beitrag zur Unsicherheit von $|V_{\mathrm{us}}|$ und limitiert die Genauigkeit dieser Methode. Andere Berechnungen von $f_+(0)$ führen zu Werten, die um bis zu 2 % von dem verwendeten Wert abweichen (bei relativen Fehlern von etwa 1 %) [2].

1.2.2 Hadronische τ-Zerfälle

Im Unterschied zur Bestimmung von $|V_{\mathrm{us}}|$ aus semileptonischen Kaonzerfällen ist die Genauigkeit der Bestimmung aus hadronischen τ-Zerfällen nicht durch die Unsicherheit eines Formfaktors limitiert.[1] Im Folgenden werden drei ähnliche Möglichkeiten zur Bestimmung von $|V_{\mathrm{us}}|$ vorgestellt.

[1] Bei den τ-Zerfällen in hadronische Endzustände treten natürlich auch Formfaktoren auf. Zur Bestimmung von $|V_{\mathrm{us}}|$ ist jedoch nur von Bedeutung, dass ein $s\bar{u}$-Quarkpaar erzeugt wird (siehe weiter unten). Es handelt sich also quasi um eine inklusive Messung aller hadronischer Endzustände mit Strangeness, auch wenn die einzelnen Endzustände exklusiv rekonstruiert werden.

Möglichkeit 1: Die Methode wird anhand von Abbildung 1.3 veranschaulicht. Gezeigt sind Feynmangraphen der Zerfälle $\tau^- \to s\bar{u}\nu_\tau$ und $\tau^- \to e^-\nu_\tau\bar{\nu}_e$. Das $s\bar{u}$-Quarkpaar kann dabei ein einzelnes Kaon bilden oder weiter hadronisieren. Zerfälle dieser Art werden im Folgenden als Zerfälle mit Netto-Strangeness bezeichnet. Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Zerfällen ist das Auftreten des Matrixelements V_{us} beim hadronischen Zerfall. Unter Berücksichtigung der Anzahl der Quark-

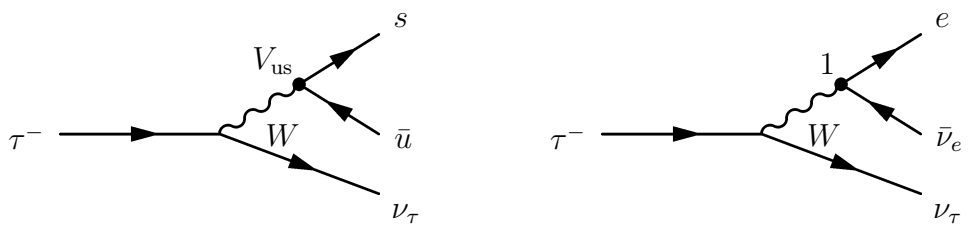


Abbildung 1.3: *Feynmangraphen eines hadronischen τ-Zerfalls mit Netto-Strangeness und eines leptonischen τ-Zerfalls. Das $s\bar{u}$-Quarkpaar kann ein Kaon bilden oder hadronisieren (z.B. in $K^-\pi^+\pi^-$).*

farben (Colors), $N_C = 3$, ist aus den Feynmangraphen der wesentliche Teil des Zusammenhangs zwischen den Zerfallsbreiten Γ ersichtlich. Dieser ist gegeben durch [4]:

$$R_{\tau,\mathrm{S}} \equiv \frac{\Gamma(\tau^- \to h_{\mathrm{S}}\,\nu_\tau(\gamma))}{\Gamma(\tau^- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau(\gamma))} \equiv \frac{\Gamma(\tau^- \to s\bar{u}\nu_\tau(\gamma))}{\Gamma(\tau^- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau(\gamma))} = N_C|V_{\mathrm{us}}|^2 S_{\mathrm{EW}}(1+\delta(m_{\mathrm{s}})), \quad (1.1)$$

wobei h_{S} für die hadronischen Enzustände mit Netto-Strangeness steht. $S_{\mathrm{EW}} = 1{,}0201 \pm 0{,}0003$ [4] ist eine elektroschwache Strahlungskorrektur und mit $\delta(m_{\mathrm{s}})$ sind zusammenfassend Korrekturen bezeichnet, die zum Teil von der Strangequark-Masse m_{s} abhängen. Die Korrekturen können aus der Theorie berechnet werden und somit $|V_{\mathrm{us}}|$ bestimmt werden.

Möglichkeit 2: Von Vorteil ist jedoch die getrennte Messung von Cabibbo-erlaubten τ-Zerfällen ohne Netto-Strangeness und Cabibbo-unterdrückten τ-Zerfällen mit Netto-Strangeness. Bei dieser Methode der Bestimmung von $|V_{\mathrm{us}}|$ sind die theoretischen Unsicherheiten kleiner. Analog zu den Zerfällen mit Strangeness im Endzustand wird die Größe

$$R_{\tau,\mathrm{NS}} \equiv \frac{\Gamma(\tau^- \to h_{\mathrm{NS}}\,\nu_\tau(\gamma))}{\Gamma(\tau^- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau(\gamma))} \equiv \frac{\Gamma(\tau^- \to d\bar{u}\nu_\tau(\gamma))}{\Gamma(\tau^- \to e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau(\gamma))} \quad (1.2)$$

für τ-Zerfälle mit hadronischen Endzuständen ohne Strangeness h_{NS} definiert. In der Differenz

$$\delta R_\tau(m_{\mathrm{s}}) \equiv \frac{R_{\tau,\mathrm{NS}}}{|V_{\mathrm{ud}}|^2} - \frac{R_{\tau,\mathrm{S}}}{|V_{\mathrm{us}}|^2} \quad (1.3)$$

fallen die meisten theoretischen Unsicherheiten heraus. Übrig bleiben nur diejenigen, die auf der Symmetriebrechung durch die unterschiedlichen Quarkmassen beruhen (SU(3)-Flavorsymmetriebrechung) [4]. Im Fall gleicher (insbesondere verschwindender) Quarkmassen wäre die Größe $\delta R_\tau(m_{\mathrm{s}})$ Null. Im Fall der tatsächlichen Quarkmassen handelt es sich um eine Korrektur, die klein im Vergleich zu $\frac{R_{\tau,\mathrm{NS}}}{|V_{\mathrm{ud}}|^2}$ und $\frac{R_{\tau,\mathrm{S}}}{|V_{\mathrm{us}}|^2}$ ist. Sie kann aus der

Theorie berechnet werden und wird von der Strangequark-Masse, die deutlich größer als die Masse von Up- und Down-Quark ist, dominiert. Die Größen $R_{\tau,\mathrm{NS}}$ und $|V_{\mathrm{ud}}|$ sind mit guter Genauigkeit gemessen. Aus einer Messung von $R_{\tau,\mathrm{S}}$ erhält man somit einen Wert für $|V_{\mathrm{us}}|$. In [9] wurde mit dieser Methode der Wert

$$|V_{\mathrm{us}}| = 0{,}2165 \pm 0{,}0026_{\mathrm{exp}} \pm 0{,}0005_{\mathrm{th}}$$

ermittelt. Dabei gingen Messungen der Experimente ALEPH, OPAL und CLEO sowie kürzlich durchgeführte Messungen von *BaBar* und Belle ein. Der Fehler wird dominiert von der Unsicherheit der Zerfallsbreite der τ-Zerfällen in Endzustände mit Netto-Strangeness: $\Gamma(\tau^- \to h_{\mathrm{S}}\, \nu_\tau(\gamma))$. Mit den großen τ-Datensätzen von *BaBar* und Belle kann diese Unsicherheit deutlich reduziert werden. Die vorliegende Arbeit stellt einen Beitrag zu dieser Verbesserung dar.

Möglichkeit 3: Da $\delta R_\tau(m_{\mathrm{s}})$ von der Strangequark-Masse m_{s} abhängt, muss deren Wert zur Bestimmung von $|V_{\mathrm{us}}|$ eingebracht werden. Andersherum ist bei Vorgabe von $|V_{\mathrm{us}}|$ auch eine Bestimmung von m_{s} möglich. Eine Erweiterung der beschriebenen Methode 2 erlaubt eine gleichzeitige Bestimmung von $|V_{\mathrm{us}}|$ und m_{s}. Dazu werden die Spektren der invarianten Massen m_h der hadronischen Endzustände betrachtet. Für die Zerfälle mit und ohne Netto-Strangeness werden wie folgt die Momente $R^{kl}_{\tau,\mathrm{S}}$ und $R^{kl}_{\tau,\mathrm{NS}}$ definiert:

$$R^{kl}_{\tau,\mathrm{S/NS}} = \int_0^{m_\tau^2} dm_h^2 \left(1 - \frac{m_h^2}{m_\tau^2}\right)^k \left(\frac{m_h^2}{m_\tau^2}\right)^l \frac{dR_{\tau,\mathrm{S/NS}}}{dm_h^2}.$$

Für $k = 0$ und $l = 0$ entsprechen diese Momente gerade den in Gleichung 1.1 und 1.2 definierten Größen: $R^{00}_{\tau,\mathrm{S/NS}} = R_{\tau,\mathrm{S/NS}}$. Entsprechend lässt sich auch Gleichung 1.3 erweitern

$$\delta R^{kl}_\tau(m_s) \equiv \frac{R^{kl}_{\tau,\mathrm{NS}}}{|V_{\mathrm{ud}}|^2} - \frac{R^{kl}_{\tau,\mathrm{S}}}{|V_{\mathrm{us}}|^2},$$

wobei die $\delta R^{kl}_\tau(m_s)$ aus der Theorie berechnet werden können (in Abhängigkeit von m_{s}). Eine Bestimmung mehrerer Momente erlaubt somit die gleichzeitige Bestimmung des CKM-Matrixelements $|V_{\mathrm{us}}|$ und der Strangequark-Masse m_{s} [4]. Voraussetzung dafür ist, dass die Spektren der invarianten Massen der hadronischen Endzustände gut genug bekannt sind. Die größte Unsicherheit basiert derzeit auf dem Spektrum der τ-Zerfälle mit Netto-Strangeness. Mit den großen τ-Datensätzen der Experimente *BaBar* und Belle sollte es möglich sein, diese deutlich zu reduzieren.

Kapitel 2

Das *BABAR*-Experiment

Das 1999 in Betrieb genommene *BABAR*-Experiment am „Stanford Linear Accelerator Center“ (SLAC) in der Nähe von San Francisco wurde mit dem primären Ziel gebaut, Zerfälle von B-Mesonen und die CP-Verletzung im B-Mesonen-System zu untersuchen [5]. Die B-Mesonen stammen aus $B\bar{B}$-Paaren, welche in e^+e^--Kollisionen der Speicherringanlage PEP-II („Positron Electron Project“) erzeugt werden. Der Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung von $\tau^+\tau^-$-Paaren ($\sigma_{\tau^+\tau^-} = 0{,}919\,\mathrm{nb}$ [10]) ist in diesen Kollisionen vergleichbar mit dem für die Erzeugung der $B\bar{B}$-Paare ($\sigma_{B\bar{B}} = 1{,}05\,\mathrm{nb}$ [11]). Wegen der damit verbundenen großen Anzahl an $\tau^+\tau^-$-Paaren (etwa 440 Millionen bis September 2007) ist das Experiment auch gut für die Untersuchung von τ-Zerfällen geeignet. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit solchen Zerfällen.

Dieses Kapitel befasst sich mit den Grundlagen des *BABAR*-Experiments. In den ersten beiden Abschnitten wird auf die wichtigsten Eigenschaften der Speicherringanlage PEP-II und des *BABAR*-Detektors eingegangen. Abschnitt 2.3 befasst sich mit der Teilchenidentifikation im *BABAR*-Experiment. Die bisher im Experiment aufgezeichneten Daten sowie Datensätze simulierter Ereignisse werden in Abschnitt 2.4 behandelt.

2.1 Die Speicherringanlage PEP-II

Der *BABAR*-Detektor befindet sich an der Speicherringanlage PEP-II, in welcher e^+e^--Paare bei einer Schwerpunktsenergie von 10,58 GeV zur Kollision gebracht werden. Diese Energie entspricht der Masse der $\Upsilon(4S)$-Resonanz, die zu mehr als 96 % in $B\bar{B}$-Paare zerfällt [2]. In den zur Kollision gebrachten e^+e^--Paaren haben die Elektronen Energien von 9,0 GeV und die Positronen Energien von 3,1 GeV. Das Schwerpunktsystem der $\Upsilon(4S)$-Resonanz ist deshalb mit $\beta\gamma = 0{,}56$ geboostet. Dieser Boost ermöglicht eine Rekonstruktion der Zerfallsvertizes der B-Mesonen zur Bestimmung der relativen Zerfallslängen und somit eine Messung der Zeitabhängigkeit der Zerfälle.

Die Elektronen und Positronen werden in einem etwa 3 km langen Linearbeschleuniger auf die entsprechenden Energien gebracht, bevor sie in die übereinander liegenden Speicherringe[1] von PEP-II injiziert werden. Eine schematische Übersicht von Linearbeschleuniger und Speicherringen ist in Abbildung 2.1 gegeben. Das ursprüngliche Ziel von Luminositäten um $3 \times 10^{33}\,\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$ [12] wird inzwischen durch Luminositäten

[1] Wegen der unterschiedlichen Energien sind zwei Speicherringe erforderlich.

größer als $10^{34}\,\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$ übertroffen [13].

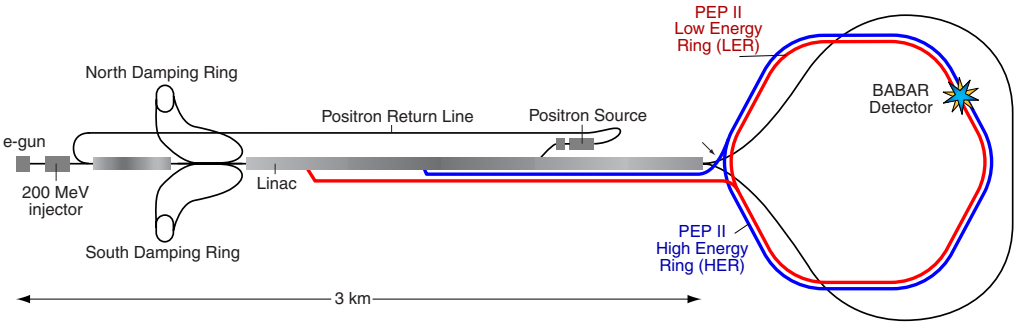


Abbildung 2.1: *Schematische Darstellung des Linearbeschleunigers und der PEP-II-Speicherringe [14]. Im Bild befindet sich der BaBar-Detektor oben rechts.*

2.2 Der *BaBar*-Detektor

Dieser Abschnitt ist eine kurze Beschreibung der einzelnen Detektorkomponenten des *BaBar*-Detektorsystems. Eine ausführliche Behandlung der Komponenten ist in [11] und [12] gegeben.

In Abbildung 2.2 ist ein schematischer Längsschnitt des *BaBar*-Detektors gezeigt. Wegen des Boosts des Schwerpunktsystems ist der Detektor asymmetrisch bezüglich Vorwärts- und Rückwartsrichtung. Seine Komponenten sind radialsymmetrisch um die Strahlachse angeordnet. Am dichtesten an der Strahlachse befindet sich das Spurkammersystem, bestehend aus dem Siliziumvertexdetekor nahe dem Wechselwirkungspunkt und der Driftkammer. Die Driftkammer ist von den Quarzstäben des Čerenkov-Detektors umgeben. Weiter außen befindet sich das elektromagnetische Kalorimeter. Die bisher genannten Komponenten werden von einer supraleitenden Spule umschlossen, die ein Magnetfeld von 1,5 T in ihrem Inneren erzeugt. Es ermöglicht eine Impulsmessung geladener Teilchen im Spurkammersystem. Der magnetische Fluss wird durch ein Eisenjoch „zurückgeführt“, das die Spule umgibt. Es ist mit Ionisationsdetektoren versehen, welche eine gleichzeitige Verwendung zum Nachweis von Myonen erlauben.

Siliziumvertexdetektor

Der Siliziumvertexdetektor bildet zusammen mit der Driftkammer das Spurkammersystem, welches zum Nachweis geladener Teilchen und zur Messung ihrer Impulse benötigt wird. Des Weiteren wird die Messung des spezifischen Energieverlusts dE/dx zur Teilchenidentifikation genutzt (Abschnitt 2.3). Der Detektor besteht aus doppelseitigen Siliziumstreifendetektoren, deren Anordnung um die Strahlachse in Abbildung 2.3 im Querschnitt dargestellt ist.

Zur Messung der CP-Asymmetrie in B-Mesonzerfällen muss die mittlere Vertexauflösung entlang der Strahlachse besser als $80\,\mu$m sein [12], was durch den Silizium-

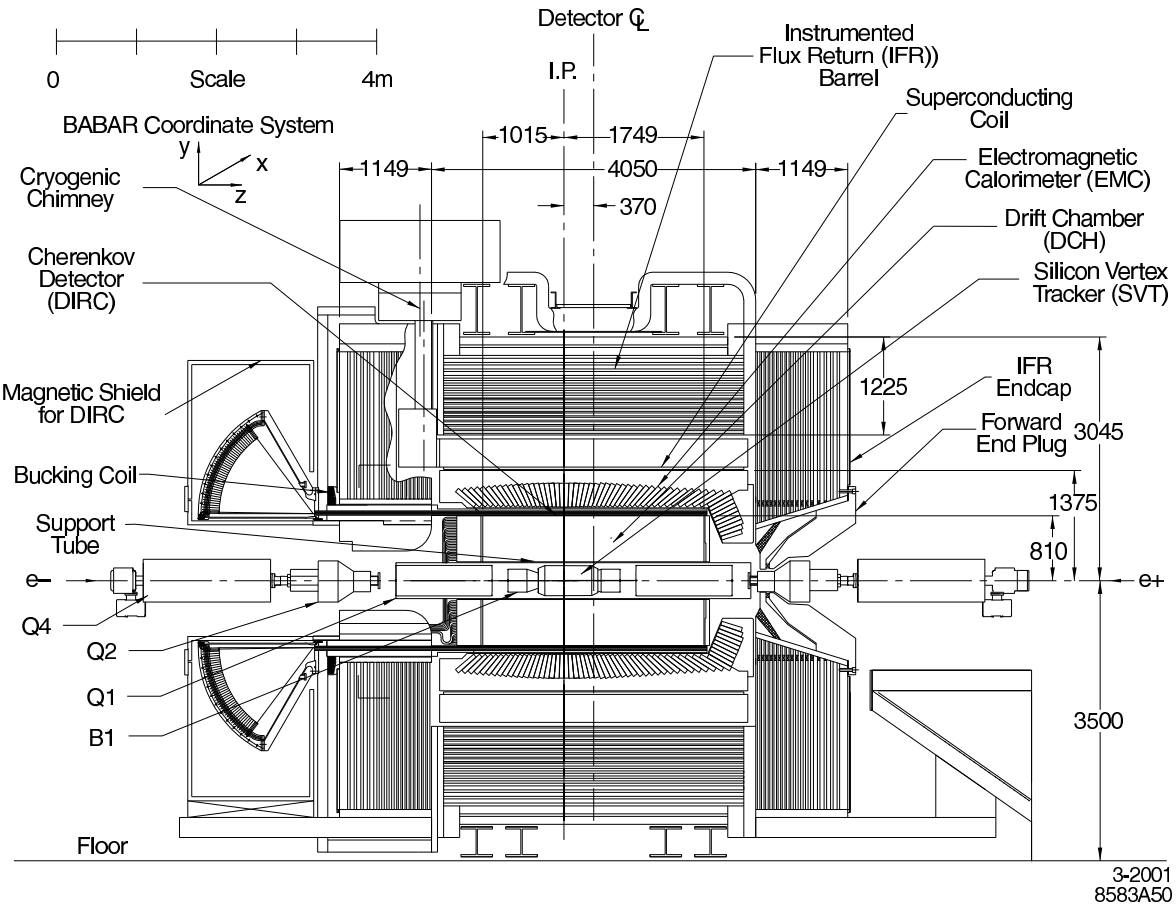


Abbildung 2.2: *Längsschnitt des BaBar-Detektors [12]. Im Bild fallen Elektronen (*9,0 GeV*) von links und Positronen (*3,1 GeV*) von rechts ein. Das Schwerpunktsystem ist im Bild also nach rechts geboostet. Wenn nicht anders vermerkt, sind Längenangaben hier und im Rest des Abschnitts in Millimetern.*

vertexdetektor gewährleistet wird. Er deckt den Polarwinkelbereich von 20° bis 150° ab.

Driftkammer

Während der Siliziumvertexdetektor vor allem zur Orts- und Winkelmessung nahe des Wechselwirkungspunkts dient, trägt die Driftkammer vor allem zur Messung des Transversalimpulses aus der Bahnkrümmung bei. Außerdem kann sie zur Messung des spezifischen Energieverlusts (dE/dx) durch Ionisation verwendet werden.

Die Driftkammer besteht aus 40 Lagen hexagonaler Zellen, die bis zu 40 Orts- und Ionisationsverlustmessungen erlauben. Längs- und Querschnitt der Driftkammer sind in Abbildung 2.4 gezeigt. Durch eine kleine Neigung von 24 der 40 Drähte gegenüber der Strahlachse kann neben der Messung in transversaler Richtung auch Ortsinformation in Richtung der Strahlachse gewonnen werden.

Die dE/dx-Messung erlaubt eine Trennung von Pionen und Kaonen bis zu Impulsen von 700 $\frac{\text{MeV}}{\text{c}}$. Diese Möglichkeit ist komplementär zur der des Čerenkov-Detektors

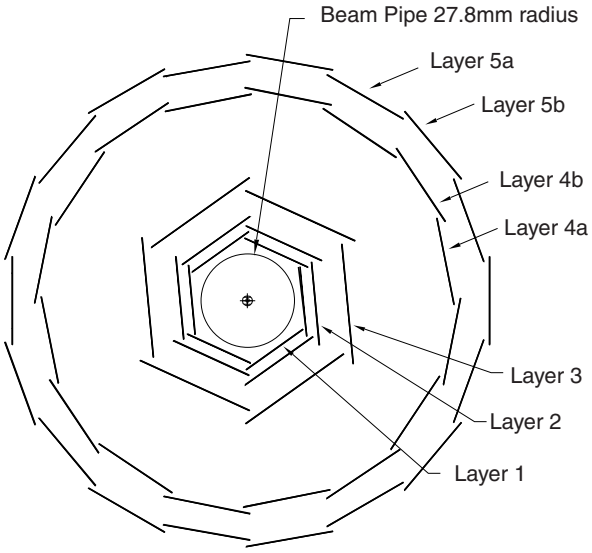


Abbildung 2.3: *Querschnitt des Siliziumvertexdetektors [12]. Mit eingezeichnet ist der Querschnitt des Strahlrohrs mit einem Radius von* 27,8 *mm.*

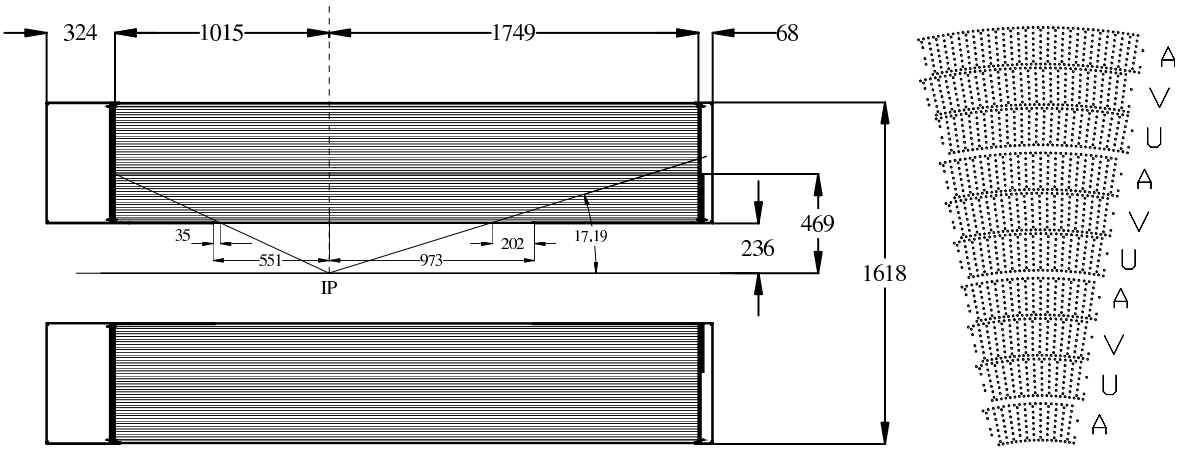


Abbildung 2.4: *Längsschnitt der Driftkammer (links) und Querschnitt eines Segments davon (rechts). Im Querschnitt bezeichnen A, U und V die verschiedenen Neigungen der Drähte gegenüber der Strahlachse. [11]*

[12]. Die mittlere Auflösung der einzelnen Ortsmessungen beträgt 125 μm [15]. Bei Kombination der Messungen von Siliziumvertexdetektor und Spurkammer beträgt die Auflösung der Messung des Transversalimpulses p_t [12]

$$\sigma_{p_t}/p_t = (0{,}13 \pm 0{,}01)\,\% \times p_t\,[\mathrm{GeV}] + (0{,}45 \pm 0{,}03)\,\%.$$

Čerenkov-Detektor

Der Čerenkov-Detektor wird zur Identifikation geladener Teilchen, insbesondere zur Unterscheidung zwischen Pionen und Kaonen, verwendet (nähres dazu in Abschnitt

2.3). Bis zu Impulsen von etwa $4\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}}$ erlaubt er eine $4\,\sigma$ Trennung von Pionen und Kaonen.

Um die Energieauflösung des Kalorimeters so wenig wie möglich einzuschränken, muss das Medium, in dem das Čerenkov-Licht emittiert wird, dünn im Sinne der Strahlungslänge sein. Um die Driftkammer sind 144 Quarzstäbe des Brechungsindex $n = 1{,}473$ mit einer Dicke von 17 mm ($\widehat{=}\,0{,}17X_0$ bis $0{,}30X_0$, je nach Polarwinkel) und einer Breite von 35 mm angebracht. Sie dienen gleichzeitig als Medium zur Emission von Čerenkov-Licht und als Lichtleiter. Das Funktionsprinzip des im *BaBar*-Experiment verwendeten Čerenkov-Detektors ist in Abbildung 2.5 illustriert.

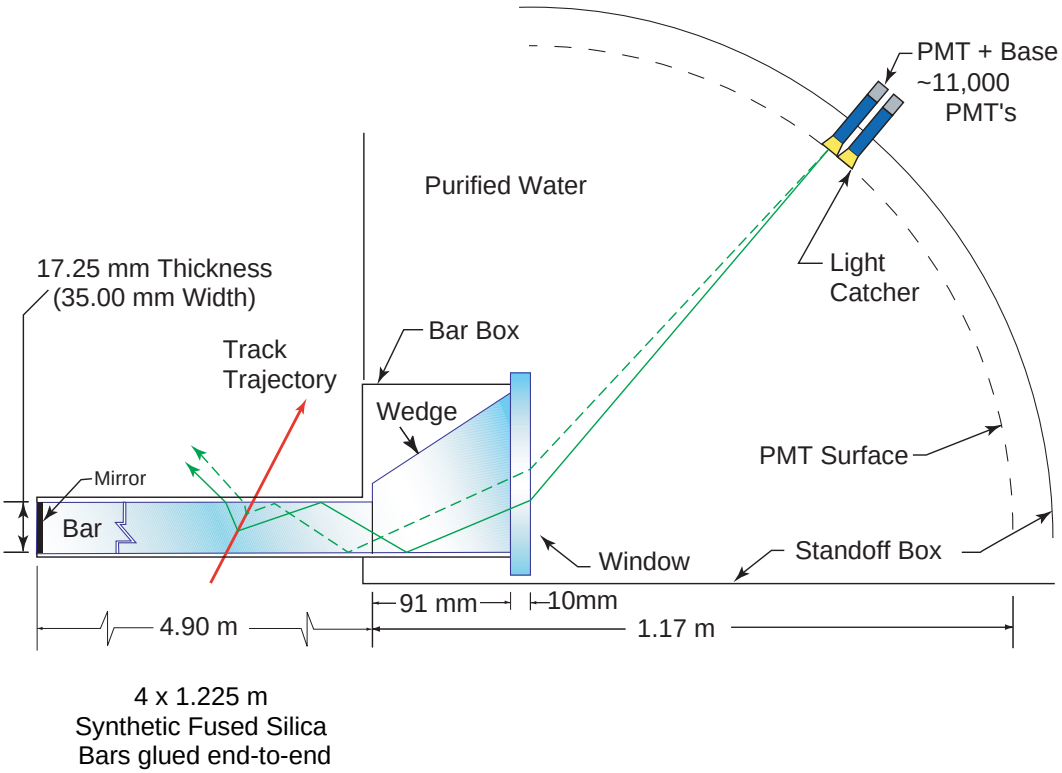


Abbildung 2.5: *Funktionsprinzip des Čerenkov-Detektors (DIRC). Schematisch eingezeichnet ist die Trajektorie eines geladenen Teilchens (rot), das im Quarzstab (blau) Photonen (grün) emittiert. Die Photonen werden in einer Anordnung von Sekundärelektronenvervielfachern nachgewiesen. [14]*

Ein Teilchen emittiert (wenn es schnell genug ist, d.h. $\beta > 1/n$) Čerenkov-Licht im Quarzstab, wobei Ort und Richtung des Teilchendurchgangs aus der Spurinformation bekannt sind. Das Licht des Čerenkov-Lichtkegels gelangt durch Totalreflexion an das Ende des Quarzstabs. Der Čerenkov-Winkel θ_C wird dabei erhalten. Am Ende des Quarzstabs gehen die Photonen in einen Wassertank über. An dessen Rückwand sind etwa 11 000 Sekundärelektronenvervielfacher angebracht, mit deren Hilfe die Photonen nachgewiesen werden und θ_C rekonstruiert wird. Wegen dieses Funktionsprinzips wird der Detektor als DIRC, ein Akronym für „Detector of Internally Reflected Čerenkov light“, bezeichnet.

Elektromagnetisches Kalorimeter

Das elektromagnetische Kalorimeter dient zur Messung der Energie, Position und Form elektromagnetischer Schauer. Zusammen mit dem Spurkammersystem kann die Größe E/p bestimmt werden. Sie ist neben der transversalen Form des Schauers eine mit dem Kalorimeter bestimmte Größe, die zur Teilchenidentifikation benutzt werden kann.

Ein Längsschnitt des Kalorimeters ist in Abbildung 2.6 gezeigt. Es ist aufgebaut aus Cäsiumjodid-Kristallen, die mit Thallium dotiert sind (CsI(Tl)). Sie besitzen eine Länge von etwa 17 Strahlungslängen und einen Durchmesser, der dem Molière-Radius ($R_M = 4{,}13\,\mathrm{cm}$ [2]) vergleichbar ist. Das in den Kristallen erzeugte Szintillationslicht wird am Ende der Kristalle von Silizium-Photodioden detektiert.

Die Energieauflösung lässt sich durch die folgende empirische Formel beschreiben [12]:

$$\frac{\sigma_E}{E} = \frac{(2{,}32 \pm 0{,}30)\,\%}{\sqrt[4]{E(\mathrm{GeV})}} \oplus (1{,}85 \pm 0{,}12)\,\%.$$

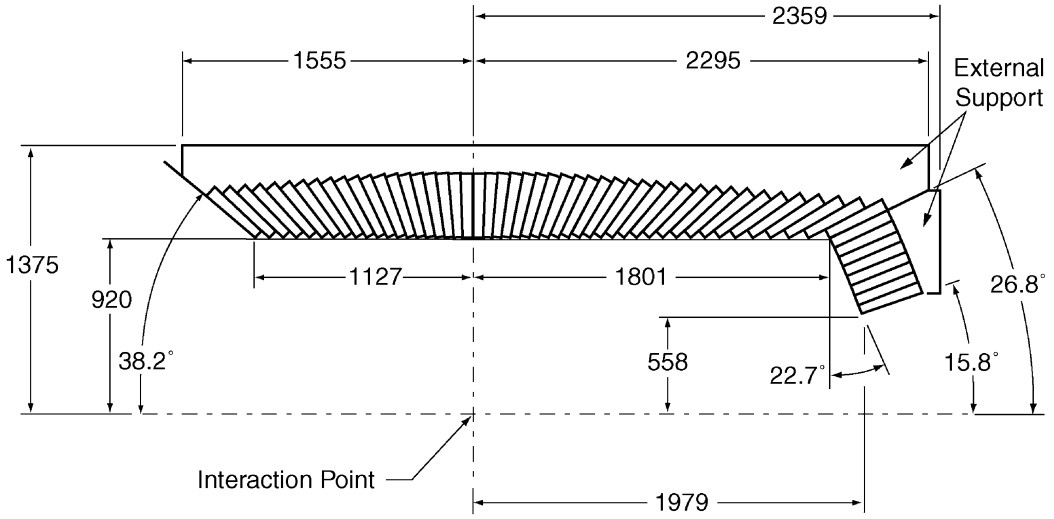


Abbildung 2.6: *Längsschnitt des elektromagnetischen Kalorimeters [12]. Wegen des relativistischen Boosts des Schwerpunktsystems der e^+e^--Kollision ist die Anordnung der Kristalle asymmetrisch.*

Spule und instrumentiertes Eisenjoch

Die bisher beschriebenen Detektorkomponenten werden von einer supraleitenden Spule umgeben. Sie erzeugt ein Feld, das in ihrem Inneren eine Stärke von 1,5 T besitzt und dort parallel zur Strahlachse ist. Der magnetische Fluss wird über ein Eisenjoch „zurückgeführt“, das in Abbildung 2.7 dargestellt ist.

Zwischen den Platten des Eisenjochs sind in 19 Lagen Ionisationsdetektoren angebracht. Die zu Beginn des Experiments (1999) verwendeten „Resistive Plate Chambers“ (RPCs) wurden inzwischen komplett durch „Limited Streamer Tubes“ (LSTs) ersetzt.

Dieses „instrumentierte Eisenjoch“ dient der Identifikation von Myonen sowie dem Nachweis neutraler Teilchen (vor allem K_L^0-Mesonen und Neutronen) [11].

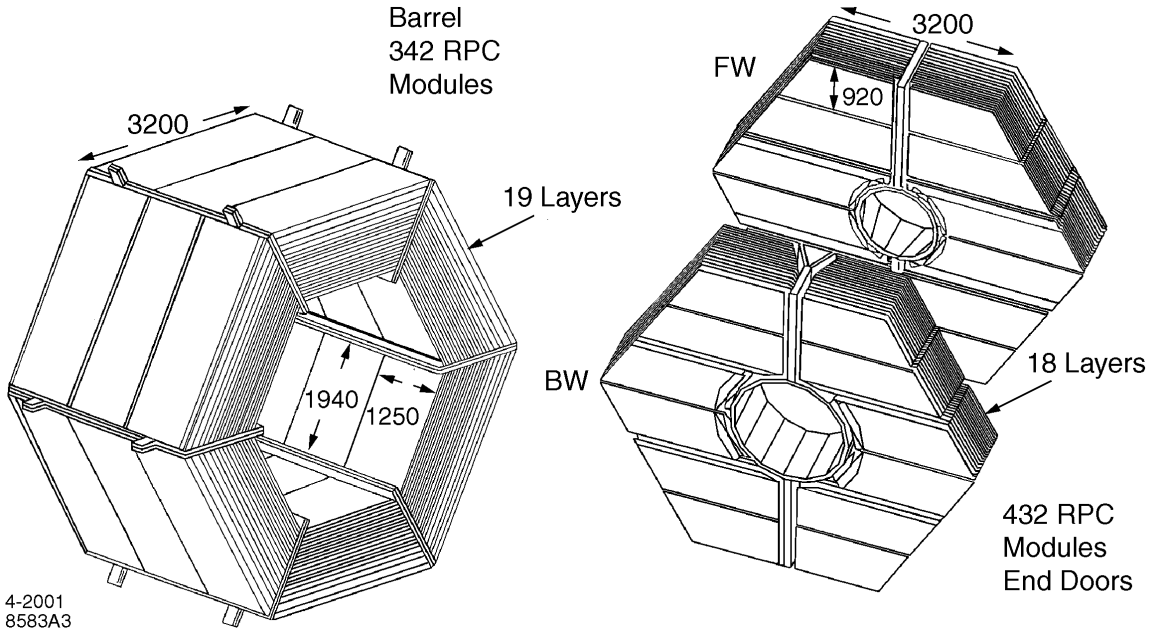


Abbildung 2.7: *Instrumentiertes Eisenjoch bestehend aus einem „Zylinder“ (links) und zwei Endkappen (rechts) [12].*

2.3 Teilchenidentifikation

In diesem Abschnitt wird auf die Methoden zur Teilchenidentifkation beim *BaBar*-Experiment eingegangen. Nach einer kurzen Beschreibung der Messgrößen in Abschnitt 2.3.1 werden in Abschnitt 2.3.2 die Kriterien der Teilchenidentifikation aufgelistet, die in dieser Arbeit Verwendung finden. Abschnitt 2.3.3 befasst sich mit den unterschiedlichen Effizienzen in Daten und simulierten Ereignissen und den damit verbundenen notwendigen Korrekturen.

2.3.1 Messgrößen der Teilchenidentifikation

Der Nachweis von Teilchen erfolgt durch die Wechselwirkung mit den verschiedenen Subdetektoren. Geladene Teilchen können durch Ionisation im Spurkammersystem nachgewiesen werden. Die Rekonstuktion ihrer Trajektorie [11], die wegen des Magnetfelds gekrümmt ist, erlaubt eine Impulsmessung. Photonen hingegen wechselwirken im Idealfall nicht mit dem Spurkammersystem und deponieren, genau wie Elektronen, ihre gesamte Energie im elektromagnetischen Kalorimeter. Signale im instrumentierten Eisenjoch stammen von Myonen und von Hadronenschauern. Neben diesen Merkmalen hängen der spezifische Energieverlust, der Čerenkov-Winkel und die Schauerform im elektromagnetischen Kalorimeter von der Art der Teilchen ab und können somit zu deren Unterscheidung genutzt werden. Sie werden im Folgenden kurz erläutert.

Spezifischer Energieverlust

Für geladene Teilchen, außer Elektronen[2], wird der Energieverlust in Materie bei nicht zu großen Energien dominiert von Verlusten durch Ionisation und atomare Anregungen. Der spezifische Energieverlust dE/dx wird durch die Bethe-Bloch-Formel beschrieben [2]:

$$-\frac{dE}{dx} = Kz^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta(\beta\gamma)}{2} \right].$$

Dabei ist K eine Konstante, ze ist die Ladung des ionisierenden Teilchens, Z und A sind die Ordnungs- und die Massenzahl des durchquerten Materials, $T_{\max}$ bezeichnet den maximalen Energieübertrag an ein freies Elektron in einer Kollision, I ist die mittlere Anregungsenergie und $\delta(\beta\gamma)$ eine Korrektur des Dichteeffekts [2]. Der Energieverlust hängt von der Geschwindigkeit des ionisierenden Teilchens ab. Abbildung 2.8 zeigt den Energieverlust verschiedener Teilchenspezies in Abhängigkeit ihres Impulses. Daraus ist ersichtlich, dass eine Messung von dE/dx, wie sie beim *BaBar*-Experiment im Spurkammersystem möglich ist, eine Unterscheidung zwischen den Teilchenarten bei kleinen Impulsen erlaubt.

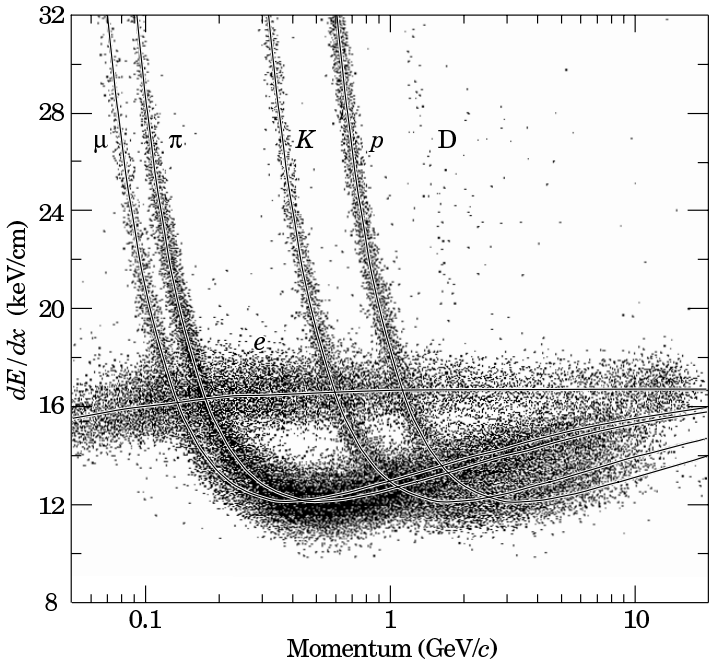


Abbildung 2.8: *Spezifischer Energieverlust dE/dx als Funktion des Laborimpulses [17]. Die waagerechte „Linie“ bezeichnet Elektronen.*

Čerenkov-Winkel

Bewegt sich ein geladenes Teilchen in einem Medium schneller als die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts in diesem Medium, so werden unter einem bestimmten Winkel

[2] Wegen der kleinen Masse der Elektronen dominiert bereits bei kleinen Energien der Energieverlust durch Bremsstrahlung: $\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Brems.}} / \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{Ion.}} \sim \frac{ZE}{580\,\text{MeV}}$ [16].

Photonen emittiert (Čerenkov-Lichtkegel). Die Beziehung zwischen dem Abstrahlungswinkel θ_C der Photonen, dem Brechungsindex n des Mediums und $\beta = v/c$ mit der Geschwindigkeit v des Teilchens und der Lichtgeschwindigkeit c (im Vakuum) ist:

$$\cos\theta_C = \frac{1}{n\beta} = \frac{\sqrt{1+\frac{m^2c^2}{p^2}}}{n},$$

wobei m die Masse des Teilchens bezeichnet. Teilchen unterschiedlicher Masse m strahlen bei gleichem Impuls p also unter unterschiedlichen Winkeln Čerenkov-Licht ab. In Abbildung 2.9 ist für verschiedene Teilchenspezies der Čerenkov-Winkel gegen den Laborimpuls aufgetragen. Die Messung von θ_C erlaubt vor allem eine gute Unterscheidung zwischen geladenen Pionen und Kaonen bis zu Impulsen über $4\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}}$.

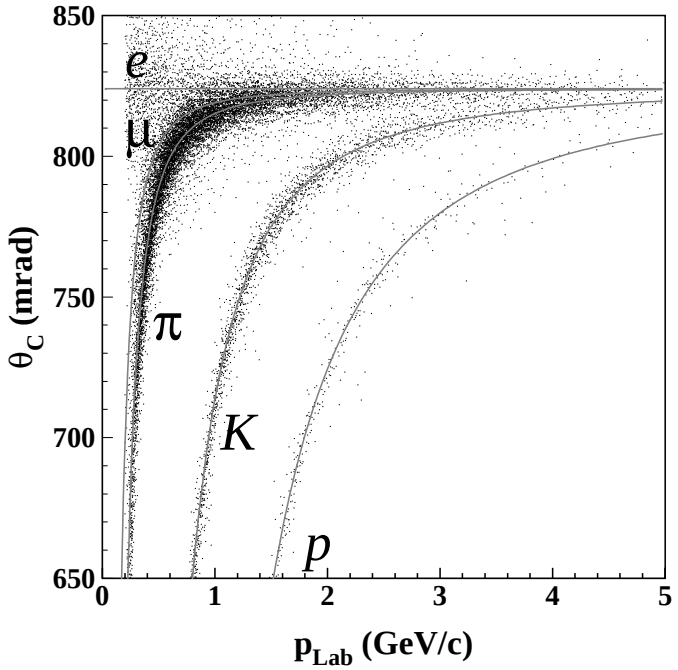


Abbildung 2.9: *Čerenkov-Winkel θ_C als Funktion des Teilchenimpulses im Laborsystem p_{Lab} [14].*

Schauerform im elektromagnetischen Kalorimeter

Elektronen und Photonen erzeugen in den Kristallen des Kalorimeters elektromagnetische Schauer und deponieren auf diese Weise quasi ihre gesamte Energie E. Für Elektronen, deren Impuls p im Spurkammersystem gemessen werden kann, ist das Verhältnis E/p etwa $1\,(c)$. Im Gegensatz dazu deponieren Myonen als minimal ionisierende Teilchen nur einen kleinen Anteil ihrer Energie im Kalorimeter [11]. Sie deponieren zudem nur in vereinzelten Kristallen Energie. Im Gegensatz dazu wird die Energie elektromagnetischer Schauer in etwa $10-15$ Kristallen deponiert [18].

Hadronen erzeugen ebenso wie Myonen keine elektromagnetischen Schauer. Über die starke Wechselwirkung können sie jedoch hadronische Schauer erzeugen und somit einen Großteil ihrer Energie im elektromagnetischen Kalorimeter deponieren. Ist letzteres der Fall, so sind sie anhand der Größe E/p schwer von Elektronen zu unterscheiden [11]. Als weiteres Unterscheidungsmerkmal dient in diesem Fall die transversale Ausdehnung des Schauers. Während elektromagnetische Schauer einen Großteil ihrer Energie in 2 bis 3 Kristallen deponieren, sind hadronische Schauer weniger konzentriert und haben größere Energiedepositionen bei größeren Abständen [19]. Ein Maß für die Schauerbreite ist das laterale Moment LAT [11]:

$$LAT = \frac{\sum_{i=3}^{N} (E_i r_i^2)}{\sum_{i=3}^{N} (E_i r_i^2) + E_1 r_0^2 + E_2 r_0^2}. \tag{2.1}$$

Dabei ist E_i die im i-ten Kristall deponierte Energie, und die Indizierung ist so gewählt, dass $E_1 > E_2 > \cdots > E_N$ gilt. r_i ist der Abstand des i-ten Kristalls zum Schwerpunkt des Schauers und r_0 der mittlere Abstand zwischen zwei Kristallen (etwa 5 cm bei *BaBar*).

Schauerform im instrumentierten Eisenjoch

Myonen und Hadronen unterscheiden sich in ihrer Wechselwirkung mit dem instrumentierten Eisenjoch bezüglich Eindringtiefe und transversaler Ausdehnung [11]. Als Unterscheidungsmerkmale dienen deshalb die Anzahl der getroffenen Kammern und der im Detektor zurückgelegte Weg in Wechselwirkungslängen [20].

2.3.2 Kriterien der Teilchenidentifkation

Bei den in dieser Arbeit explizit identifizierten Teilchen handelt es sich ausschließlich um geladene Teilchen. Im einzelnen sind dies Elektronen, Myonen und Kaonen. Pionen werden nur indirekt als „nicht Kaon“ identifiziert (Abschnitt 3.3). Die von der *BaBar*-Kollaboration entwickelten Kriterien, auf denen die Teilchenidentifikation der hier vorgestellten Analyse basiert, werden im Folgenden skizziert.[3]

Identifikation von Elektronen

Zur Identifikation von Elektronen wird eine Wahrscheinlichkeit (Likelihood) berechnet. In diese gehen die folgenden Größen ein [19]:

- Das Verhältnis E/p der im elektromagnetischen Kalorimeter deponierten Energie zum im Spurkammersystem gemessenen Impuls p
- das laterale Moment LAT des elektromagnetischen Schauers
- der Čerenkov-Winkel θ_C

[3] Im *BaBar*-Sprachgebrauch werden die Kriterien zusammenfassend als `PidLHElectronSelector`, `TightMuonMicroSelection` und `VeryTightKaonMicroSelection` bezeichnet [21].

- und der spezifische Energieverlust dE/dx im Spurkammersystem.

Die Effizienz dieser Methode in Abängigkeit des Impulses ist in Abbildung 2.10 dargestellt. Das Vorgehen zur Bestimmung der Effizienz wird im nächsten Abschnitt beschrieben. Die größte Wahrscheinlichkeit der Missidentifikation besitzen Kaonen und zwar bei Impulsen kleiner 800 MeV. Sie beträgt etwa 1 % bis 2 % und ist für andere Teilchen und Impulse deutlich kleiner [21].

Identifikation von Myonen

Die Identifikation der Myonen basiert auf Selektionskriterien in Form von Schnitten. Folgende Größen werden zur Identifikation herangezogen [20]:

- Die deponierte Energie im Kalorimeter
- Anzahl der getroffenen Lagen im instrumentierten Eisenjoch
- durchquerte Strecke im Detektor in Wechselwirkunslängen
- mittlere Anzahl der Treffer in einer Lage im instrumentierten Eisenjoch und
- die Fitwahrscheinlichkeit der Spur im Spurkammersystem und im instrumentierten Eisenjoch.

In Abbildung 2.10 ist die Effizienz in Abhängigkeit des Impulses gezeigt. Die Wahrscheinlichkeit der Missidentifikation von Pionen beträgt etwa 3 % und die von Kaonen etwa 1 % [21].

Identifikation von Kaonen

Kaonen werden wie Elektronen durch die Berechnung einer Wahrscheinlichkeit (Likelihood) identifiziert. Die zur Berechnung verwendeten Größen sind [22]:

- Der spezifische Energieverlust dE/dx im Spurkammersystem
- der rekonstruierte Čerenkov-Winkel und
- die Anzahl der Photonen im Čerenkov-Detektor.

Die Effizienz der Methode kann Abbildung 2.10 entnommen werden. Die Wahrscheinlichkeit für die Missidentifikation von Pionen als Kaonen beträgt je nach Impuls etwa 1 % bis 2 % [21].

2.3.3 Korrekturen der simulierten Ereignisse

Zur Bestimmung der Effizienzen und Wahrscheinlichkeiten der Missidentifikation werden Kontrolldatensätze verwendet. Sie enthalten Ereignisse, die alleine aufgrund ihrer speziellen Topologie und ohne die Verwendung der Kriterien zur Teilchenidentifikation identifiziert wurden. Die Kontrolldatensätze für Pionen und Kaonen beispielsweise basieren auf Zerfällen vom Typ $D^{\star+} \to D^0\pi_s^+$ mit $D^0 \to \pi^+K^-$. Das s in π_s^+ kennzeichnet dabei die kleine Energie des Pions. Zunächst wird versucht, Paare geladener

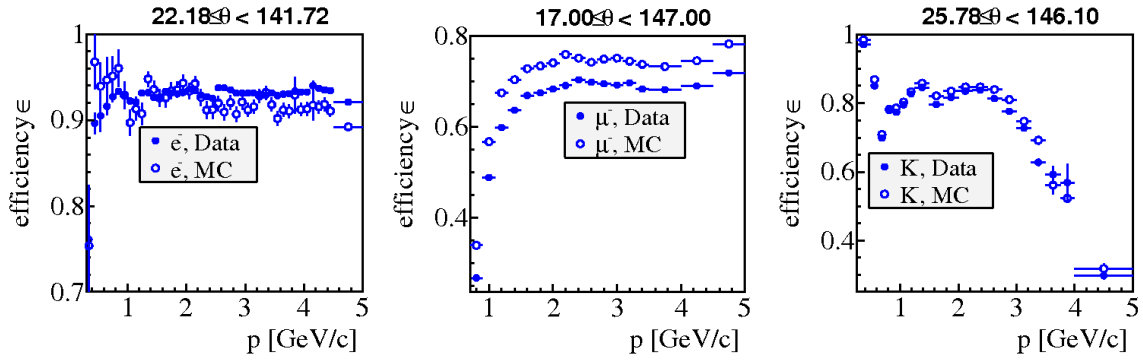


Abbildung 2.10: *Verteilungen der Teilchenidentifikationseffizienz für Elektronen e^- (links), Myonen μ^- (Mitte) und Kaonen K^- (rechts) [21].*

Teilchen (π^+ und K^- Kandidaten) zu einem D^0-Meson zu kombinieren. Gelingt dies, so wird überprüft, ob die invariante Masse des D^0-π_s^+-Paars mit der des $D^{\star+}$-Mesons übereinstimmt. Ist dies der Fall, so wurden das π^+-Meson und das K^--Meson alleine aufgrund der Topologie des Ereignisses identifiziert [23].

Die mit Hilfe solcher Methoden bestimmten Effizienzen der Teilchenidentifikation sind in Abbildung 2.10 für e^-, μ^- und K^- dargestellt. Besonders im Fall der Myonen ist eine deutliche Diskrepanz zwischen Daten und simulierten Ereignissen (MC) erkennbar. Bei der Ereignisselektion (Kapitel 3) werden Daten und simulierte Ereignisse verglichen und bei der Bestimmung der Verzweigungsverältnisse (Kapitel 5) wird die Effizienz der Ereignisselektion aus den simulierten Ereignissen bestimmt. Deshalb müssen die simulierten Ereignisse korrigiert, d.h. gewichtet werden, wenn in der Ereignisselektion ausgenutzt wird, dass ein Teilchen gewisse Teilchenidentifikationskriterien (z.B. die für Kaonen) passiert oder explizit nicht passiert. Ein Ereignis ist für jedes identifizierte Teilchen mit dem Faktor

$$\eta_{\text{PID}} = \frac{\varepsilon_{\text{Daten}}}{\varepsilon_{\text{Simulation}}}$$

zu gewichten, wobei $\varepsilon_{\text{Daten}}$ die Teilchenidentifikationseffizienz für Datenereignisse und $\varepsilon_{\text{Simulation}}$ die für simulierte Ereignisse bezeichent. Wurde ein simuliertes Teilchen missidentifiziert (z.B. ein Pion als Kaon), so sind die entsprechenden Misseffizienzen zu verwenden. Für jedes Teilchen, das explizit nicht bestimmte Teilchenidentifikationskriterien passiert, ist das Ereignis mit dem Faktor

$$\eta_{\text{PID}}^{\text{Veto}} = \frac{1 - \varepsilon_{\text{Daten}}}{1 - \varepsilon_{\text{Simulation}}}$$

zu gewichten.

Tabellen, in denen die Effizienzen in Abhängigkeit von Impuls, Polar- und Azimutalwinkel aufgelistet sind, werden von der *BaBar*-Kollaboration zur Verfügung gestellt [24]. Auf einige technische Details im Zusammenhang mit der Behandlung der Effizienzen und Gewichte wird in Anhang B eingegangen.

2.4 Daten und Monte-Carlo-Simulation

2.4.1 Daten

Das *BaBar*-Experiment hat seit seinem Start 1999 eine integrierte Luminosität von etwa 478 fb^{-1} aufgezeichnet. Während der Hauptteil der Daten bei einer Schwerpunktsenergie von 10,58 GeV, der Masse der $\Upsilon(4S)$-Resonanz, „On-Peak“ aufgezeichnet wurde, ist ein Teil bei einer um 40 MeV kleineren Energie „Off-Peak“ aufgezeichnet worden. Im zuletzt genannten Fall liegt die Schwerpunktsenergie unterhalb der Produktionsschwelle für $B\bar{B}$-Paare. Die Daten können damit zur Abschätzung des Untergrunds bei der Analyse von B-Mesonen-Zerfällen verwendet werden. Bei der Produktion von $\tau^+\tau^-$-Paaren sind Wirkungsquerschnitt und Kinematik für die Fälle „On-Peak“ und „Off-Peak“ quasi identisch. In dieser Arbeit werden beide Datensätze verwendet. Im Folgenden wird nicht näher auf die Unterschiede eingegangen.

Die Daten sind in Datennahmeperioden unterteilt, welche längeren Zeiträumen (in etwa einem Jahr) entsprechen, in denen das Experiment unter den gleichen Bedingungen betrieben wurde. Eine Auflistung der integrierten Luminositäten der einzelnen Datennahmeperioden ist in Tabelle 2.1 gegeben. Für diese Analyse werden Daten der Perioden 1 bis 5 (1999-2006) verwendet, was einer integrierten Luminosität von 384 fb^{-1} entspricht.

Tabelle 2.1: *Integrierte Luminositäten aufgespalten nach Datenahmeperioden.*

Datennahme-periode	$\mathcal{L}$ [fb^{-1}] „On-Peak“	$\mathcal{L}$ [fb^{-1}] „Off-Peak“
Run 1-6	434,0	44,5
Run 1	20,4	2,6
Run 2	61,1	6,9
Run 3	32,3	2,5
Run 4	100,3	10,1
Run 5	133,3	14,5
Run 6	86,6	7,9

2.4.2 Monte-Carlo-Simulation

Neben den vom Detektor aufgezeichneten Daten wurden mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen Datensätze simulierter Ereignisse erstellt. Diese werden zur Entwicklung der Ereignisselektion (Kapitel 3) sowie zur Berechnung der Signaleffizienz der Selektion und der Abschätzung des Untergrunds (Kapitel 5) benötigt.

Die Prozesse der Art $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$ und $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ wurden mit dem Ereignisgenerator $\mathcal{KK}$ [25] generiert und die τ-Zerfälle durch das TAUOLA-Paket [26] beschrieben. Der Generator EvtGen [27] wurde für alle Prozesse der Art $e^+e^- \to q\bar{q}$ mit $q =$

Tabelle 2.2: *Wirkungsquerschnitte [10, 11] und Anzahlen simulierter Ereignisse. Die Anzahlen einzelner Zerfallskanäle des τ-Leptons mit kleinen Verzweigungsverhältnissen, die separat simuliert wurden (siehe Text), sind nicht in der Tabelle enthalten.*

$e^+e^- \to$	$\tau^+\tau^-$	$\mu^+\mu^-$	$b\bar{b}$	$c\bar{c}$	$s\bar{s}$, $u\bar{u}$ & $d\bar{d}$
σ [nb]	0,92	1,14	1,05	1,30	0,35 + 1,39 + 0,35
Run 1 [$\times 10^6$]	20	26	141	83	89
Run 2 [$\times 10^6$]	56	72	207	169	131
Run 3 [$\times 10^6$]	28	37	94	78	67
Run 4 [$\times 10^6$]	90	117	236	204	213
Run 5 [$\times 10^6$]	132	172	429	276	318

Tabelle 2.3: *Anzahlen simulierter Ereignisse (Run 1-5) von τ-Zerfällen, die nicht im „generischen“ $\tau^+\tau^-$-Datensatz in Tabelle 2.2 enthalten sind.*

Zerfallskanal	Verzweigungsverhältnis PDG 2006	Simulierte Ereignisse Run 1-5 [$\times 10^6$]
$\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\pi^0\nu_\tau$	$(7{,}9 \pm 1{,}2) \times 10^{-4}$	2,80
$\tau^- \to K^-K^+\pi^-\pi^0\nu_\tau$	$(6{,}1 \pm 2{,}0) \times 10^{-5}$	2,80
$\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$	$< 2{,}0 \times 10^{-4}$	2,11
$\tau^- \to \phi\pi^-\pi^0\nu_\tau$	—	2,11
$\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ (nichtres.)	$< 3{,}7 \times 10^{-5}$	1,76
$\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$	$< 6{,}7 \times 10^{-5}$	2,80
$\tau^- \to \phi K^-\pi^0\nu_\tau$	—	2,80

u, d, s, c und b benutzt. Die Detektorsimulation basiert auf dem Paket GEANT4 [28]. Wirkungsquerschnitte und Anzahlen simulierter Ereignisse sind in Tabelle 2.2 aufgeführt. In den dort aufgelisteten $\tau^+\tau^-$-Datensätzen sind nicht alle Zerfallskanäle des τ-Leptons, sondern nur die mit Verzweigungsverhältnissen $\gtrapprox 10^{-3}$ vollständig enthalten. Für die in Tabelle 2.3 aufgelisteten Zerfallskanäle wurden deshalb spezielle Datensätze simulierter Ereignisse verwendet. Dabei zerfällt jeweils das eine τ-Lepton im genannten Kanal und das andere „generisch,“ d.h. so wie in den $\tau^+\tau^-$-Datensätzen in Tabelle 2.2. Die Anzahlen simulierter Ereignisse sind in diesen Fällen im Verhältnis zum jeweiligen Verzweigungsverhältnis größer als bei den anderen Zerfallskanälen. Sie entsprechen dem $\mathcal{O}(10)$- bis $\mathcal{O}(100)$-fachen der aufgezeichneten Luminosität.

Ebenfalls nicht aufgeführt sind Ereignisse der Art $e^+e^- \to e^+e^-$ (Bhabha-Ereignisse). Wegen des großen Wirkungsquerschnitts ($\sim$ 40 nb [11]) wurden sie im Vergleich zur Aufgezeichneten Luminosität nur in kleiner Anzahl simuliert. Der Datensatz dient vor allem der Luminositätsbestimmung und der Kalibrierung des elektromagnetischen Kalorimeters. Zur Abschätzung des Untergrunds kann er in dieser Arbeit nicht verwendet werden. Dieser Punkt wird in Abschnitt 3.2.1 diskutiert.

Kapitel 3

Ereignisselektion

In diesem Kapitel wird die Selektion der Signalereignisse aus dem vorhandenen Datensatz beschrieben. Sie basiert auf den Erfahrungen der in [29] und [30] beschriebenen Analysen. Die Selektion selbst erfolgt in mehreren Schritten. Zuerst findet die Vorselektion von $\tau^+\tau^-$-Ereignissen statt (Abschnitt 3.1). Durch die Unterdrückung von anderen Ereignisklassen wird dabei das Datenvolumen stark verringert. In der nächsten Stufe werden Ereignisse vom Typ $\tau^- \to h^-h^+h^-\nu_\tau$ ($h = K$ oder $h = \pi$) selektiert sowie Untergründe, die nicht aus τ-Zerfällen stammen, unterdrückt (Abschnitt 3.2). Entscheidend ist hierbei die Forderung, dass das τ-Lepton, welches nicht in das Signal ($\tau^- \to h^-h^+h^-\nu_\tau$) zerfällt, leptonisch zerfallen soll. Abschließend erfolgt die Unterscheidung zwischen Kaonen und Pionen und damit eine Auftrennung der Ereignisse in die zu messenden Zerfallskanäle.

Die gesamte Selektion wird parallel für Daten und simulierte Ereignisse durchgeführt. Dabei ermöglicht die Kenntnis des wahren Typs der simulierten Ereignisse eine Optimierung der Analyse. Später wird mit Hilfe der simulierten Ereignisse die Zahl der noch verbliebenen Untergrundereignisse sowie die Effizienz der Selektion von Signalereignissen abgeschätzt. Beide Größen sind für die Bestimmung der Verzweigungsverhältnisse unabdingbar.

3.1 Vorselektion von $\tau^+\tau^-$-Ereignissen

Der gesamte mit dem *BaBar*-Detektor aufgenommene Datensatz sowie die dazugehörigen simulierten Ereignisse umfassen etwa zwei Petabyte an Speicherplatz. Für die Entwicklung und Optimierung von Analysen ist es nötig, die vorhandenen Daten mehrfach zu prozessieren. Da dies aufgrund der großen Datenmenge sehr lange dauert, wird das Datenvolumen in mehreren Stufen verringert. Während in der ersten Stufe, der Vorselektion, allgemeine Kriterien angewendet werden, sind die späteren Stufen speziell für die in dieser Arbeit beschriebene Analyse entwickelt. Dank des deutlich geringeren Datenvolumens kann die letzte Stufe häufig wiederholt und optimiert werden. Der prozentuale Anteil der Signalereignisse wird dabei in jeder Stufe erhöht.

Bevor ein Ereignis gespeichert wird, muss es zwei Triggerstufen, bestehend aus einem Hardware- sowie einem Softwaretrigger, passieren. Zudem gibt es Filter, welche die Ereignisse (grob) nach Topologie und Ereignistyp klassifizieren. Im Folgenden werden

härtere Selektionskriterien angewendet, weshalb hier nicht näher darauf eingegangen wird. Die Trigger- und Filter-Bedingungen sind ausführlich in [31] und [32] beschrieben.

Für die Anreicherung von Ereignissen der Art $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$ (im Folgenden kurz $\tau^+\tau^-$-Ereignisse genannt) hat die τ-Gruppe der *BaBar*-Kollaboration eine gemeinsame Vorselektion entwickelt [33], welche im Folgenden näher beschrieben wird. Der Speicherplatz des für diese Analyse verwendeten Datensatzes beträgt nach der Vorselektion noch etwa 1,7 Terabyte.

Die Teilchenmultiplizität in τ-Zerfällen ist durch die τ-Masse limitiert. Deshalb werden zur Anreicherung von $\tau^+\tau^-$-Ereignissen die Anzahl der geladenen Spuren auf ≤ 9 und die Anzahl der Kalorimeterobjekte, mit denen keine Spur eines geladenen Teilchens assoziiert werden kann, auf ≤ 20 beschränkt.

Ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal für die verschiedenen Ereignisklassen ist der sogenannte Thrust. Er ist definiert als

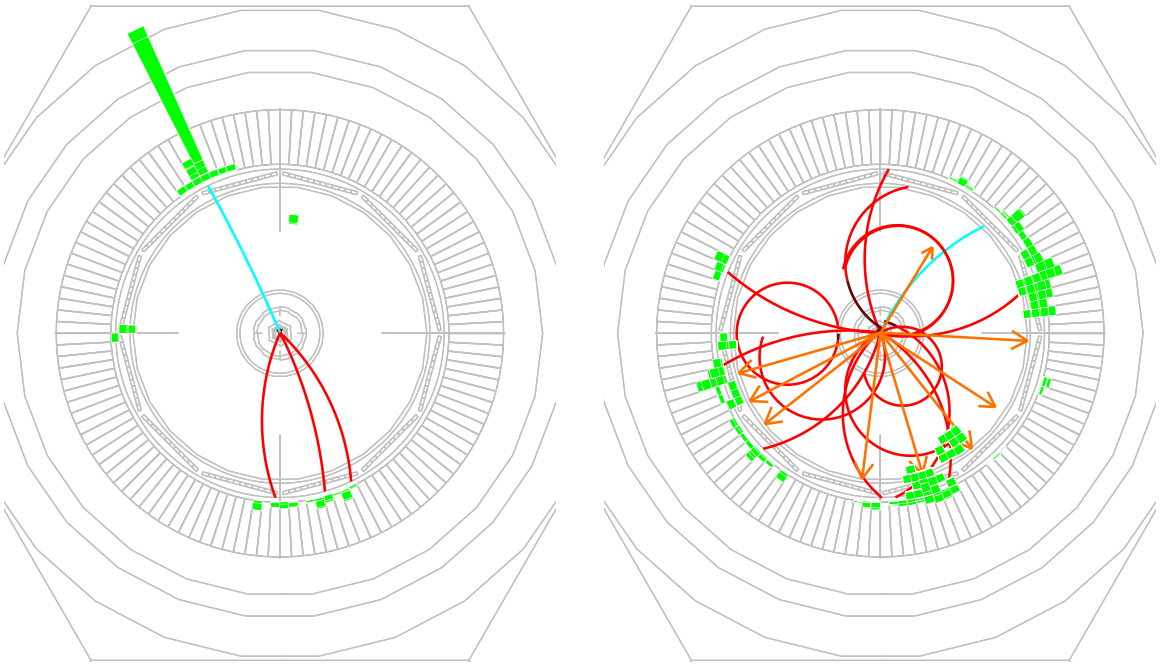
$$T \equiv \max_{\vec{n}} \left(\frac{\sum_i |\vec{p}_i \cdot \vec{n}|}{\sum_i |\vec{p}_i||\vec{n}|} \right),$$

wobei die $\vec{p}_i$ die Impulse der rekonstruierten neutralen und geladenen Teilchen im Schwerpunktsystem sind. Der Vektor $\vec{n}$, der diese Größe maximiert, wird als Thrustachse bezeichnet. Der Thrust kann Werte im Intervall [0,5; 1] annehmen. Er gibt Aufschluss über die räumliche Verteilung der Impulsvektoren und kann als Maß für die Sphärizität des Ereignisses angesehen werden. Ereignisse, bei denen die Impulsvektoren der entstehenden Teilchen isotrop verteilt sind, haben einen Thrust von 0,5. Beträgt der Thrust 1, so sind alle Impulsvektoren parallel oder antiparallel zur Thrustachse.

Die Schwerpunktsenergie der e^+e^--Kollisionen bei *BaBar* beträgt 10,58 GeV (siehe Abschnitt 2.1). Bei der Erzeugung von $\tau^+\tau^-$-Paaren sind die τ-Leptonen mit einer Masse von $m_\tau = 1{,}777\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$ [2] stark relativistisch geboostet ($\beta\gamma \approx 2{,}8$). Das Ereignis hat dementsprechend eine jetartige Struktur und der Thrust nimmt Werte nahe 1 an. Ereignisse vom Typ $e^+e^- \to B\bar{B}$ haben im Vergleich dazu eher kleinere Thrustwerte. So haben die B-Mesonen mit einer Masse von $\mathrm{m}_B = 5{,}279\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$ [2] bei der Erzeugung von $B\bar{B}$-Paaren im Schwerpunktsystem nur kinetische Energien von etwa 10 MeV. Sie sind also nur sehr schwach geboostet, wodurch das Ereignis Thrustwerte nahe 0,5 annimmt. In der Vorselektion wird dieser Unterschied zur Anreicherung von $\tau^+\tau^-$-Ereignissen ausgenutzt, indem nur Ereignisse mit $T > 0{,}85$ die Selektion passieren können.

Zur Veranschaulichung der unterschiedlichen Ereignisstrukturen sind in Abbildung 3.1 je ein simuliertes Ereignis vom Typ $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$ und $e^+e^- \to B\bar{B}$ grafisch dargestellt. Die Unterschiede in Multiplizität und räumlicher Anordnung der Teilchen sind deutlich zu erkennen. In Tabelle 3.1 sind die Kriterien der Vorselektion zusammengefasst.

Neben der Unterdrückung von Nicht-τ-Untergründen dient der Thrust bzw. die Thrustachse auch zur Unterteilung der selektierten Ereignisse gemäß ihrer Topologie. Wie in Abbildung 3.2 schematisch dargestellt, wird das Ereignis durch eine Ebene senkrecht zur Thrustachse in zwei Hemisphären unterteilt, wobei die Zerfallsprodukte der beiden τ-Leptonen durch deren Boost jeweils in einer Hemisphäre liegen. Aus Gründen,



(a) $e^+e^- \to \tau^-(\to e^-\bar{\nu}_e\nu_\tau)\,\tau^+(\to h^+h^-h^+\bar{\nu}_\tau)$ (b) $e^+e^- \to B\bar{B}$

Abbildung 3.1: *Grafische Darstellung im Detektor simulierter Ereignisse der Art (a) $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$ und (b) $e^+e^- \to B\bar{B}$. Die roten Linien zeigen die rekonstruierten Spuren geladener Teilchen an. Identifizierte Elektronen sind hellblau hervorgehoben und rekonstruierte π^0-Mesonen werden durch orangefarbene Pfeile angezeigt. Die im elektromagnetischen Kalorimeter deponierte Energie ist grün dargestellt.*

Tabelle 3.1: *Kriterien der Vorselektion [33].*

Selektionsvariable	erlaubte Werte
Anzahl der geladenen Spuren (N_{geladen})	$2 \leq N_{\text{geladen}} \leq 9$
Anzahl der der neutralen Kalorimeterobjekte (N_{neutral})	$0 \leq N_{\text{neutral}} \leq 20$
Thrust	$0{,}85 < T$

auf die in Abschnitt 3.2 näher eingegangen wird, werden die beiden Hemisphären als Signal- oder Hadron-Hemisphäre und als Lepton-Hemisphäre bezeichnet.

Die Einteilung der Ereignisse in Topologien erfolgt nun gemäß der Anzahl der geladenen Spuren pro Hemisphäre. Dazu werden allerdings nicht alle Spuren betrachtet, die aus Treffern im Silizium-Vertex-Detektor und der Driftkammer rekonstruiert wurden, sondern nur diejenigen, die zusätzlich die im Folgenden aufgelisteten Qualitätskriterien erfüllen[1].

[1] Die ersten fünf aufgelisteten Kriterien werden innerhalb der *BaBar*-Kollaboration zusammenfassend als `GoodTracksLoose` bezeichnet.

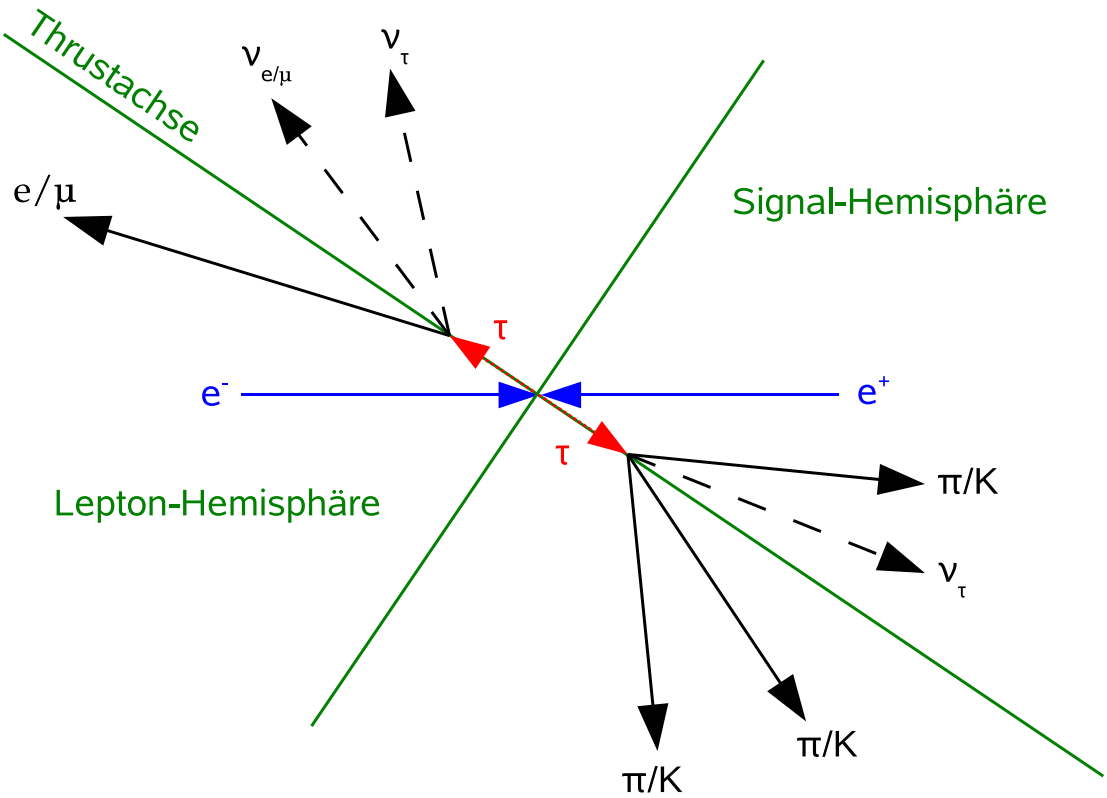


Abbildung 3.2: *Struktur eines selektierten $\tau^+\tau^-$-Ereignisses und dessen Einteilung in Hemisphären mittels der Thrustachse.*

- Um Spiralbahnen, die nur innerhalb der Spurkammern verlaufen, zu verwerfen und Spuren mit falsch rekonstruierter Ladung zu unterdrücken, muss der transversale Impuls im Laborsystem $p_T^{\text{lab}} > 0{,}1\,\frac{\text{GeV}}{\text{c}}$ betragen.
- Der maximale Impuls geladener Teilchen ist durch die Kinematik der einfallenden Teilchen der e^+e^--Kollision beschränkt. Es muss in jedem Fall $|\vec{p}^{\,\text{lab}}| < 10\,\frac{\text{GeV}}{\text{c}}$ gelten.
- Um nur gut rekonstruierte Spuren zu erhalten, sollen mindestens zwölf Treffer in der 40-lagigen Driftkammer mit der Spur assoziiert sein.
- Der Ursprung der Spur soll verträglich mit dem Wechselwirkungspunkt sein. In der Ebene senkrecht zur Strahlrichtung soll der kürzeste Abstand deshalb $d_{xy} < 1{,}5\,\text{cm}$ betragen.
- In Strahlrichtung soll der kürzeste Abstand zum Wechselwirkungspunkt $d_z < 10\,\text{cm}$ betragen.
- Um Photon-Konversionen zu unterdrücken, wird gefordert, dass Spuren von Teilchen entgegengesetzter Ladung keine mit Null verträgliche invariante Masse haben. Die beiden Spuren müssen dabei die obigen Kriterien erfüllen.

Spuren, die diese zusätzlichen Kriterien nicht erfüllen, stammen vor allem von Teilchen, die in sekundären Zerfällen oder bei Wechselwirkungen mit dem Detektormaterial entstanden sind. Die τ-Zerfälle haben Zerfallslängen von typischerweise $250\,\mu m$, (die Impulsbeträge der τ-Leptonen hängen wegen des Boosts der Kollision von der Richtung ab). Die Zerfallsvertizes der τ-Leptonen liegen damit jedoch nahe genug am Wechselwirkungspunkt, so dass die genannten Qualitätskriterien keine Einschränkung für die Spuren der (primären) Teilchen aus den τ-Zerfällen darstellen. Im Folgenden werden deshalb, wenn nicht explizit anders angegeben, nur Spuren betrachtet, die obige Qualitätskriterien erfüllen. Eventuell vorhandene weitere Spuren, die diese Kriterien nicht erfüllen, werden nicht als Spuren von im τ-Zerfall entstandenen Teilchen betrachtet und deshalb im Allgemeinen nicht weiter berücksichtigt. Sie stellen also auch kein Ausschlusskriterium für Ereignisse dar. Ausnahmen für die Verwendung bilden die Vorselektion (Abschnitt 3.1), die Unterdrückung neutraler Kaonen (Abschnitt 3.2) und die erneute Verwendung des Thrustes (Abschnitt 3.2.2).

3.2 Selektion von Ereignissen der Art $\tau^- \to h^- h^+ h^- \nu_\tau$

Die im vorigen Abschnitt beschriebenen Kriterien dienen dazu, den Anteil der τ-Ereignisse im verbleibenden Datensatz zu erhöhen. Im Folgenden sollen nun speziell τ-Ereignisse selektiert werden, bei denen eines der beiden τ-Leptonen in drei geladene Hadronen und ein τ-(Anti-)Neutrino zerfällt,

$$\tau^- \to h^- h^+ h^- \nu_\tau \qquad \text{mit } h^\pm = K^\pm \text{ oder } h^\pm = \pi^\pm,$$

wobei als Hadronen Pionen oder Kaonen in Frage kommen. Hier und im Folgenden wird, wenn nicht anders vermerkt, nicht speziell zwischen einem Zustand und dem dazugehörigen ladungskonjugierten Zustand unterschieden. Anzahlen von Ereignissen bezeichnen dementsprechend die Summe der Ereignisse für beide möglichen τ-Ladungen.

Um einen Datensatz zu erhalten, der möglichst rein an τ-Ereignissen ist, wird gefordert, dass eines der beiden Tauonen leptonisch zerfällt:

$$\tau^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau$$

oder

$$\tau^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau.$$

Da das andere τ-Lepton in drei geladene Hadronen (plus Neutrino) zerfallen soll, wird also nach Ereignissen gesucht, bei denen sich in der einen Hemisphäre (siehe Abschnitt 3.1) eine Spur und in der anderen drei Spuren geladener Teilchen befinden. Die Summe der Ladungen muss dabei Null ergeben. Abbildung 3.2 zeigt schematisch ein Ereignis dieser Struktur.

Die Forderung nach einem geladenen Lepton wird als Lepton-Tag bezeichnet. Dementsprechend spricht man von Elektron-Tag und Myon-Tag.

Die Identifikation der Elektronen und Myonen erfolgt über die in Abschnitt 2.3 beschriebenen Kriterien. Um mögliche systematische Effekte bei der Identifikation der Elektronen und Myonen besser feststellen zu können, wird die Ereignisselektion in

den folgenden Schritten getrennt für die Fälle, in denen das Tauon in der Lepton-Hemisphäre elektronisch oder myonisch zerfällt, durchgeführt.

Neben dem Fall, dass die drei geladenen Hadronen im Endzustand direkt im Zerfall des τ-Leptons entstehen, besteht auch die Möglichkeit, dass es sich bei einem der h^+h^--Paare um ein $\pi^+\pi^-$-Paar handelt, welches aus dem Zerfall eines neutralen Kaons, genauer gesagt, dem kurzlebigen schwachen Eigenzustand (K_S^0), stammt:

$$\tau^- \to h^- K_S^0(\to \pi^+\pi^-)\nu_\tau$$

Hier sollen allerdings nur τ-Zerfälle betrachtet werden, bei denen die geladenen Hadronen im Endzustand aus dem τ-Zerfall selbst oder aus sehr kurzlebigen Resonanzen (z.B. ϕ-Resonanz, siehe Abschnitt 4) stammen. Die Fälle mit einem sekundär zerfallenden K_S^0-Meson werden unterdrückt. Dies geschieht, indem nur Ereignisse zugelassen werden, bei denen die invariante Masse von Paaren entgegengesetzt geladener Teilchen nicht zu nahe an der K_S^0-Masse ($m_{K^0} = 0{,}498\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$ [2]) liegt. Die geladenen Teilchen werden dabei als geladene Pionen angenommen und es muss gelten:

$$m(\pi^+\pi^-) < 0{,}482\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2} \qquad \text{oder} \qquad 0{,}513\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2} < m(\pi^+\pi^-).$$

Die K_S^0-Mesonen zerfallen nicht im Wechselwirkungspunkt, sondern gemäß ihrer Lebensdauer ($c\tau = 2{,}58\,\mathrm{cm}$ [2]) meist erst nach einigen Zentimetern. Dementsprechend passieren die Spuren der Tochterteilchen nicht unbedingt die in Abschnitt 3.1 aufgelisteten Qualitätskriterien für rekonstruierte Spuren. Diese sind auf die Selektion von Teilchen ausgelegt, die aus dem Wechselwirkungspunkt stammen. Um die K_S^0-Mesonen optimal zu unterdrücken, werden deshalb alle im Detektor rekonstruierten Spuren betrachtet.

3.2.1 Unterdrückung von QED-Untergründen

Bei einem e^+e^--Experiment wie *BaBar* ist die Bhabha-Streuung ($e^+e^- \to e^+e^-$) der zahlenmäßig dominierende Prozess. Ein anderer wichtiger Prozess ist die Erzeugung von Myonpaaren ($e^+e^- \to \mu^+\mu^-$). Mit jeweils einer Spur pro Hemisphäre fallen diese Ereignisse zwar a priori nicht in die hier betrachtete Topologie, bei der eine Spur in der einen und drei Spuren in der anderen Hemisphäre verlangt werden. Wird allerdings, wie in Abbildung 3.3 gezeigt, von einem der Elektronen oder Myonen ein Photon abgestrahlt, welches in ein e^+e^--Paar konvertiert, so kann das Ereignis dennoch in der untersuchten Topologie selektiert werden. Man spricht dabei von radiativen Bhabha- bzw. Myonpaar-Ereignissen. Aufgrund der sehr großen Wirkungsquerschnitte von $e^+e^- \to e^+e^-$ und $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ sind diese Ereignisse auch zahlenmäßig ein bedeutender Untergrund.

Der große Bhabha-Wirkungsquerschnitt führt dazu, dass eine Simulation von Bhabha-Ereignissen in einer Anzahl, die größenordnungsmäßig im Bereich der aufgezeichneten Luminosität liegt, die vorhandenen Rechenkapazitäten um ein Vielfaches übersteigt. Gerade für solch spezielle Ereignisse, wie sie in der betrachteten Topologie auftreten, wäre aber eine Statistik im Bereich der aufgezeichneten Luminosität nötig.

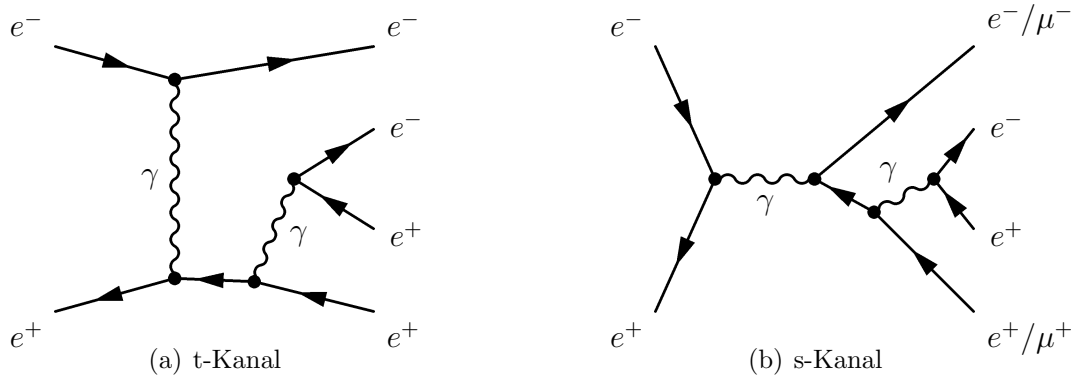


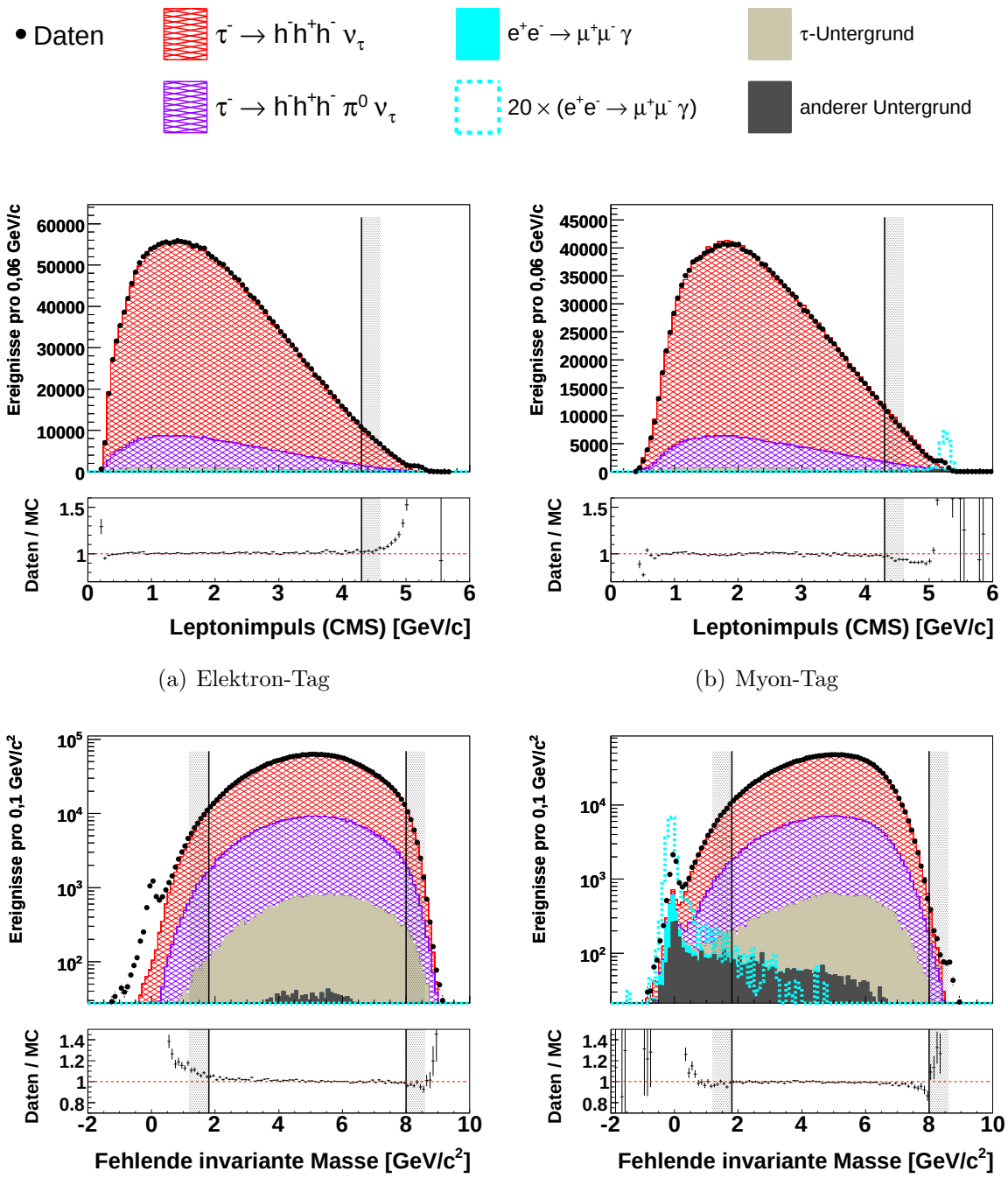
Abbildung 3.3: *Beispiele für Feynmangraphen von radiativen Bhabha- und Myonpaar-Ereignissen, bei denen das zusätzliche Photon konvertiert.*

Dies ist mit vertretbarem Rechenaufwand nicht zu bewerkstelligen. Deshalb müssen die Daten, anders als bei anderen Untergrundereignissen, ohne Informationen aus einem Monte-Carlo-Datensatz vom Bhabha-Untergrund bereinigt werden. Wie sich im Folgenden zeigen wird, ist dies aufgrund der speziellen Kinematik dieser Ereignisse möglich.

Zur Unterdrückung von Bhabha-Ereignissen wird zunächst gefordert, dass keine der Spuren in der Hadron-Hemisphäre als Elektron identifiziert wurde. Um eine gute Unterdrückung zu erreichen sind die angewendeten Kriterien nicht ganz so streng wie die zur Identifikation des Tag-Elektrons.[2] Diese Bedingung wird im Folgenden als Elektron-Veto bezeichnet. Dass auch nach Anwendung dieses Kriteriums noch Bhabha-Ereignisse übrig sind, ist aus den kinematischen Verteilungen in Abbildung 3.4 ersichtlich. In diesen sind alle bisher erwähnten Selektionskriterien sowie diejenigen, die erst in späteren Abschnitten erläutert werden, angewendet. Die selektierten Daten sind als schwarze Datenpunkte mit statistischem Fehler gezeigt. Simulierte Ereignisse sind farbig dargestellt, wobei sich die Farbe nach der Art des generierten (im Gegensatz zu der des rekonstruierten) Ereignistyps richtet. Hier und in allen folgenden Histogrammen sind die Ereigniszahlen der simulierten Zerfallskanäle, deren Verzweigungsverhältnisse in dieser Arbeit bestimmt werden, auf das Ergebnis dieser Messung (Abschnitt 5.3) skaliert. Die aufeinander gezeichneten farbigen Histogramme sollten somit in ihrer Summe dem Daten-Histogramm entsprechen. Zur besseren Überprüfbarkeit dieser Übereinstimmung sind zusätzlich jeweils die binweise gebildeten Verhältnisse „Anzahl der Datenereignisse über Anzahl der simulierten Ereignisse“ gezeigt.

In Abbildung 3.4(a) und 3.4(b) sind für Elektron-Tag und Myon-Tag die Impulse der auf der Leptonseite rekonstruierten Leptonen im Schwerpunktsystem gezeigt. Im Gegensatz zu Leptonen aus leptonischen τ-Zerfällen, bei denen das Neutrino und das Antineutrino einen Teil des Impulses erhalten, ist der Impuls der Leptonen aus Reaktionen vom Typ $e^+e^- \to e^+e^-$ und $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ durch die halbe Schwerpunktsenergie festgelegt. Abweichungen vom Maximalwert sind nur durch die Abstrahlung von Photo-

[2]Sie werden innerhalb der *BaBar*-Kollaboration als `TightElectronMicroSelection` bezeichnet [21].



(a) Elektron-Tag

(b) Myon-Tag

(c) Elektron-Tag

(d) Myon-Tag

Abbildung 3.4: *Verteilungen des Impulses der Tag-Leptonen im Schwerpunktsystem für (a) Elektron-Tag und (b) Myon-Tag und der fehlenden invarianten Massen für (c) Elektron-Tag und (d) Myon-Tag (logarithmisch). Außer dem Schnitt auf den Impuls des Tag-Leptons und den Schnitten auf die fehlende invariante Masse des Ereignisses sind alle Selektionskriterien und alle Skalierungen und Korrekturen angewendet. Die simulierten Ereignisse vom Typ* $\tau^- \to h^- h^+ h^- \nu_\tau$ *sind auf die gemessenen Verzweigungsverhältnisse skaliert. Die Form der simulierten Verteilung der Ereignisse vom Typ* $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ *ist zusätzlich, skaliert mit dem Faktor* 20*, den restlichen Verteilungen überlagert dargestellt.*

nen und durch die Wechselwirkung mit dem Detektormaterial möglich. Die Maxima bei Impulsen größer als $5\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}}$ zeigen, dass noch solche Ereignisse vorhanden sind. Im Fall des Elektron-Tags wird dies insbesondere durch den Anstieg des Verhältnisses „Daten über simulierte Ereignisse“ deutlich, da, wie bereits erwähnt, für Bhabha-Ereignisse keine simulierten Ereignisse in die Analyse eingehen. Ein den anderen Histogrammen überlagertes und mit dem Faktor 20 skaliertes Histogramm der simulierten Ereignisse vom Typ $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ hebt den Überschuss von Myon-Paaren nahe dem maximalen Impuls hervor. Durch eine Beschränkung des Leptonimpulses auf

$$p_{\mathrm{Lepton,CMS}} < 4{,}3\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}}$$

werden diese beiden Typen von Untergrundereignissen weiter unterdrückt.

Als letzte Größe zur Beseitigung von QED-Untergründen dient die fehlende invariante Masse, welche definiert ist durch

$$m_{\mathrm{miss}} = \frac{E_{\mathrm{CMS}}}{c^2} - \sqrt{p^\lambda_{\mathrm{tot}} p_{\mathrm{tot},\lambda}},$$

wobei

$$E_{\mathrm{CMS}} = 10{,}58\,\mathrm{GeV}$$

die Schwerpunktsenergie der e^+e^--Kolisionen und

$$p^\lambda_{\mathrm{tot}} = \sum_{geladen} p^\lambda_{geladen} + \sum_{neutral} p^\lambda_{neutral}$$

die Summe der Vierervektoren der rekonstruierten geladenen und neutralen Teilchen des Ereignisses ist. Als geladene Teilchen gehen dabei nur Teilchen mit Spuren ein, die die in Abschnitt 3.1 beschriebenen Qualitätskriterien passieren. Da bei Ereignissen der Art $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$ aus den τ-Zerfällen mindestens zwei Neutrinos resultieren, welche einen Teil der verfügbaren Energie erhalten, ist für solche Ereignisse die fehlende invariante Masse von Null verschieden. Im Gegensatz dazu haben radiative Bhabha- und Myonpaar-Ereignisse, bei denen das zusätzliche Photon konvertiert und so eine Topologie der betrachteten Art entsteht, fehlende invariante Massen annähernd gleich Null. Der Überschuss dieser Ereignisse bei fehlenden invarianten Massen nahe Null ist in Abbildung 3.4(c) und 3.4(d) zu erkennen und wird durch die Forderung

$$m_{\mathrm{miss}} > 1{,}8\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$$

beseitigt.

Einen weiteren QED-Untergrund stellen Zwei-Photonen-Ereignisse dar. Ein möglicher Prozess dieser Art ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Für Zwei-Photonen-Ereignisse ist die Wahrscheinlichkeit groß, dass die gestreuten Elektronen und Positronen ohne großen Energieverlust im Strahlrohr verbleiben und nicht im Detektor registriert werden. Solche Ereignisse haben bevorzugt eine große fehlende invariante Masse nahe dem kinematischen Limit. Dieses ist durch 10,58 GeV, die Schwerpunktsenergie der e^+e^--Kollisionen, gegeben. In diese Analyse gehen keine simulierten Zwei-Photonen-Ereignisse ein. Der geringe Datenüberschuss bei großen fehlenden invarianten Massen

in Abbildung 3.4(c) und 3.4(d) ist auf solche Ereignisse zurückzuführen. Wegen des Elektron-Vetos ist er im Fall des Myonen-Tag größer. Er wird beseitigt durch die Bedingung

$$m_{\text{miss}} < 8{,}0\,\frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}.$$

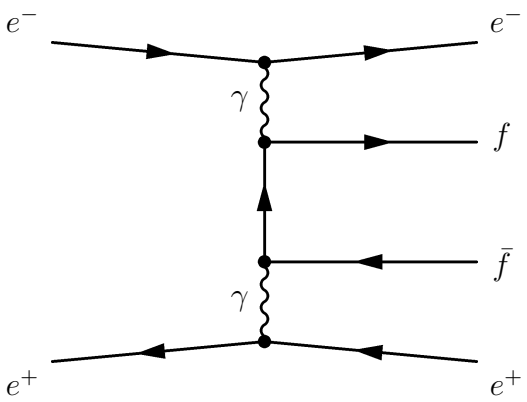


Abbildung 3.5: *Ein möglicher Feynmangraph eines Zwei-Photonen-Ereignisses. f und $\bar{f}$ stehen für mögliche Fermionen und Antifermionen.*

Eine Zusammenfassung und Überprüfung der Selektionskriterien gegen QED-Untergünde stellt Abbildung 3.6 dar. Gezeigt sind Verteilungen des Akolinearitätswinkels im Schwerpunktsystem ohne und mit Anwendung der in diesem Abschnitt beschriebenen Auswahlkriterien gegen QED-Untergründe. Der Akolinearitätswinkel ist dabei der Winkel zwischen dem Gesamtimpuls der geladenen Teilchen der Hadron-Hemisphäre und dem Impuls des Tag-Leptons:

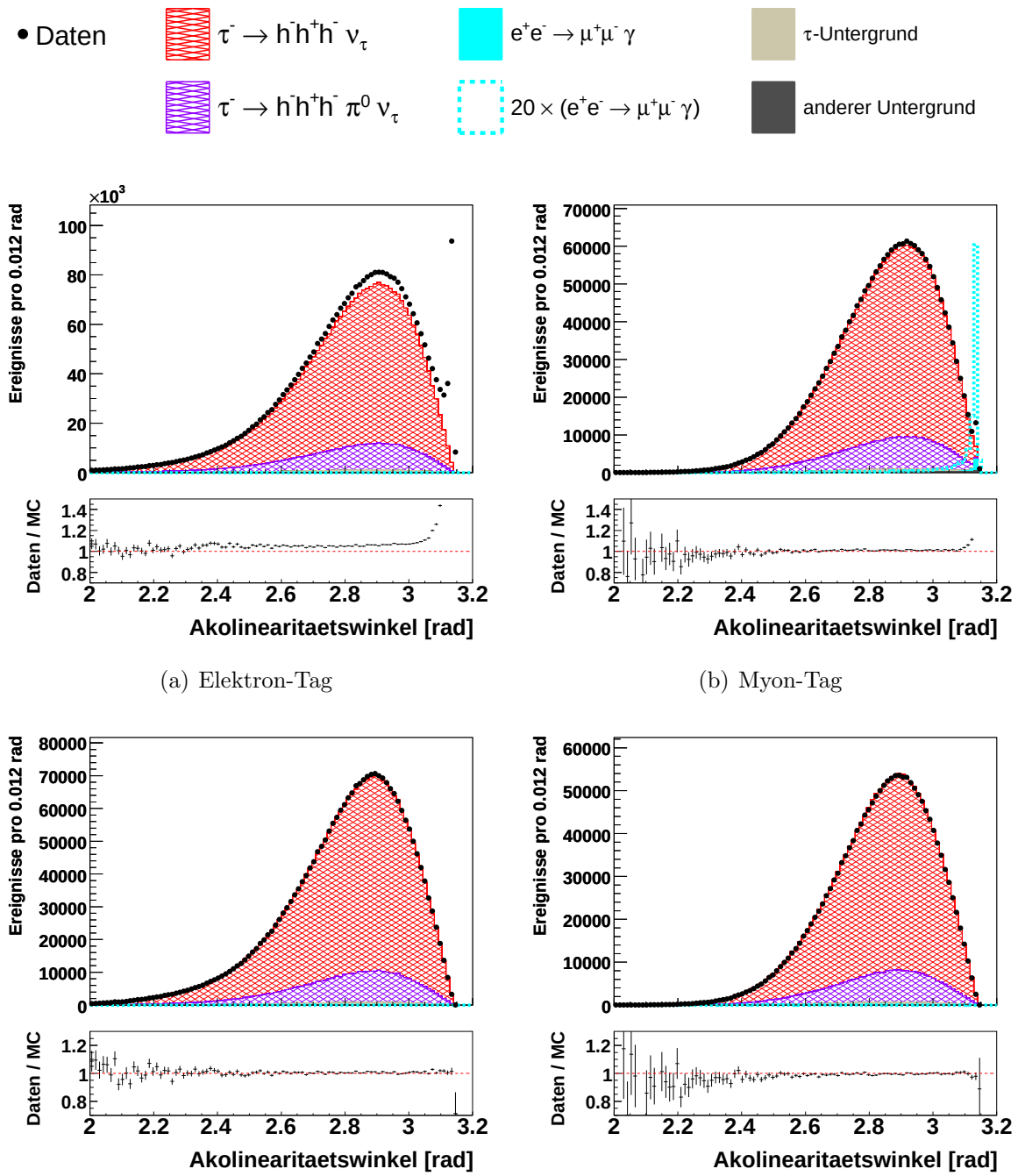
$$\alpha_{\text{Akolin.}} = \sphericalangle\left(\sum_{\substack{\text{geladen}\\ i}} \vec{p}_i^{\,\text{Hadron}}, \vec{p}^{\,\text{Lepton}}\right)$$

Für gewöhnliche Bhabha- und Myonpaar-Ereignisse nimmt dieser Winkel mit 180° sein Maximum an. Radiative Bhabha- und Myonpaar-Ereignisse, wie sie in der untersuchten Topologie vorkommen, haben Akolinearitätswinkel nahe an diesem Maximalwert.

Die Akolinearitätsverteilungen, ohne Anwendung der in diesem Abschnitt beschriebenen Schnitte gegen QED-Untergründe, sind in Abbildung 3.6(a) und 3.6(b) gezeigt. Sie weisen einen deutlichen Datenüberschuss bzw. eine Ansammlung von $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$-Ereignissen bei Werten nahe dem maximalen Akolinearitätswinkel auf. Im Gegensatz dazu zeigen Abbildung 3.6(c) und 3.6(d) den Fall, dass alle Auswahlkriterien angewendet werden. Hier ist die Übereinstimmung zwischen Daten und simulierten Ereignissen sehr gut und es sind keine QED-Untergründe mehr erkennbar.

3.2.2 Unterdrückung von Untergründen vom Typ $\tau^- \to h^-h^+h^-\pi^0\nu_\tau$ und $e^+e^- \to q\bar{q}$

Die bedeutendsten Untergründe aus τ-Zerfällen sind, wie beispielsweise in Abbildung 3.6 erkennbar, die vom Typ $\tau^- \to h^-h^+h^-\pi^0\nu_\tau$ (mit $h^\pm = \pi^\pm$ oder $h^\pm = K^\pm$). Da es



(a) Elektron-Tag

(b) Myon-Tag

(c) Elektron-Tag

(d) Myon-Tag

Abbildung 3.6: *Verteilungen der Akolinearität der Ereignisse. (a) und (b) zeigen die Verteilung für Elektron-Tag und Myon-Tag ohne Anwendung des Elektron-Vetos auf die Spuren der Hadron-Hemisphäre und ohne die Schnitte auf den Impuls des Tag-Leptons und auf die fehlende invariante Masse des Ereignisses. In (c) und (d) sind die Verteilungen für Elektron-Tag und Myon-Tag gezeigt, bei denen alle Auswahlkriterien angewendet wurden. Es sind jeweils alle Skalierungen und Korrekturen angewendet. Die simulierten Ereignisse vom Typ $\tau^- \to h^- h^+ h^- \nu_\tau$ sind auf die gemessenen Verzweigungsverhältnisse skaliert. Die Form der simulierten Verteilung der Ereignisse vom Typ $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ ist zusätzlich, skaliert mit dem Faktor 20, den restlichen Verteilungen überlagert dargestellt. Dieser Untergrund ist quasi vollständig unterdrückt.*

sich, wie bei den Signalzerfällen ($\tau^- \to h^- h^+ h^- \nu_\tau$), um τ-Zerfälle mit drei geladenen Teilchen handelt, werden sie durch die bisherigen Selektionskriterien nicht unterdrückt. Neben der Möglichkeit, die Zerfälle der Art $\tau^- \to h^- h^+ h^- \pi^0 \nu_\tau$ als Untergrund zu behandeln, könnte man sie auch inklusive des neutralen Pions rekonstruieren und die dazugehörigen Verzweigungsverhältnisse messen. Wegen der systematischen Unsicherheit bei der Rekonstruktion neutraler Pionen bei *BaBar* wird dieser Schritt in der vorliegenden Arbeit jedoch nicht durchgeführt.

Neutrale Pionen zerfallen quasi instantan in zwei Photonen[3], welche ihre Energie im elektromagnetische Kalorimeter deponieren. Darum wird für die von neutralen Teilchen im elektromagnetischen Kalorimeter deponierte Energie

$$\sum_{neutral} E_{neutral} < 0{,}25\,\mathrm{GeV}$$

gefordert. Dabei werden die Energiedepositionen neutralen Teilchen zugeordnet, welche nicht mit der Spur eines geladenen Teilchens assoziiert werden können. Aus Abbildung 3.7 ist ersichtlich, dass somit der Bereich verworfen wird, in dem das Verhältnis „Signal über Untergrund“ kleiner als eins ist.

Zur Bildung der Summe der Energie neutraler Teilchen werden nicht alle neutralen Teilchen berücksichtigt. Es gehen nur diejenigen ein, bei denen die Energiedeposition im Kalorimeter die folgenden Kriterien erfüllt:

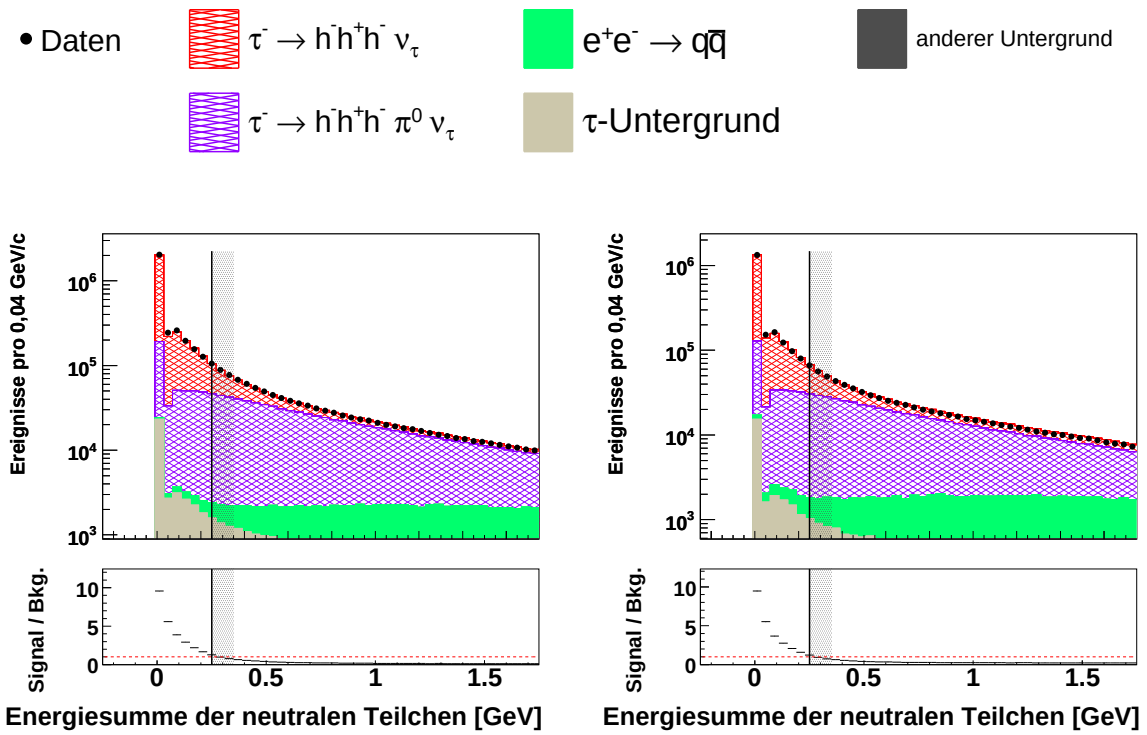
- Niederenergetische Bremsstrahlung ist für den Untergrund nicht von Bedeutung und wird in der Detektor-Simulation nicht richtig beschrieben [34]. Deshalb soll die deponierte Energie des neutralen Teilchens größer als 50 MeV sein.

- Das in Gleichung 2.1 definierte laterale Moment LAT der Energiedeposition eines Teilchens ist ein Maß für die Breite eines Schauers im elektromagnetischen Kalorimeter. Für die Summation der Energien der neutralen Teilchen werden nur Energiedepositionen mit
$$0 < LAT < 0{,}8$$
berücksichtigt.

- In hadronischen Schauern können neutrale Teilchen (z.B. Neutronen) entstehen, die in einiger Entfernung zum Schauer Energie im elektromagnetischen Kalorimeter deponieren[4]. Da die Simulation solche Teilchen schlecht beschreibt, werden nur Energiedepositionen berücksichtigt, deren Schwerpunkt mehr als 30 cm von der nächsten Spur eines geladenen Teilchens entfernt ist. Diese Bedingung verringert die Wirkung des Schnitts auf die Summe der Energie neutraler Teilchen, sie ist aber wegen der schlechten Beschreibung durch die Simulation nötig.

Neben den Untergründen vom Typ $\tau^- \to h^- h^+ h^- \pi^0 \nu_\tau$ sind noch Untergrundereignisse der Art $e^+e^- \to q\bar{q}$ von Bedeutung. Zwar ist die entsprechende Anzahl an selektierten Ereignissen verhältnismäßig klein, dennoch stellt sie im Falle des Zerfallskanals $\tau^- \to K^- K^+ \pi^- \nu_\tau$ ein Problem dar. Für diesen Zerfall wird in Abschnitt 4.1

[3] $\mathcal{B}(\pi^0 \to \gamma\gamma) \approx 99{,}8\,\%, \quad \tau_{\pi^0} = (8{,}4 \pm 0{,}6) \times 10^{-17}\,\mathrm{s}$ [2].
[4] Sogenannte „splitt-offs“.



(a) Elektron-Tag (b) Myon-Tag

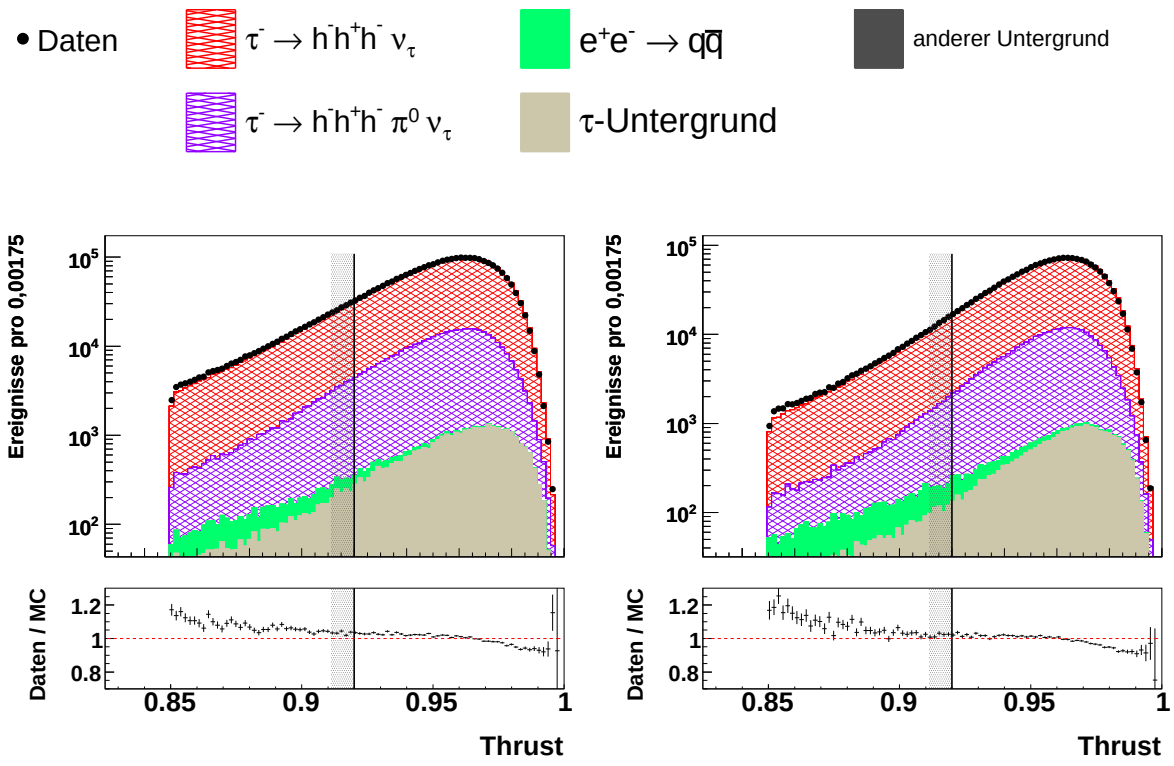
Abbildung 3.7: *Verteilung der Energiesumme neutraler Teilchen im Ereignis für (a) Elektron-Tag und (b) Myon-Tag. Nicht angewendet ist der in Abschnitt 3.2.2 beschriebene Schnitt auf die aufgetragene Größe sowie die Schnitte auf den Thrust und die invariante Masse der geladenen Teilchen in der Hadron-Hemisphäre. Der Schnitt auf den Thrust aus der Vorselektion ist hingegen angewendet. Berücksichtigt werden nur neutrale Teilchen, die gewisse im Text näher beschriebene Kriterien erfüllen. Die darin enthaltene Forderung, dass die einzelnen neutralen Teilchen Energien größer als* 50 *MeV haben müssen, verursacht die Unstetigkeit zwischen dem ersten und dem zweiten Bin. Im Unterschied zu vorigen Abbildungen ist das Verhältnis „Signal über Untergrund“ (statt „Daten über Simulation“) gezeigt.*

durch einen Fit der Verteilung der invarianten Massen des K^+K^--Paars der Anteil an Ereignissen bestimmt, der aus dem Zerfall $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$ stammt. Die ϕ-Resonanz zerfällt in diesen Fällen in zwei geladene Kaonen. Es hat sich gezeigt (Kapitel 4), dass die verbleibenden Untergründe vom Typ $e^+e^- \to q\bar{q}$ ebenfalls eine resonante Struktur im Bereich der ϕ-Masse aufweisen. Ursache sind beispielsweise Zerfälle der Art $D^- \to \phi\pi^-$ und $D^- \to \phi\pi^-\pi^0$.

Um die mit diesem Untergrund verbundene systematische Unsicherheit zu minimieren, wird er durch zwei zusätzliche Auswahlkriterien weiter unterdrückt. Der erlaubte Bereich des Thrustes wird, wie in Abbildung 3.8 gezeigt, eingeschränkt auf Werte

$$T > 0{,}92.$$

Für die Zerfallskanäle $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$, die in dieser Ar-



(a) Elektron-Tag (b) Myon-Tag

Abbildung 3.8: *Verteilung des Thrustes für (a) Elektron-Tag und (b) Myon-Tag. Nicht angewendet sind der Schnitt auf die invariante Masse der drei geladenen Teilchen der Hadron-Hemisphäre und der in Abschnitt 3.2.2 beschriebene Schnitt auf den Thrust. Der Schnitt auf den Thrust aus der Vorselektion ist hingegen angewendet und an der Kante bei $T = 0{,}85$ zu erkennen.*

beit gemessenen Zerfallskanäle mit den kleinsten Verzweigungsverhältnissen, sind die damit verbundenen Einbußen in der Selektionseffizienz sehr gering (im Vergleich zum gezeigten Fall $\tau^- \to h^- h^+ h^- \nu_\tau$).

Des Weiteren wird für die invariante Masse der drei geladenen Teilchen in der Hadron-Hemisphäre

$$m(h^- h^+ h^-) < 1{,}85\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$$

gefordert, da für τ-Zerfälle diese invariante Masse immer kleiner als die τ-Masse ($m_\tau = 1{,}777\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$ [2]) sein muss.[5] Die Hadronen werden dabei gemäß der in Abschnitt 3.3 beschriebenen Selektion als Pionen und Kaonen behandelt.

Die in diesem Abschnitt erläuterten Selektionskriterien sind zur Übersicht in Tabelle 3.2 zusammengefasst.

[5] Wegen der endlichen Impulsauflösung des Detektors muss die Grenze etwas über der τ-Masse liegen.

Tabelle 3.2: *Übersicht der in Abschnitt 3.2 beschriebenen Selektionskriterien zur Selektion von Ereignissen des Typs $\tau^- \to h^- h^+ h^- \nu_\tau$.*

Selektionskriterium	Bedingung
Lepton Tag	ein Lepton in der Lepton-Hemisphäre
Ladungserhaltung	$\sum_i q_i = 0$
K_S^0-Veto	$m(\pi^+\pi^-) < 0{,}482\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$ oder $m(\pi^+\pi^-) > 0{,}513\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$
Elektron-Veto	kein Elektron in der Hadron-Hemisphäre
Leptonimpuls	$p_{\mathrm{Lepton,CMS}} < 4{,}3\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}}$
Fehlende invariante Masse	$m_{\mathrm{miss}} > 1{,}8\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$ $m_{\mathrm{miss}} < 8{,}0\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$
Energie neutraler Teilchen	$\sum_{neutral} E_{neutral} < 0{,}25\,\mathrm{GeV}$
Thrust	$T > 0{,}92$
Invariante Hadronenmasse	$m(h^- h^+ h^-) < 1{,}85\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$

3.3 Selektion der Signalkanäle

Nachdem in Abschnitt 3.2 beschrieben wurde, wie aus dem vorhandenen Datensatz $\tau^+\tau^-$-Ereignisse selektiert werden, bei denen eines der Tauonen in drei geladene Hadronen zerfällt, wird in diesem Abschnitt auf die Unterscheidung der möglichen Zerfallskanäle eingegangen.

Für geladene Hadronen aus τ-Zerfällen kommen, neben extrem kurzlebigen Resonanzen, als langlebige Teilchen nur geladene Pionen und Kaonen in Frage. Die Erzeugung anderer Hadronen ist durch das kinematische Limit der τ-Masse und durch die Baryonenzahlerhaltung ausgeschlossen. Für die Zerfälle $\tau^- \to h^- h^+ h^- \nu_\tau$ genügt es also, zwischen $h^\pm = \pi^\pm$ und $h^\pm = K^\pm$ zu unterscheiden. Dies erfolgt anhand der in Abschnitt 2.3 beschriebenen Kriterien zur Teilchenidentifikation.

Um, wie in Kapitel 5 beschrieben, mehrere Verzweigungsverhältnisse simultan messen zu können, ist es nötig, dass eindeutig zwischen $h^\pm = \pi^\pm$ und $h^\pm = K^\pm$ unterschieden wird. Dies wird dadurch erreicht, dass geladene Teilchen in der Hadron-Hemisphäre, welche als Kaonen identifiziert wurden, als Kaonen behandelt werden und alle anderen als Pionen angesehen werden. Es erfolgt also keine explizite Anwendung von Kriterien zur Pionidentifikation.

Die wichtigste Größe zur Unterscheidung zwischen geladenen Pionen und Kaonen bei *BaBar* ist der im Čerenkov-Detektor rekonstruierte Öffnungswinkel des Čerenkov-Kegels. Damit diese Größe für alle geladenen Teilchen zur Verfügung steht, werden nur solche Ereignisse betrachtet, bei denen alle Spuren geladener Teilchen im Akzeptanzbereich des Čerenkov-Detektors liegen. Für den Polarwinkel bedeutet dies eine

Einschränkung auf den Bereich [35]

$$25{,}5^\circ < \theta < 141{,}4^\circ.$$

Wie schon in früheren Analysen zu τ-Zerfällen bei *BaBar* [30, 36, 37] hat sich auch in dieser Arbeit gezeigt, dass für Kaonimpulse um 0,7 $\frac{\text{GeV}}{\text{c}}$ die Übereinstimmung zwischen Daten und simuliertem Ereignissen unzureichend ist.

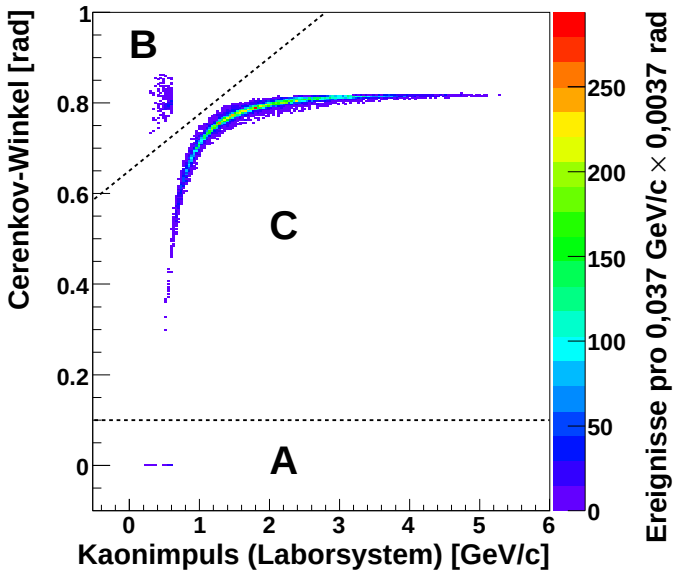


Abbildung 3.9: *Čerenkov-Winkel gegen Kaonimpuls im Laborsystem für rekonstruierte Kaonen aus einem Teil der aufgezeicheten Daten. Die gestrichelten Linien kennzeichnen die im Text beschriebenen Schnitte.*

In Abbildung 3.9 ist für rekonstruierte geladene Kaonen der Čerenkov-Winkel gegen den Laborimpuls der Kaonen aufgetragen. Es sind gemäß [22] drei Bereiche zu unterscheiden:

A Der Bereich, in dem der Čerenkov-Winkel auf Null gesetzt wird. Für die entsprechenden Teilchen konnte kein Čerenkov-Kegel rekonstruiert werden. Die Kaonenidentifikation erfolgt über die Messung des spezifischen Energieverlusts ($\frac{dE}{dx}$) und ist somit nur für kleine Impulse möglich (Abschnitt 2.3).

B Identifizierte Kaonen mit Impulsen um 0,7 $\frac{\text{GeV}}{\text{c}}$ und Čerenkov-Winkeln von etwa 0,8 rad. Hierbei handelt es sich um Kaonen, welche kurz vor dem Čerenkov-Detektor zerfallen sind oder Wechselwirkungen mit dem Detektormaterial hatten. Die Impuls- und die Energieverlustmessung ($\frac{dE}{dx}$-Messung) im Spurkammmersystem beziehen sich dann auf das Kaon, der rekonstruierte Čerenkov-Winkel hingegen auf das Sekundärteilchen. Die Richtung des Teilchens, das durch den Čerenkov-Detektor geht, ist aufgrund der Wechselwirkung nicht genau bekannt und schlägt sich im gemessenen Čerenkov-Winkel nieder. Auf diese Weise sind auch Werte größer als der maximale Öffnungswinkel möglich. Die Identifikation als Kaon basiert auf der $\frac{dE}{dx}$-Messung, weshalb nur kleine Impulse vorkommen.

C Als dritter und quantitativ größter Bereich ist das schon in Abbildung 2.9 gezeigte Kaonband zu sehen. Seine Form folgt aus dem Zusammenhang zwischen Čerenkov-Winkel θ_C, Brechungsindex n und Geschwindigkeit $\beta = v/c$ der Teilchen:

$$\cos\theta_C = \frac{1}{n\beta}.$$

Für rekonstruierte Kaonen wird

$$\theta_\mathrm{C} > 0{,}1\,\mathrm{rad}$$

und

$$\frac{\theta_\mathrm{C}}{\mathrm{rad}} < 0{,}65 + \frac{0{,}125 \cdot p_\mathrm{Lab}}{\mathrm{GeV/c}}$$

gefordert. θ_C bezeichnet dabei den Öffnungswinkel des Čerenkov-Lichtkegels und p_Lab den Impuls im Laborsystem. Dadurch werden nur Ereignisse zugelassen, bei denen die Kaonen im Kaonband (C) rekonstruiert wurden. Mit dieser Forderung wird die beobachtete Diskrepanz zwischen Daten und simulierten Ereignissen bei kleinen Kaonimpulsen beseitigt.

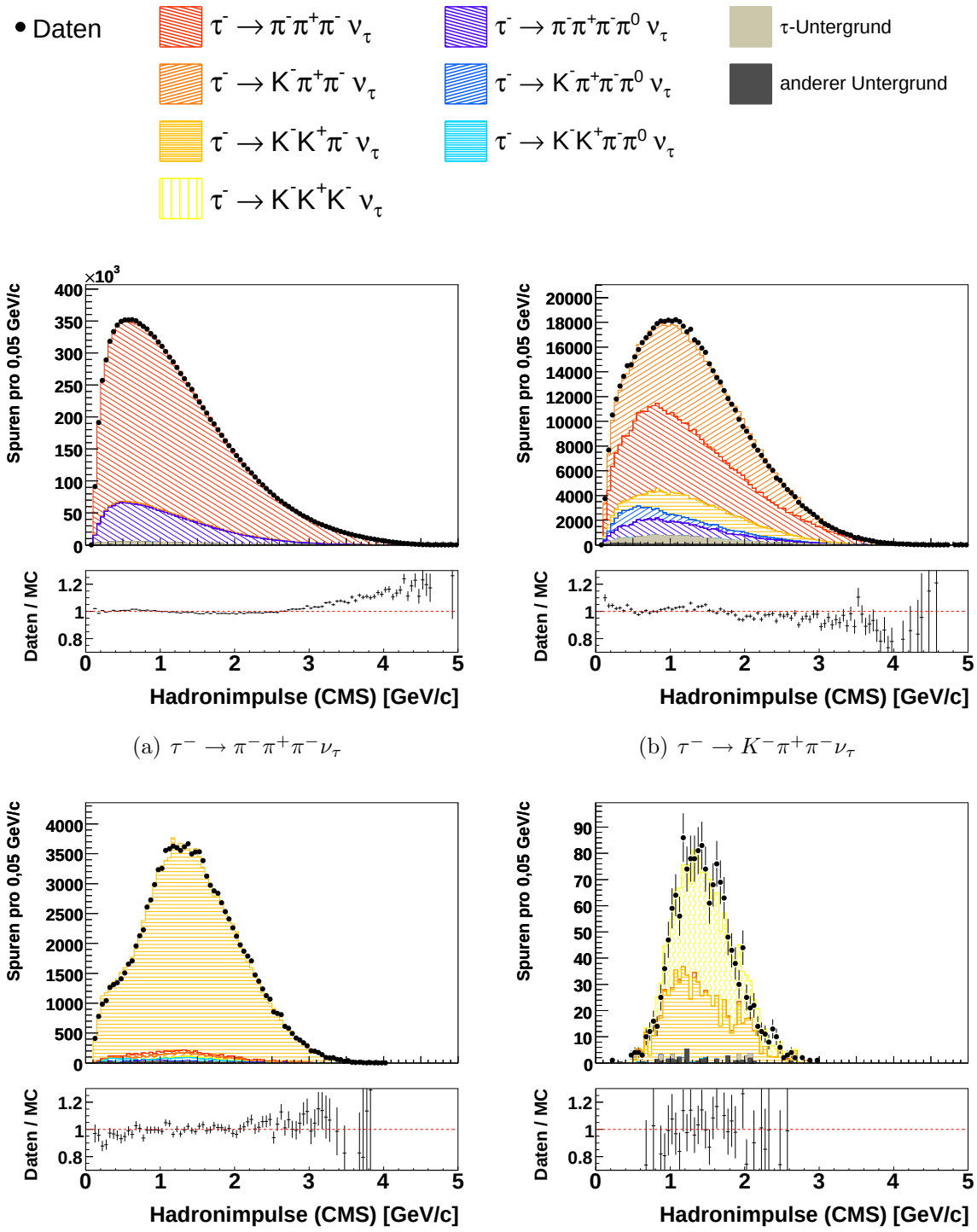
Mit den genannten Kriterien zur Unterscheidung zwischen Pionen und Kaonen werden die Zerfälle vom Typ $\tau^- \to h^- h^+ h^- \nu_\tau$ in die folgenden Zerfallskanäle unterteilt:

$$\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau \tag{3.1}$$
$$\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau \tag{3.2}$$
$$\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau \tag{3.3}$$
$$\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau \tag{3.4}$$

$$\tau^- \to \pi^-K^+\pi^-\nu_\tau \tag{3.5}$$
$$\tau^- \to K^-\pi^+K^-\nu_\tau \tag{3.6}$$

Die Zerfälle (3.5) und (3.6), bei denen die beiden Pionen bzw. Kaonen die gleiche Ladung tragen, sind nur über Prozesse höherer Ordnung möglich und stark unterdrückt. In dieser Analyse sind diese Fälle durch falsch rekonstruierte Ereignisse dominiert. Bestimmt werden deshalb nur die Verzweigungsverhältnisse der Zerfallskanäle (3.1), (3.2), (3.3) und (3.4).

In Abbildung 3.10 sind für die Fälle (3.1) bis (3.4) die Impulsverteilungen der geladenen Hadronen gezeigt. Durch Missidentifikation der Pionen und Kaonen können Teilchen in einem anderen als dem wahren Zerfallskanal rekonstruiert werden. Der Zerfallskanal $\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ hat von den gemessenen das mit Abstand größte Verzweigungsverältnis. Der Anteil des Untergrunds aus den anderen Kanälen ist deshalb in diesem Fall gering. Bei den Zerfallskanälen $\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ sind jeweils die Zerfallskanäle mit einem Kaon weniger, also $\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$, die dominierenden Untergründe. Dies liegt an den jeweils deutlich größeren Verzweigungsverhältnissen dieser Kanäle. Im Falle des Zerfallskanals $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ ist der Untergrundanteil am geringsten. Dies ist darauf zurückzuführen, dass das Verzweigungsverhältnis von $\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ von der gleichen Größenordnung ist und die Verzweigungsverhältnisse von $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\pi^0\nu_\tau$ und $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ deutlich kleiner sind.



(a) $\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$

(b) $\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$

(c) $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$

(d) $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$

Abbildung 3.10: *Impulsverteilungen der geladenen Hadronen im Schwerpunktsystem für die in dieser Arbeit gemessenen Zerfallskanäle (a) $\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ (b) $\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ (c) $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ (d) $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$. Alle Selektionskriterien sind angewendet. Für jedes Ereignis sind die Impulse der drei geladenen Hadronen berücksichtigt.*

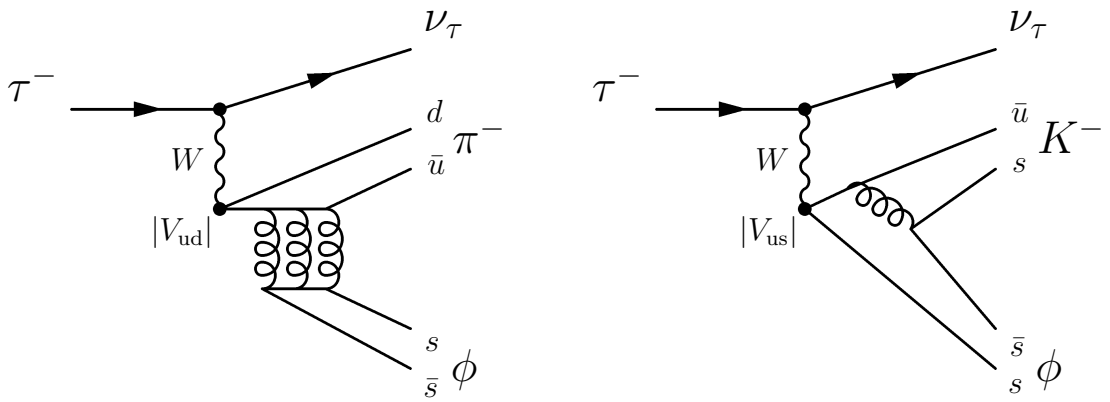
Kapitel 4

Fit der ϕ-Resonanz

Zerfälle von τ-Leptonen mit drei geladenen Hadronen im Endzustand erfolgen zum Teil über resonante Zustände. In diesem Kapitel werden Zerfälle der Art $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$ untersucht. Entsprechende Feynman-Graphen sind in Abbildung 4.1 gezeigt.

Die Reaktion $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$ ist nach der OZI-Regel[1] unterdrückt. Das $s\bar{s}$-Paar im ϕ-Meson entsteht über Gluonenaustausch. Da das ϕ-Meson farbneutral ist und die C-Parität in der starken Wechselwirkung erhalten ist, müssen mindestens drei Gluonen ausgetauscht werden [38, 39].

Im Gegensatz dazu ist der Zerfall $\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$ nicht nach der OZI-Regel unterdrückt, da das über Gluonaustausch entstehende $s\bar{s}$-Paar nicht farbneutral sein muss. Er ist jedoch im Gegensatz zum Zerfall $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$ Cabibbo-unterdrückt. Außerdem ist das Verzweigungsverhältnis durch den kleinen Phasenraum limitiert.



(a) $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$ (b) $\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$

Abbildung 4.1: *Feynmangraphen der Zerfälle (a) $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$ und (b) $\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$. Der Zerfall $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$ erfordert den Austausch von mindestens drei Gluonen und ist somit OZI-unterdrückt. Der Zerfall $\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$ ist durch den Austausch von einem Gluon möglich, aber durch das Auftreten von $|V_{\mathrm{us}}|$ Cabibbo-unterdrückt.*

[1] Benannt nach S. Okubo, G. Zweig und J. Iizuka.

Die ϕ-Resonanz zerfällt in etwa der Hälfte aller Fälle in zwei geladene Kaonen.[2] Die Endzustände sind dann vom gleichen Typ wie die der nichtresonanten Zerfälle $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ bzw. $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$, deren Selektion in Kapitel 3 beschrieben ist.

Die resonanten Zerfälle zeigen sich in den Verteilungen der invarianten Massen der K^+K^--Paare, $m(K^+K^-)$, als „Massenpeaks“ (Abb. 4.2 und 4.6). Durch Anpassungen (Fits) von Modellen an diese Verteilungen werden die Ereigniszahlen der Zerfälle $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$ im vorhandenen Datensatz bestimmt. In Kapitel 5 werden daraus die zugehörigen Verzweigungsverhältnisse berechnet.

4.1 Fit der ϕ-Resonanz in $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$

In diesem Abschnitt wird für den Datensatz der selektierten $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$-Ereignisse die Anzahl der darin enthaltenen Ereignisse vom Typ $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau$ bestimmt.[3] Dies geschieht durch einen Fit der in Abbildung 4.2 dargestellten Verteilung der invarianten Masse des K^+K^--Paars im Bereich der Masse des ϕ-Mesons[4].

Zunächst werden Funktionen bestimmt, welche die verschiedenen Signal- und Untergrundverteilungen simulierter Ereignisse in Abbildung 4.2 beschreiben. Die Anpassung der Funktionen an die entsprechenden Verteilungen erfolgt mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode, welche weiter unten beschrieben wird. Anschließend werden die Funktionen linear addiert. Diese Summe bildet das Modell für die Verteilung der Daten. Die Anzahl der Signalereignisse wird durch eine Anpassung dieses Modells (der Summe von Signal- und Untergrundfunktionen) an die Daten ermittelt. Die Anpassung erfolgt mittels der *erweiterten* Maximum-Likelihood-Methode, auf welche ebenfalls weiter unten näher eingegangen wird. Zur Beschreibung der betrachteten Verteilungen werden die folgenden Funktionen verwendet:

Resonantes Signal $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau$:
Die Resonanz wird durch eine Breit-Wigner-Funktion beschrieben. Um die Auflösung des Detektors zu berücksichtigen, wird diese mit einer Gauß-Funktion gefaltet. Eine solche auch „Voigt-Funktion“ genannte Funktion wird noch an mehreren Stellen vorkommen und deshalb hier allgemein definiert:

$$V(x;\, m, \Gamma, \sigma) = \frac{1}{(x-m)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \otimes \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}\right). \tag{4.1}$$

Die Faltung wird durch das $\otimes$ gekennzeichnet. Breite und Mittelwert der Breit-Wigner-Funktion werden auf die in [2] genannten Werte der ϕ-Resonanz gesetzt, die Breite der Gauß-Funktion wird aus den simulierten Ereignissen bestimmt. Die Funktion zur Beschreibung des Signals ist somit:

$$F_{\phi\pi}(x) = C_{\phi\pi} \times V(x;\, m_\phi, \Gamma_\phi, \sigma_1),$$

[2] $\mathcal{B}(\phi \to K^+K^-) = (49{,}2 \pm 0{,}6)\,\%$ [2].

[3] Der Anteil an Ereignissen vom Typ $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$, bei denen die ϕ-Resonanz nicht in ein K^+K^--Paar zerfällt, sondern z.B. in $K_L^0K_S^0$ oder $\pi^-\pi^+\pi^0$, ist im Datensatz der selektierten $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$-Ereignisse sehr gering und wird vernachlässigt.

[4] $m_\phi = (1019{,}460 \pm 0{,}019)\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}^2}$ [2].

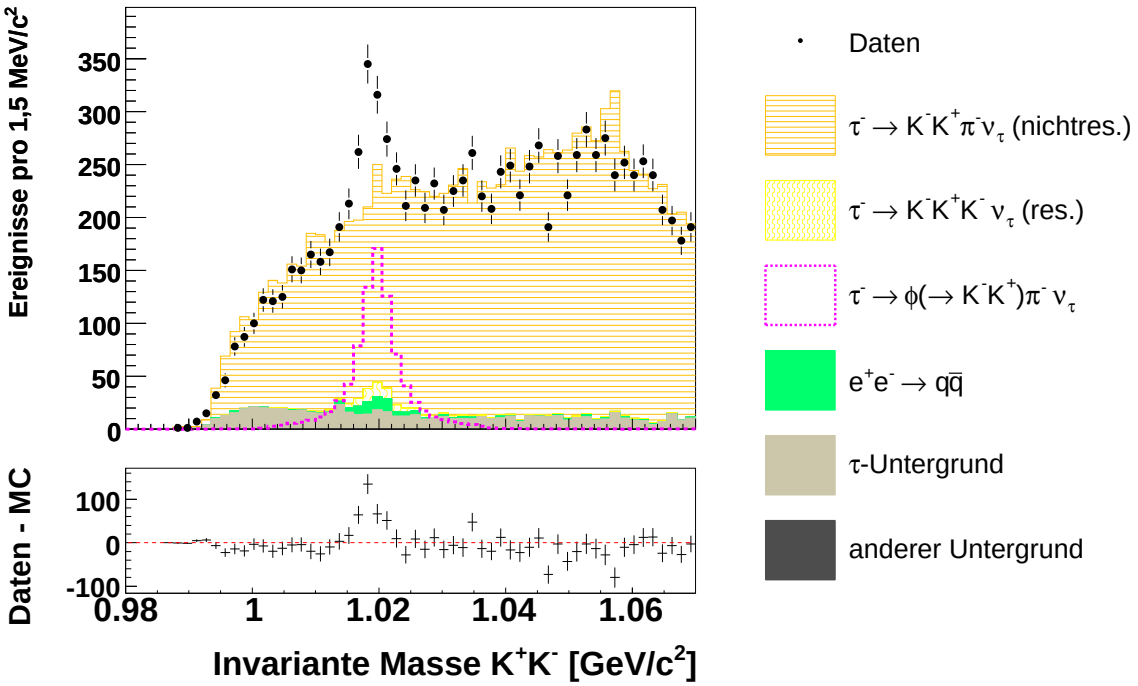


Abbildung 4.2: *Verteilung der invarianten Masse des K^+K^--Paars aus den selektierten Zerfällen der Art $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ im Bereich der ϕ-Resonanz. Die Verteilung der simulierten Ereignisse des Typs $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau$ ist auf einen beliebigen Wert skaliert und nicht in der Summe der anderen simulierten Ereignisse berücksichtigt.*

wobei $C_{\phi\pi}$ eine Normierungskonstante ist.

Nichtresonante $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$-Ereignisse:
Der nichtresonante Anteil wird durch ein Polynom dritten Grades nachgebildet:

$$F_{\text{nichtres.}}(x) = C_{\text{nichtres.}} \times (1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3).$$

Bei Verwendung eines Polynom fünften Grades ändert sich das Ergebis lediglich um $\mathcal{O}(1\,‰)$.

Untergrund $e^+e^- \to q\bar{q}$:
Für den resonanten Anteil wird, wie beim Signal, eine mit einer Gauß-Funktion gefaltete Breit-Wigner-Funktion angenommen. Breite und Mittelwert der Breit-Wigner-Funktion werden ebenfalls auf die Literaturwerte der ϕ-Resonanz gesetzt. Der nichtresonante Anteil wird durch ein Polynom ersten Grades berücksichtigt:

$$F_{q\bar{q}}(x) = C_{q\bar{q}} \times \{g_1 \times V(x;\, m_\phi, \Gamma_\phi, \sigma_2) + g_2 \times (1 + b_1 x)\}\,,$$

wobei $V(x;\, m_\phi, \Gamma_\phi, \sigma_2)$ die in Gleichung 4.1 definierte Voigt-Funktion ist.

Restlicher Untergrund:
Dieser Untergrund besteht im Wesentlichen aus $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\pi^0\nu_\tau$-Ereignissen. Ein Polynom dritten Grades wird mit einer Funktion der Form

$$H(x;\, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\exp(-\alpha_1(x - \alpha_2)) + 1} \qquad \alpha_1, \alpha_2 > 0 \tag{4.2}$$

multipliziert, welche im nächsten Abschnitt noch mehrfach Verwendung finden wird. Letztere trägt dem Abfall nahe dem unteren kinematischen Limit Rechnung. Die Funktion zur Beschreibung des restlichen Untergrunds ist somit:

$$F_{\text{Rest}}(x) = C_{\text{Rest}} \times H(x;\, c_1, c_2) \times (d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3).$$

Der resonante Beitrag des Zerfallskanals $\tau^- \to \phi K^- \nu_\tau$ wird nicht gesondert betrachtet. Da die Verteilungen der invarianten Masse des K^+K^--Paars aus dem ϕ-Zerfall für die Fälle $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$ sehr ähnlich sind, kann nur deren Summe durch einen Fit bestimmt werden. Die Zerfälle vom Typ $\tau^- \to \phi K^- \nu_\tau$ werden im nächsten Abschnitt behandelt. Die Vermischung der beiden Zerfälle wird in Kapitel 5 bei der Berechnung der Verzweigungsverhältnisse bestimmt.

Das Modell, welches an die Daten angepasst wird, ist also eine Linearkombination von vier Funktionen.

$$\begin{aligned} F_{\text{Modell}}(m_{K^+K^-}) = {} & N_{\phi\pi} && \times \quad F_{\phi\pi}(m_{K^+K^-}) \\ & +N_{\text{nichtres.}} && \times \quad F_{\text{nichtres.}}(m_{K^+K^-}) \\ & +N_{q\bar{q}} && \times \quad F_{q\bar{q}}(m_{K^+K^-}) \\ & +N_{\text{Rest}} && \times \quad F_{\text{Rest}}(m_{K^+K^-}). \end{aligned}$$

Die Normierungskonstanten $C_{\phi\pi}$, $C_{\text{nichtres.}}$, $C_{q\bar{q}}$ und C_{Rest} wurden dabei so gewählt, dass die einzelnen Funktionen $F_{\phi\pi}$, $F_{\text{nichtres.}}$, $F_{q\bar{q}}$ und F_{Rest} im Fitbereich auf 1 normiert sind.[5] Somit entsprechen die Linearkoeffizienten $N_{\phi\pi}$, $N_{\text{nichtres.}}$, $N_{q\bar{q}}$ und N_{Rest} gerade den Ereigniszahlen der jeweiligen Beiträge. Bei der Anpassung an die Daten werden alle (Form-) Parameter der vier einzelnen Funktionen konstant gehalten. Es wird somit angenommen, dass die entsprechenden Beiträge durch die simulierten Daten richtig beschrieben werden. Die Linearkoeffizienten (Ereigniszahlen) von resonantem und nichtresonantem Untergrund $N_{q\bar{q}}$ und N_{Rest} werden ebenfalls festgehalten. Die entsprechenden Werte werden mittels der erweiterten Maximum-Likelihood-Methode aus den simulierten Ereignissen bestimmt. Die einzigen freien Parameter bei der Anpassung an die Daten sind folglich die Anzahl $N_{\phi\pi}$ der Signalereignisse $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau$ sowie die Anzahl $N_{\text{nichtres.}}$ der nichtresonanten Ereignisse $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$.

Die Modellierung und Anpassung der Funktionen erfolgt mit Hilfe des Pakets RooFit [40], welches in der verwendeten Analysesoftware ROOT [41] enthalten ist. Zur Maximierung der Likelihood wird dabei der in ROOT implementierte MINUIT-Algorithmus [42] verwendet.

Bei der Maximum-Likelihood-Methode werden die Funktionen, welche an die Verteilungen der invarianten Masse $m(K^+K^-)$ angepasst werden sollen, als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen angesehen. Sei $P(m;\{a_j\}) \equiv P(m; a_1, a_2, \ldots, a_M)$ eine solche Funktion, wobei m die invariante Masse $m(K^+K^-)$ bezeichnet und die a_j Parameter der Funktion sind. Der Datensatz der invarianten Massen $m(K^+K^-)$ aus N Ereignissen wird als $\{m_i\} \equiv \{m_1, m_2, m_3, \ldots, m_N\}$ bezeichnet. Für den Datensatz $\{m_i\}$ wird die kombinierte Wahrscheinlichkeitsdichte L berechnet. Sie ist das Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichten der N Ereignisse, d.h. der Werte $P(m_i;\{a_j\})$, welche die

[5] Bei Verwendung des RooFit-Pakts (s.u.) [40] geschieht diese Normierung automatisch.

Funktion P für die einzelnen m_i annimmt [43]:

$$L(m_1,m_2,m_3,\ldots,m_N;a_1,a_2,\ldots,a_M) = \prod_{i=1}^{N} P(m_i;a_1,a_2,\ldots,a_M). \tag{4.3}$$

L wird als Likelihood oder Likelihood-Funktion bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $P(m;\{a_j\})$ beschreibt den Datensatz $\{m_i\}$ dann besonders gut, wenn die Parameter $\{a_j\}$ so gewählt sind, dass die Likelihood L maximal wird. Die Anpassung der Funktion ist damit auf ein Maximierungsproblem zurückgeführt. Aus technischen Gründen wird nicht die Likelihood, L, sondern deren negativer Logarithmus, $-\ln(L)$, minimiert.[6]

Die beschriebene Methode wird als „unbinned“ bezeichnet, da die Wahrscheinlichkeitsdichte jedes Ereignisses separat eingeht (in Gleichung 4.3 steht das Produkt der Wahrscheinlichkeitsdichten der N Ereignisse). Der davon zu unterscheidende Fall, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte für jedes Bin eines Histogramms berücksichtigt wird, ist in Abschnitt 4.3 behandelt.

Die in Gleichung 4.3 verwendete Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $P(m;\{a_j\})$ ist auf Eins normiert:

$$\int P(m;a_1,a_2,\ldots,a_M)\,dm = 1.$$

In Experimenten wie *BaBar* unterliegt die Anzahl der aufgezeichneten Ereignisse statistischen Schwankungen und ist nicht a priori bekannt. In einem solchen Fall ist es geschickter, eine Funktion $Q(m;a_1,a_2,\ldots,a_M)$ zu verwenden, die auf die erwartete Ereigniszahl, ν, normiert ist:

$$\int Q(m;a_1,a_2,\ldots,a_M)\,dm = \nu.$$

Um den zusätzlichen freien Parameter ν bei der Anpassung des Modells an die Daten zu berücksichtigen, wird die Likelihood L aus Gleichung 4.3 erweitert. Sie wird multipliziert mit der Poisson-Wahrscheinlichkeit, N Ereignisse zu erhalten, wenn der Mittelwert ν ist [43]:

$$L_e(m_1,m_2,m_3,\ldots,m_N;a_1,a_2,\ldots,a_M) = e^{-\nu}\frac{\nu^N}{N!}\cdot\prod_{i=1}^{N} Q(m_i;a_1,a_2,\ldots,a_M).$$

Dieses Vorgehen wird als „erweiterte Maximum-Likelihood-Methode“[7] bezeichnet. Es wird zur Anpassung des Modells an die Daten verwendet und liefert die Anzahl der Signalereignisse.

In Abbildung 4.3 sind die vier Funktionen zur Beschreibung der Signal- und Untergrundkomponenten nach ihrer Anpassung an die simulierten Ereignisse gezeigt.

[6] Das Produkt in Gleichung 4.3 wird dadurch zu einer Summe, die numerisch leichter zu berechnen ist. Das negative Vorzeichen macht aus dem Maximierungs- ein Minimierungsproblem, das mit dem MINUIT-Algorithmus gelöst werden kann.

[7] Englisch: Extended maximum likelihood method.

Die Darstellung der Ereignisse in Histogrammform darf jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, dass die Anpassung der Funktionen, wie bereits erwähnt, „unbinned“ erfolgte. In Anhang C sind die aus der Anpassung an die simulierten Ereignisse bestimmten Parameter der einzelnen Funktionen explizit aufgelistet.

Die Linearkombination F_{Modell} dieser vier Funktionen soll an die Daten angepasst werden.[8] Um die Fitprozedur zu verifizieren, wird eine sogenannte Spielzeugstudie durchgeführt. Dazu wird die Funktion, welche als Modell für die Daten dient, als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion angesehen. Mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators werden N Werte für die invariante Masse des K^+K^--Paars generiert, welche gemäß dieser Funktion verteilt sind. Die generierte Verteilung stellt also eine hypothetische Messung von $m(K^+K^-)$ dar. Die freien Parameter und die Anzahl N sind dabei so gewählt, dass diese Verteilung der erwarteten Verteilung der Daten nahe kommt. Die erzeugten Werte werden als Spielzeugdaten bezeichnet. Nun wird das Modell zur Beschreibung der Daten an die generierten Spielzeugdaten angepasst. Die angepassten Parameter sollten innerhalb der statistischen Fehler des Fits mit den Parametern übereinstimmen, die beim Generieren der Spielzeugdaten verwendet wurden. Ist dies nicht der Fall, so ist die Fitprozedur inkorrekt und kann nicht auf Daten angewendet werden.

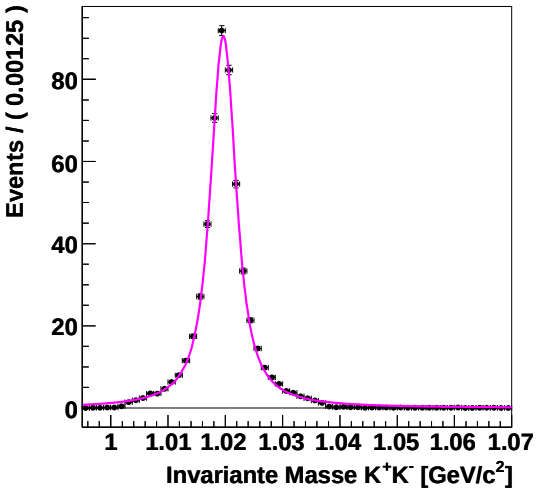
Zur Überprüfung dieser Eigenschaft wird die Prozedur 10 000-mal wiederholt. Es wird für jeden freien Parameter ein „wahrer Wert“ angenommen. Beim Generieren der Spielzeugdaten wird jeder freie Parameter innerhalb der Grenzen des statistischen Fehlers des wahren Werts variiert, um statistische Fluktuationen zu berücksichtigen. Für alle Parameter, die bei dem Fit bestimmt werden, wird jeweils der Pull berechnet:

$$pull = \frac{\text{gefitteter Wert} - \text{wahrer Wert}}{\text{Fehler des gefitteten Wertes}}.$$

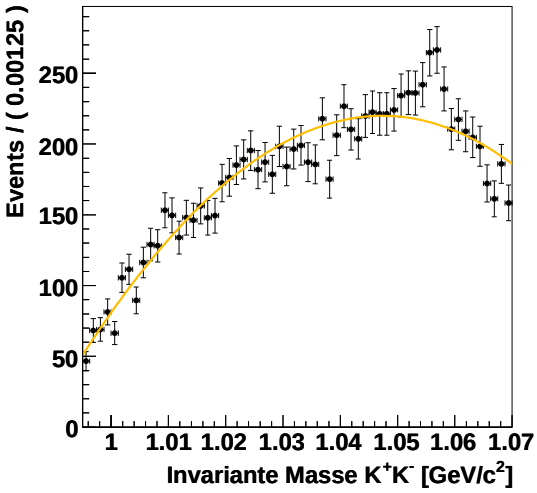
Stimmen die Fitergebnisse innerhalb der statistischen Fehler mit den wahren Werten überein, so sind die Pull-Werte gaußverteilt. Der Mittelwert der Verteilung ist dann Null, da Fitergebnis und wahrer Wert im Mittel übereinstimmen. Eine Breite von Eins bedeutet, dass der berechnete Fehler die richtige Größe hat.

Für die Spielzeugstudie zum Zerfall $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau$ wurden 10 000-mal Spielzeugdaten generiert. Dabei wurden als „wahre Werte“ 250 Signalereignisse und 5 000 nichtresonante Ereignisse vom Typ $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ angenommen. Zur Berücksichtigung statistischer Schwankungen wurden diese innerhalb ihrer Fehler variiert und entsprechend viele Ereignisse generiert. Die Anzahl der Untergrundereignisse und alle anderen Parameter entsprechen den Werten, welche durch Anpassungen der Modelle an die simulierten Ereignisse gewonnen werden. Ein generierter Spielzeugdatensatz sowie das daran angepasste Modell sind in Abbildung 4.4 gezeigt. Für die beiden im Fit an die (Spielzeug-) Daten freien Parameter (die Anzahl der resonanten $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau$-Ereignisse $N_{\phi\pi}$ und die der nichtresonanten $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$-Ereignisse $N_{\text{nichtres.}}$) sind dort ebenfalls die Pull-Verteilungen der Studie abgebildet. An beide Pull-Verteilungen ist jeweils eine Gaußfunktion angepasst. Die χ^2-Werte zeigen, dass diese die Verteilungen gut beschreiben. Die Breiten und Mittelwerte der Gaußfunktionen sind jeweils verträglich mit Eins bzw. Null. Die Fitergebnisse stimmen also innerhalb ihrer Fehler mit den „wahren Werten“ überein.

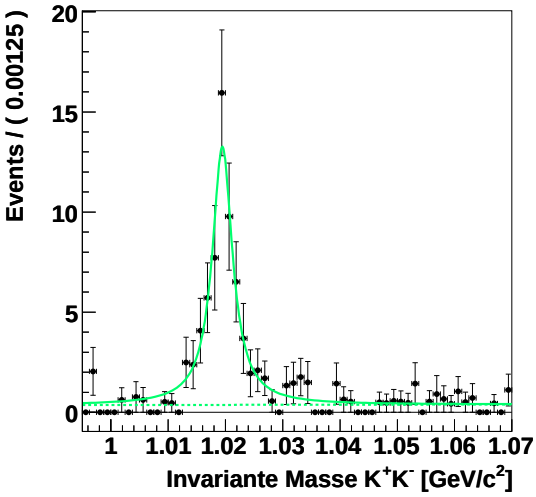
[8] Effektiv werden nur zwei Funktionen angepasst, da $C_{q\bar{q}}$ und C_{Rest} konstant gehalten werden.



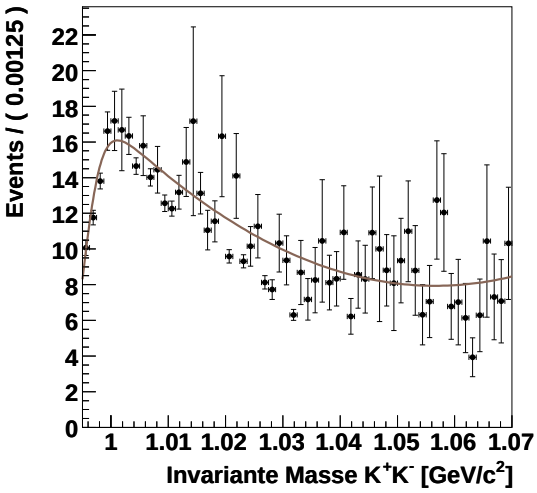
(a) Simulation: $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau$



(b) Simulation: $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ (nichtres.)

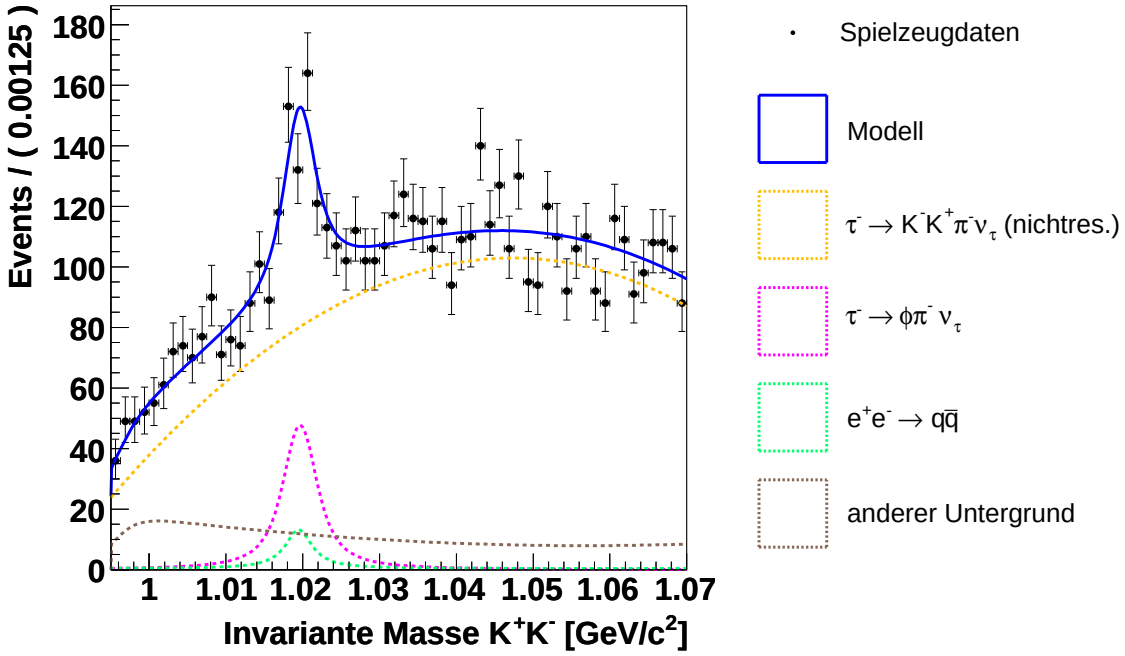


(c) Simulation: $e^+e^- \to q\bar{q}$

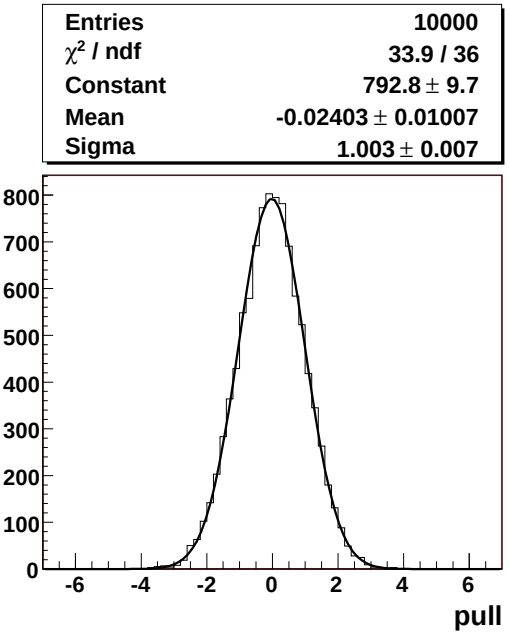


(d) Simulation: restlicher Untergrund

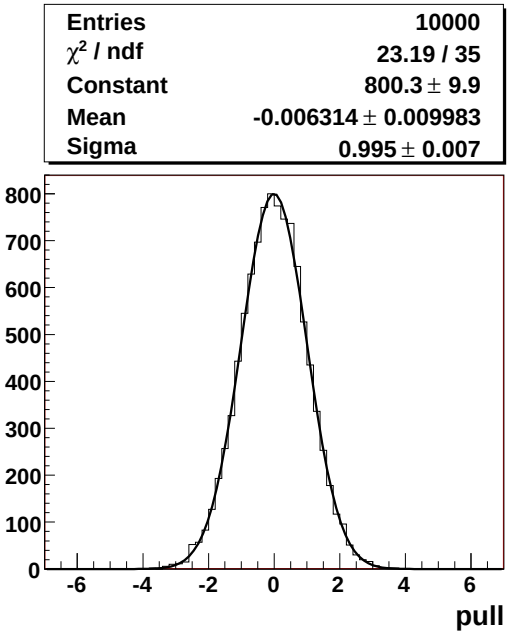
Abbildung 4.3: *Verteilungen der invarianten Masse $m(K^+K^-)$ von simulierten Ereignissen. Gezeigt sind die einzelnen Komponenten im Zerfallskanal $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$: (a) $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau$, (b) $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ nichtresonant, (c) $e^+e^- \to q\bar{q}$ und (d) restlicher Untergrund. Im Unterschied zu weiter oben gezeigten Verteilungen werden durch die schwarzen Punkte simulierte Ereignisse gekennzeichnet (und nicht Daten). Auf die Ereignisse sind alle Skalierungen (Luminosität) und Korrekturen angewendet, weshalb die Fehlerbalken nicht dem Poisson-Fehler der aufgetragenen Anzahl entsprechen. Das Maximum bei etwa $1{,}06\,\frac{\mathrm{GeV}}{c^2}$ im Fall (b) $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ (nichtresonant) ist statistischer Natur, was anhand einer Aufspaltung des Datensatzes überprüft wurde.*



(a) Spielzeugdaten und angepasstes Modell



(b) $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau$



(c) $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ (nichtresonant)

Abbildung 4.4: *(a) Verteilung der invarianten Masse $m(K^+K^-)$ von Spielzeugdaten für den Zerfallskanal $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau$ und das daran angepasste Modell. Die Pull-Verteilungen in (b) und (c) basieren auf* 10 000 *solcher Spielzeugdatensätze und Anpassungen. Gezeigt sind die Pull-Verteilungen für (b) $N_{\phi\pi}$, die Anzahl der Signalereignisse $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau$ und (c) $N_{\text{nichtres.}}$, die Anzahl der nichtresonanten $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$-Ereignisse im Fitbereich.*

Nach der Verifizierung der Fitprozedur durch die Spielzeugstudie kann der Fit auf den Datensatz angewendet werden. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.5 gezeigt. Mit dem dort gezeigten Histogramm lässt sich ein χ^2-Wert berechnen. Er beträgt $\chi^2 = 78{,}5$ und die Anzahl der Freiheitsgrade ist 58. Dabei darf jedoch nicht vergessen werden, dass das Modell mittels der „unbinned“ Maximum-Likelihood-Methode an die Daten angepasst wurde und nicht die Größe χ^2 minimiert wurde. Die Anzahl der Signalereignisse ergibt sich zu:

$$N(\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau) = 591 \pm 55.$$

Die Anzahl nichtresonanter Ereignisse vom Typ $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ im Fitbereich ($0{,}995\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2} < m(K^+K^-) < 1{,}070\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$) beträgt $N(\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau) = 9051 \pm 109$. Die entsprechende Gesamtanzahl im selektierten $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$-Datensatz ist deutlich größer. Das an die Daten angepasste Modell sowie die entsprechenden Komponenten sind in Abbildung 4.5 gezeigt.

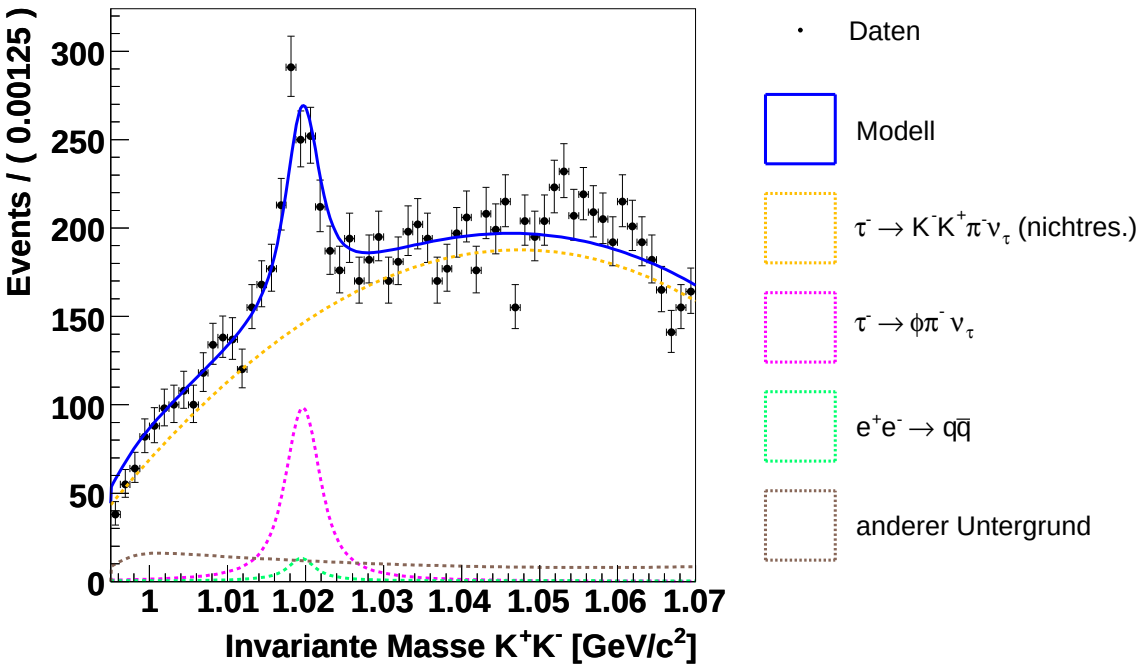


Abbildung 4.5: *Verteilung der invarianten Masse des K^+K^--Paars aus dem Zerfall $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ im Bereich der ϕ-Resonanz. Die durchgezogene Linie zeigt das an die Daten angepasste Modell. Die Summe der vier gestrichelt dargestellten Funktionen ergibt das Modell. Mit dem dargestellten Histogramm ist $\chi^2 = 78{,}5$ bei 58 Freiheitsgraden.*

4.2 Fit der ϕ-Resonanz in $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$

Im letzten Abschnitt wurde durch einen Fit der ϕ-Resonanz im Spektrum von $m(K^+K^-)$ die Anzahl der Ereignisse $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau$ bestimmt. Auf die gleiche Weise wird in diesem Abschnitt die Anzahl der Ereignisse vom Typ $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$ im Datensatz $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ ermittelt, dessen Selektion in Kapitel 3 beschrieben ist.

Im Fall von drei geladenen Kaonen ist die Wahl des K^+K^--Paars nicht eindeutig. Da keine der beiden Kombinationsmöglichkeiten ausgezeichnet ist, müssen im Spektrum von $m(K^+K^-)$, das in Abbilduung 4.6 zu sehen ist, immer beide Paare berücksichtigt werden. Im Fall von $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$ wird das K^+K^--Paar, welches nicht aus dem Zerfall der ϕ-Resonanz stammt, als kombinatorischer Untergrund bezeichnet.

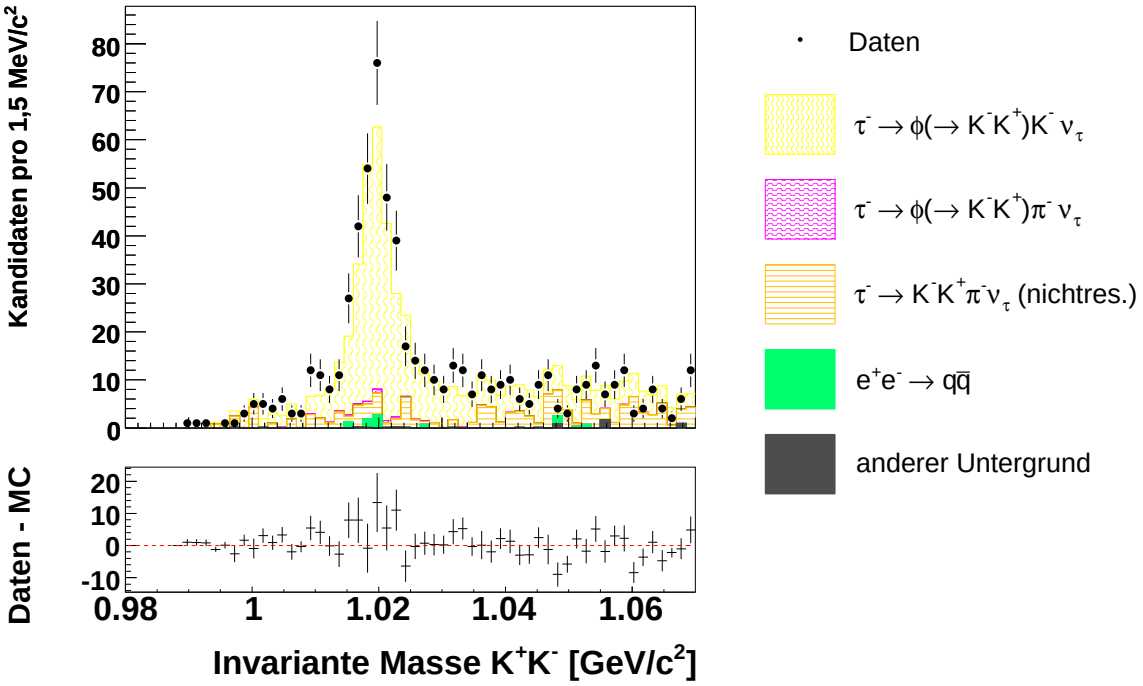


Abbildung 4.6: *Verteilung der invarianten Masse der K^+K^--Paare aus den selektierten Zerfällen der Art $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ im Bereich der ϕ-Resonanz. Für jedes Ereignis sind die beiden möglichen K^+K^--Paare berücksichtigt. Die Verteilung der simulierten Ereignisse vom Typ $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$ ist auf das Ergebnis der Messung des Verzweigungsverhältnisses $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ (inklusiv) skaliert, welches in Kapitel 5 aus den Anzahlen selektierter Ereignisse berechnet wird. Das Ergebnis des in diesem Abschnitt beschriebenen Fits ist also nicht berücksichtigt. Die Verteilung der simulierten Ereignisse $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau$ hingegen ist auf das Ergebnis des letzten Abschnitts skaliert, was in dem Fall die einzige Möglichkeit darstellt.*

Wie beim Fit der ϕ-Resonanz im Zerfall $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$ kann hier nur die Summe der Beiträge aus den Zerfällen $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau$ bestimmt werden. Die Vermischung der beiden Zerfälle wird in Kapitel 5 bestimmt.

Der nichtresonante Anteil der Zerfälle von τ-Leptonen in drei geladene Kaonen wird sich in diesem und im nächsten Abschnitt als mit Null verträglich herausstellen. Die entsprechende Verteilung simulierter Ereignisse ist deshalb nicht in Abbildung 4.6 berücksichtigt.

Neben den gezeigten simulierten Ereignissen des Zerfallskanals $\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$ existiert noch ein weiterer Datensatz für Zerfälle diesen Typs.[9] Er beruht auf einem anderen Modell und beschreibt den in den Daten beobachteten kombinatorischen Untergrund unzureichend. Im Gegensatz zum verwendeten simulierten Datensatz enthält er jedoch auch die Fälle, in denen die ϕ-Resonanz nicht in ein K^+K^--Paar zerfällt. Wie im Fall von $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$ sind diese Ereignisse im selektierten Datensatz vernachlässigbar. Im Folgenden wird dieser simulierte Datensatz deshalb nicht weiter betrachtet.

Die Verteilung der Ereignisse $e^+e^- \to q\bar{q}$ in Abbildung 4.6 zeigt, dass der Anteil dieser Untergrundereignisse zwar gering ist, allerdings im Bereich der ϕ-Resonanz liegt. Dieser resonante Beitrag wird deshalb im Modell, welches an die Daten angepasst wird, speziell berücksichtigt. Damit ergibt sich das folgende Modell:

Resonantes Signal $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$:
Die Verteilung der invarianten Masse der K^+K^--Paare aus der ϕ-Resonanz wird, wie in Abschnitt 4.1, durch eine Breit-Wigner-Funktion beschrieben, welche mit einer Gauß-Funktion gefaltet wird. Breite und Mittelwert der Breit-Wigner-Funktion werden wieder auf die entsprechenden Literaturwerte der ϕ-Resonanz gesetzt:

$$G_{\phi K}(x) = C_{\phi K} \times V(x;\, m_\phi, \Gamma_\phi, \sigma_3),$$

wobei $V(x;\, m_\phi, \Gamma_\phi, \sigma_3)$ die in Gleichung 4.1 definierte Voigt-Funktion ist. Mit $C_{\phi K}$ ist wieder die Normierungskonstante bezeichnet.

Kombinatorischer Untergrund $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$:
Der kombinatorische Untergrund wird durch ein Polynom vierten Grades modelliert. Um den Abfall nahe dem unteren kinematischen Limit zu berücksichtigen, geht die Funktion $H(x)$ aus Gleichung 4.2 mit ein:

$$G_{\text{komb.}}(x) = C_{\text{komb.}} \times H(x;\, p_1, p_2) \times (q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3 + q_4 x^4).$$

Nichtresonante $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$-Ereignisse:
Das Produkt aus einem Polynom dritten Grades und einem Term der Form (4.2) bilden das Modell für die Verteilung der nichtresonanten $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$-Zerfälle:

$$G_{\text{nichtres.}}(x) = C_{\text{nichtres.}} \times H(x;\, r_1, r_2) \times (s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + s_3 x^3).$$

Untergrund (Rest): Ereignisse nicht vom Typ $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$:
Ein Polynom ersten Grades, multipliziert mit einem Term der Form (4.2), beschreibt den nichtresonanten Teil des Untergrunds. Eine Breit-Wigner-Funktion berücksichtigt den resonanten Anteil:

$$G_{\text{Rest}}(x) = C_{\text{Rest}} \times \left\{ t_1 \times \frac{1}{(x - m_\phi)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_\phi^2} + (1 - t_1) \times H(x;\, u_1, u_2) \times (w_0 + w_1 x) \right\}.$$

[9] Die verwendeten Datensätze haben in der *BaBar*-Datenbank die Namen `SP6717` und `SP6721`. Bei den nicht verwendeten Datensäten handelt es sich um `SP7052` und `SP7053`.

Die Funktionen werden mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode an die entsprechenden Verteilungen simulierter Ereignisse angepasst. Das Ergebnis dieser Anpassung ist in Abbildung 4.7 gezeigt. Die Parameter der einzelnen Funktionen sind in Anhang C aufgelistet.

Das Gesamt-Modell, das an die Daten angepasst wird, ist eine Linearkombination der vier Funktionen, wobei die Linearkoeffizienten den jeweiligen Ereigniszahlen entsprechen.

$$\begin{aligned} G_{\text{Modell}}(m_{K^+K^-}) = N_{\phi K} &\times G_{\phi K}(m_{K^+K^-}) \\ +N_{komb.} &\times G_{komb.}(m_{K^+K^-}) \\ +N_{\text{nichtres.}} &\times G_{\text{nichtres.}}(m_{K^+K^-}) \\ +N_{\text{Rest}} &\times G_{\text{Rest}}(m_{K^+K^-}). \end{aligned}$$

Die Anzahl der Signalereignisse $N_{\phi K}$ wird durch einen Fit des Modells an die Daten mittels der erweiterten Maximum-Likelihood-Methode ermittelt. Die Normierung des Untergrunds (N_{Rest}) wird aus den simulierten Ereignissen ermittelt und ebenso wie sämtliche (Form-)Parameter konstant gehalten. Die freien Parameter beim Fit des Modells an die Daten sind also:

- $N_{\phi K}$, die Anzahl der K^+K^--Paare, die aus der ϕ-Resonanz im Zerfall $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$ stammen.
- $N_{komb.}$, die entsprechende Anzahl im kombinatorischen Untergrund im Fitbereich ($0{,}99\,\frac{\text{GeV}}{\text{c}^2} < m(K^+K^-) < 1{,}06\,\frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}$).
- $N_{\text{nichtres.}}$, die Anzahl der K^+K^--Paare aus nichtresonanten $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$-Zerfällen im Fitbereich.

Wie im letzten Abschnitt wird der Fit anhand einer Spielzeugstudie überprüft. Der nichtresonante Anteil wird dabei auf 5 % gesetzt. Wegen dieses recht kleinen Werts ist es nötig, dass im Fit auch negative Werte für diesen Anteil zugelassen werden. Andernfalls ist die Konvergenz unzureichend. Ein einzelner solcher Spielzeugdatensatz mit daran angepasstem Modell ist in Abbildung 4.8 zu sehen. Die Pull-Verteilungen der drei freien Parameter, die aus 1 000 generierten Spielzeugdatensätzen gewonnen wurden, sind in Abbildung 4.9 gezeigt. Sie werden alle gut durch eine Gaußverteilung mit Mittelwert Null und der Breite Eins beschrieben.

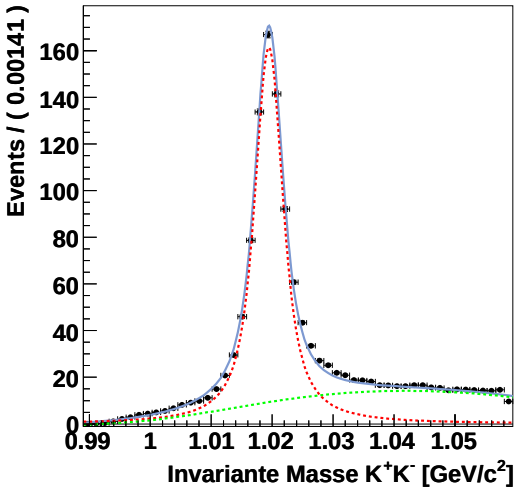
Die Anpassung des Modells an die Daten ergibt für die Anzahl der K^+K^--Paare aus der ϕ-Resonanz:

$$N(\phi \to K^+K^-) = N_{\phi K} = 307 \pm 22$$

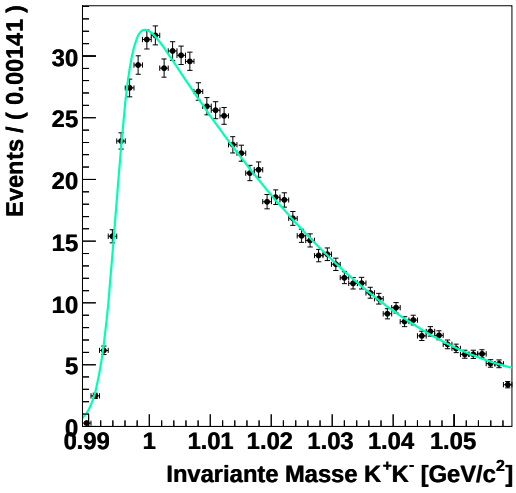
und

$$N(\text{nichtresonant}) = N_{\text{nichtres.}} = 9 \pm 15$$

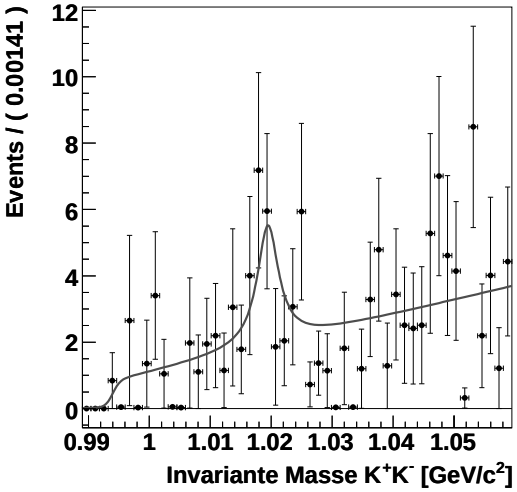
für die Anzahl der K^+K^--Paare aus nichtresonanten $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$-Zerfällen. Das an die Daten angepasste Modell und die einzelnen Komponenten sind in Abbildung 4.10 gezeigt. Mit dem dort dargestellten Histogramm ergibt sich $\chi^2 = 36{,}6$ bei 47 Freiheitsgraden. Unter der Annahme, dass die ϕ-Resonanz komplett im Fitbereich enthalten ist, entspricht $N(\phi \to K^+K^-)$ gerade der Anzahl der Signalereignisse $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$. Die Anzahl der K^+K^--Paare im kombinatorischen Untergrund des Fitbereichs beträgt $N(\text{komb. Untergr.}) = 133 \pm 21$.



(a) Simulation $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$

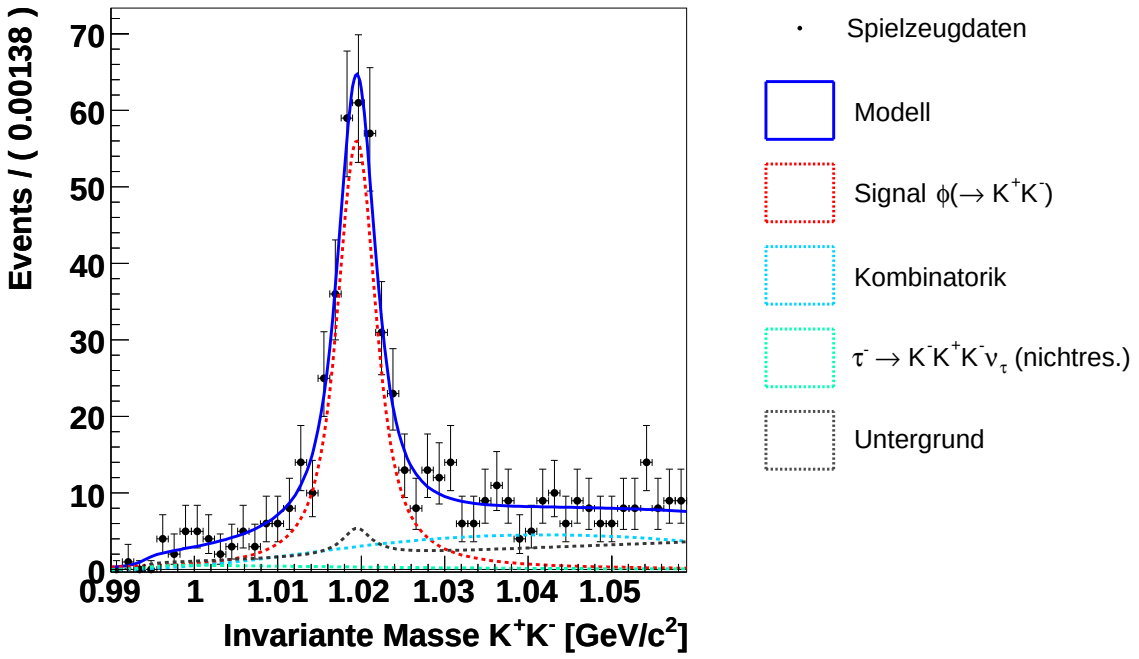


(b) Simulation: $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$, nichtres.



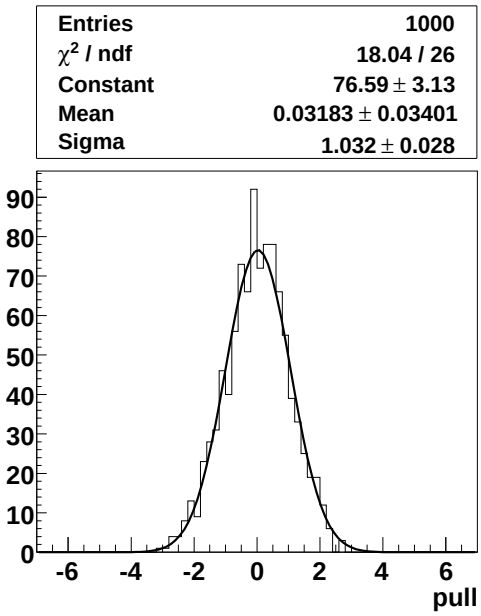
(c) Simulation: Untergrund

Abbildung 4.7: *Verteilungen der invarianten Masse $m(K^+K^-)$ von simulierten Ereignissen. Gezeigt sind die einzelnen Komponenten im Zerfallskanal $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$: (a) $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$, (b) $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ nichtresonant und (c) Untergrund. Im Unterschied zu weiter oben gezeigten Verteilungen werden durch die schwarzen Punkte simulierte Ereignisse gekennzeichnet (und nicht Daten). Auf die Ereignisse sind alle Skalierungen (Luminosität) und Korrekturen angewendet, weshalb die Fehlerbalken nicht dem Poisson-Fehler der aufgetragenen Anzahl entsprechen. Eine Unterscheidung zwischen dem K^+K^--Paar aus dem Zerfall der ϕ-Resonanz ($\phi \to K^+K^-$) und dem kombinatorischen Untergrund ist im verwendeten Datensatz simulierter Ereignisse nicht möglich. Die Komponenten müssen (so wie hier gezeigt) gleichzeitig an die simulierten Ereignisse angepasst werden.*

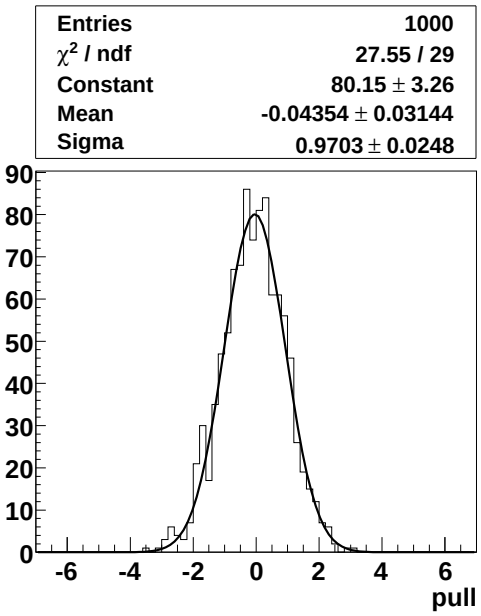


(a) $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$, Spielzeugdaten und angepasstes Modell

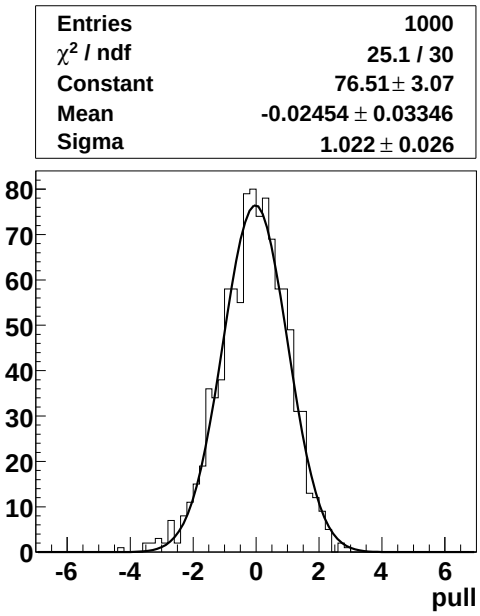
Abbildung 4.8: *Verteilung der invarianten Masse $m(K^+K^-)$ von Spielzeugdaten für den Zerfallskanal $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$ und das daran angepasste Modell.*



(a) Signal: $\phi \to K^+K^-$

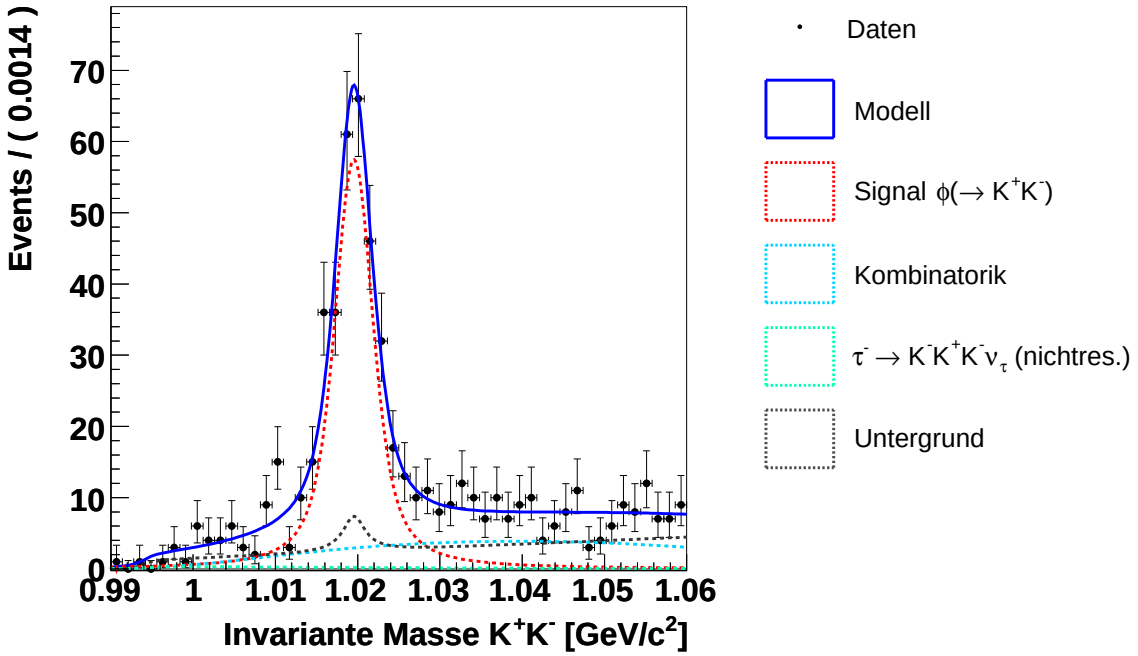


(b) Kombinatorischer Untergrund

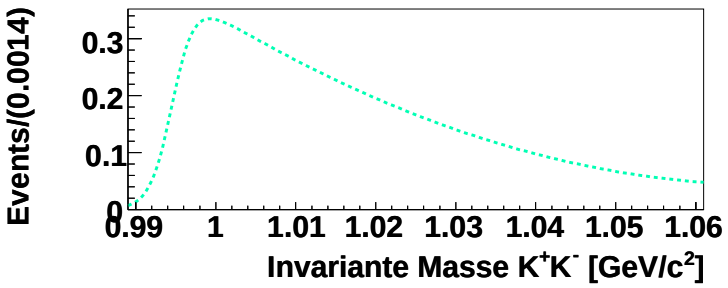


(c) $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$, nichtresonant

Abbildung 4.9: *Pull-Verteilungen für die Anzahl der K^+K^--Paare im Fitbereich aus (a) der ϕ-Resonanz in $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$, (b) dem kombinatorischen Untergrund und (c) den nichtresonanten $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$-Ereignissen.*



(a) $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$, Daten und angepasstes Modell



(b) $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$, nichtresonant

Abbildung 4.10: *(a) Verteilung der invarianten Masse der K^+K^--Paare aus dem Zerfall $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ im Bereich der ϕ-Resonanz. Die durchgezogene Linie zeigt das an die Daten angepasste Modell. Die Summe der vier gestrichelt dargestellten Funktionen ergibt das Modell. Mit dem gezeigten Histogramm ergibt sich $\chi^2 = 36{,}6$ bei 47 Freiheitsgraden. (b) Funktion zur Beschreibung der Verteilung der nichtresonanten Zerfälle $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$. Die Normierung entspricht der in (a) gezeigten Anpassung an die Daten.*

4.3 Nichtresonanter Anteil in $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$

Die Anzahl der K^+K^--Paare aus nichtresonanten τ-Zerfällen in drei geladene Kaonen wurde im letzten Abschnitt im Bereich $0{,}99\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2} < m(K^+K^-) < 1{,}06\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$ zu $N(\text{nichtresonant}) = 9 \pm 15$ bestimmt. Die entsprechende Verteilung der invarianten Masse $m(K^+K^-)$ fällt, wie es sich in Abbildung 4.10(b) andeutet, außerhalb des gezeigten Bereichs schnell ab. Das Ergebnis ist also damit verträglich, dass der Zerfall des τ-Leptons in drei geladene Kaonen komplett über die ϕ-Resonanz erfolgt.

Für jedes Ereignis mit drei geladenen Kaonen im Endzustand lassen sich zwei unterschiedliche invariante Massen $m(K^+K^-)$ bilden. Ein eindimensionaler Fit, wie er in Abschnitt 4.2 durchgeführt wurde, berücksichtigt nicht den vollen Informationsgehalt, der daraus entspringt. In diesem Abschnitt wird ein zweidimensionaler Fit beschrieben, welcher diesen besser berücksichtigt. Der Anteil des nichtresonanten Untergrunds wird dabei noch einmal separat bestimmt.

Die Ereignisse werden in der Ebene betrachtet, welche von den beiden invarianten Massen $m_1(K^+K^-)$ und $m_2(K^+K^-)$ aufgespannt wird. Eine eindeutige Zuordnung wird erreicht, indem von den gleich geladenen Kaonen immer das mit dem geringeren Impuls für $m_1(K^+K^-)$ verwendet wird. Für die selektierten Ereignisse vom Typ $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ sind die entsprechenden Histogramme für simulierte Ereignisse und Daten in Abbildung 4.11 gezeigt. Im Fall der resonanten Ereignisse $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$ ist eine deutliche Bandstruktur zu erkennen. Diese wird durch das K^+K^--Paar aus dem Zerfall des ϕ-Mesons hervorgerufen, welches entweder als $m_1(K^+K^-)$ oder als $m_2(K^+K^-)$ im Bereich der ϕ-Masse eingeht. Die beiden anderen Verteilungen simulierter Ereignisse unterscheiden sich davon deutlich.

Zur Bestimmung des nichtresonanten Anteils wird die Ebene in fünf Bereiche unterteilt, welche in Abbildung 4.11 durch rote Linien markiert sind. Die fünf Bereiche werden als Bins von Histogrammen interpretiert. Die Inhalte der einzelnen Bins entsprechen dabei den Ereigniszahlen der zugehörigen Bereiche.

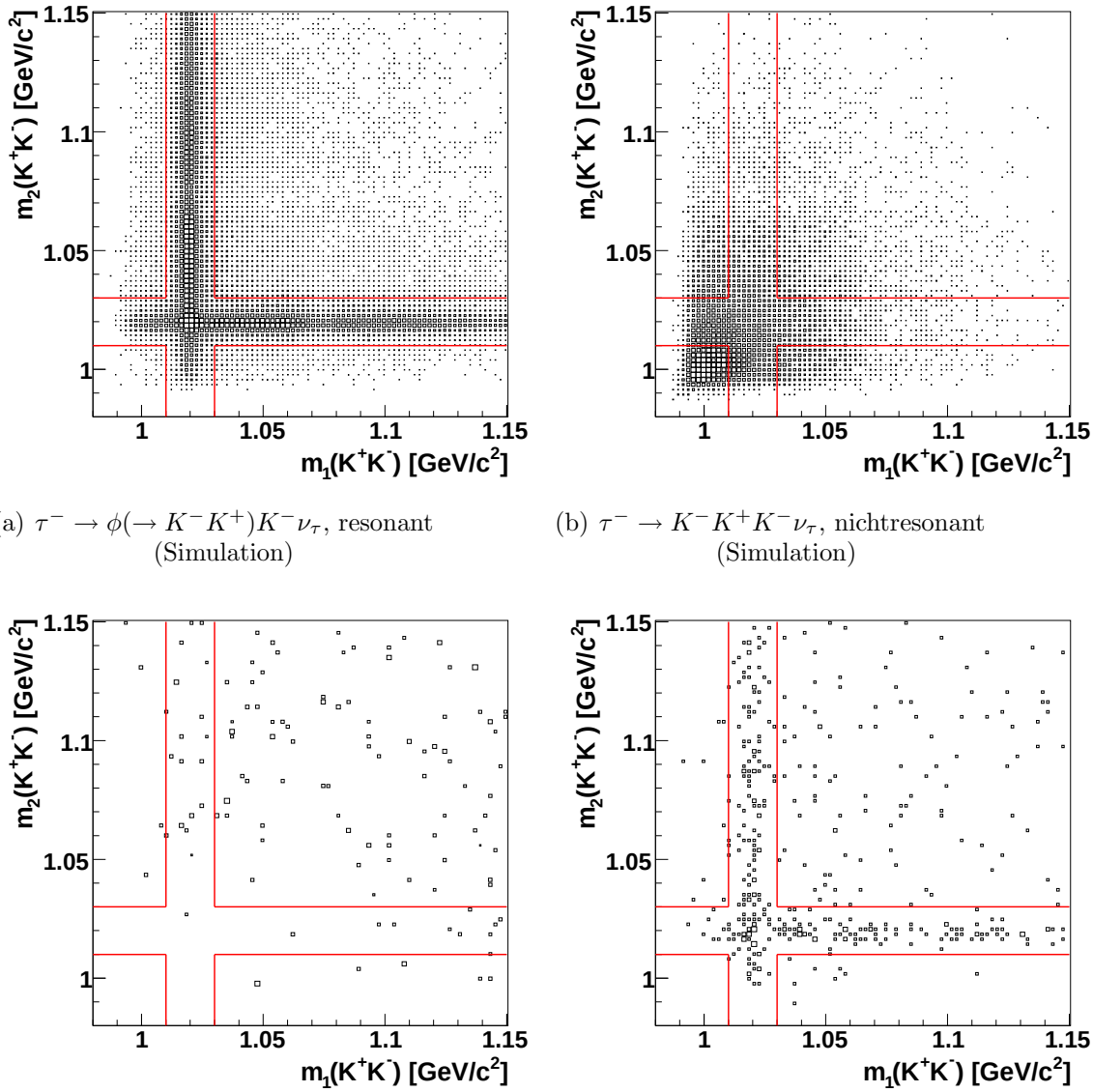
Die Histogramme der $M = 3$ simulierten Ereigniskategorien[10] werden linear addiert und an das Daten-Histogramm angepasst. Sei d_i die Anzahl der Datenereignisse im i-ten Bin und a_{ij} die entsprechende Anzahl der simulierten Ereignisse vom Typ j. Dann ist

$$f_i = \sum_{j=1}^{M} p_j a_{ij} \tag{4.4}$$

die erwartete Anzahl von Ereignissen im i-ten Bin. Die p_i geben dabei die Stärken der jeweiligen Beiträge an und sollen so optimiert werden, dass die Daten d_i in jedem Bin möglichst gut durch die f_i beschrieben werden. Zur Anpassung wird eine Maximum-Likelihood-Methode verwendet, welche die statistischen Fluktuationen der simulierten Ereigniszahlen berücksichtigt.

Im Unterschied zu der in Abschnitt 4.1 beschriebenen „unbinned“ Maximum-Likelihood-Methode wird die „binned“ Maximum-Likelihood-Methode verwendet. Während

[10] 1. Resonante Ereignisse vom Typ $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$, 2. nichtresonante Ereignisse vom Typ $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ und 3. Untergrund im selektierten Datensatz $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$.



(a) $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$, resonant (Simulation)

(b) $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$, nichtresonant (Simulation)

(c) Untergrund (Simulation)

(d) Daten

Abbildung 4.11: *Zweidimensionale Verteilungen der selektierten Ereignisse vom Typ $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$. Die eingezeichneten Linien zeigen die Einteilung der Ereignisse in fünf Bins an.*

bei der ersten die kombinierte Wahrscheinlichkeit aller Ereignisse berechnet wird, bildet man bei letzterer das Produkt der Wahrscheinlichkeiten aller Bins eines Histogramms.

Die Poisson-Wahrscheinlichkeit, bei einer erwarteten Ereigniszahl von f_i gerade die beobachteten d_i zu erhalten, ist:

$$e^{-f_i}\frac{f_i^{d_i}}{d_i!}.$$

Für den Fall von N Bins ist die Likelihood folglich:

$$L = \prod_{i=1}^{N} e^{-f_i} \frac{f_i^{d_i}}{d_i!}. \tag{4.5}$$

Im untersuchten Fall ist $N = 5$. Beim (binned) Maximum-Likelihood-Verfahren werden die p_i durch Maximierung dieser Größe bestimmt. Dabei wird jedoch nicht berücksichtigt, dass die Anzahl der simulierten Ereignisse beschränkt ist und somit selbst statistischen Schwankungen unterliegt. Diese sind besonders dann von Bedeutung, wenn die Anzahlen von Datenereignissen und simulierten Ereignissen von der gleichen Größenordnung sind.

Bei einer in [44] ausführlich beschriebenen Methode wird die Likelihood-Funktion in Gleichung 4.5 um einen Term erweitert, der dem Rechnung trägt. Sei A_{ij} die (wahre) Anzahl an erwarteten Ereignissen vom Typ j im Bin i. Der Erwartungswert des entsprechenden Bins ist dann nicht gegeben durch Gleichung 4.4, sondern:

$$f_i = \sum_{j=1}^{M} p_j A_{ij}.$$

Die Poisson-Wahrscheinlichkeit, bei gegebenem A_{ij} gerade a_{ij} zu generieren, ist:

$$e^{-A_{ij}} \frac{A_{ij}^{a_{ij}}}{a_{ij}!}.$$

Für die kombinierte Wahrscheinlichkeit ist das Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten der N Bins und der M Typen simulierter Ereignisse zu bilden. Die Likelihood-Funktion, welche statistische Schwankungen sowohl der Daten als auch der Anzahlen simulierter Ereignisse berücksichtigt, ist dann gegeben durch:

$$L = \left(\prod_{i=1}^{N} e^{-f_i} \frac{f_i^{d_i}}{d_i!} \right) \times \left(\prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{M} e^{-A_{ij}} \frac{A_{ij}^{a_{ij}}}{a_{ij}!} \right).$$

Durch Maximierung dieser Likelihood erhält man Abschätzungen für die p_j (und A_{ij}, welche allerdings nicht weiter interessant sind).

Diese Methode wird benutzt, um die Histogramme der simulierten Ereignisse, welche aus der in Abbildung 4.11 gezeigten Einteilung gewonnen werden, an das entsprechende Histogramm der Daten anzupassen.[11] Der Fit ergibt, dass der Zerfall $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ zu einem Anteil von

$$\mathcal{A}(\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau, \text{nichtresonant}) = (0{,}0 \pm 1{,}7)\,\%$$

nichtresonant erfolgt. Das Ergebnis ist konsistent mit dem aus Abschnitt 4.2, zugleich aber auch präziser als dieses.

[11] Die beschriebene Methode ist in ROOT [41] in der Klasse `TFractionFitter` implementiert.

Um eine obere Grenze für den nichtresonanten Anteil anzugeben, wird nach [43] eine Gaußfunktion betrachtet, deren Mittelwert x_0 und Breite σ dem Ergebnis des Fits entsprechen. Der nichtresonante Anteil kann nicht negativ sein. Der 90 %-Vertrauensbereich $[0; a]$ entspricht demnach dem Bereich, der 90 % der Fläche der Gaußfunktion im positiven x-Bereich enthält:

$$\frac{\int_0^a e^{\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}\,dx}{\int_0^1 e^{\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}\,dx} \stackrel{!}{=} 0{,}9.$$

Im gegebenen Fall ist $x_0 = 0$, so dass die Gleichung für $a = 1{,}645\,\sigma$ erfüllt ist. Der nichtresonante Anteil des Zerfalls $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ ist somit

$$\mathcal{A}(\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau, \text{nichtresonant}) < 2{,}80\,\%$$

innerhalb eines 90 %-Vertrauensbereichs.

Kapitel 5

Bestimmung der Verzweigungsverhältnisse

In Kapitel 3 wurde beschrieben, wie aus dem *BaBar*-Datensatz Ereignisse selektiert werden, bei denen τ-Leptonen in drei geladene Hadronen zerfallen. Im Einzelnen sind dies die Zerfälle

$$\begin{aligned}
\tau^- &\to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau, \\
\tau^- &\to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau, \\
\tau^- &\to K^-K^+\pi^-\nu_\tau, \\
\tau^- &\to K^-K^+K^-\nu_\tau.
\end{aligned}$$

Zusätzlich zu dieser Selektion wurden, wie in Kapitel 4 beschrieben, in den Zerfällen $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ die Anzahlen der darin enthaltenen Zerfälle

$$\begin{aligned}
\tau^- &\to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau, \\
\tau^- &\to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau
\end{aligned}$$

bestimmt.

In diesem Kapitel werden für die genannten sechs Zerfallskanäle die Verzweigungsverhältnisse berechnet. Dazu wird die Methode der Migrationsmatrix eingeführt (Abschnitt 5.2), welche die gleichzeitige Bestimmung von Verzweigungsverhältnissen erlaubt. Die Bestimmung erfolgt jeweils für die ersten vier und die letzten zwei genannten Zerfallskanäle gleichzeitig. Anschließend werden statistische Fehler und deren Korrelationen berechnet (Abschnitt 5.4) sowie Studien zu systematischen Effekten beschrieben (Abschnitt 5.5).

5.1 Berechnung von Verzweigungsverhältnissen

Das Verzweigungsverhältnis eines Zerfalls $\tau \to$ Signal ist definiert als

$$\mathcal{B}(\tau \to \text{Signal}) \equiv \frac{N(\tau \to \text{Signal})}{N(\tau \to \text{beliebig})} = \frac{N(\tau \to \text{Signal})}{N(\tau)}, \tag{5.1}$$

wobei $N(\tau)$ die Gesamtzahl der τ-Leptonen und $N(\tau \to \text{Signal})$ die Anzahl der τ-Leptonen ist, die in das Signal zerfallen.

Die in dieser Analyse untersuchten τ-Leptonen stammen aus $\tau^+\tau^-$-Paaren, die über die Reaktion $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$ erzeugt wurden. Bei der Ereignisselektion, wie sie in Kapitel 3 beschrieben ist, werden (spezielle) $\tau^+\tau^-$-Ereignisse und nicht einzelne τ-Zerfälle selektiert. Pro Ereignis wird also höchstens ein Signalzerfall rekonstruiert/gezählt, auch wenn prinzipiell zwei möglich sind. Diese Einschränkung lässt unterschiedliche Definitionen des Begriffs „Signalereignis“ zu: Ein Ereignis ist ein Signalereignis, wenn

1. ein τ-Lepton im Signalkanal und das andere leptonisch zerfällt,
2. mindestens ein τ-Lepton im Signalkanal zerfällt. Der andere Zerfall ist beliebig, es kann sich also ebenfalls um einen Signalzerfall handeln.

Die genannten Definitionen von Signalereignissen zielen auf die „wahre Natur“ des Ereignisses ab. Sie sind unabhängig von jeglichen Selektionskriterien. Die Forderung eines Tag-Leptons in der Ereignisselektion hat mit dieser Einteilung nichts zu tun. Sie bewirkt, dass der selektierte Datensatz möglichst rein an $\tau^+\tau^-$-Ereignissen ist. Genau wie kinematische Schnitte schlägt sich die Forderung eines Tag-Leptons lediglich in der Effizienz nieder, auf die weiter unten eingegangen wird.

Wird ein Signalereignis wie in Punkt 1 definiert, so ergibt sich das Verzweigungsverhältnis des Signalkanals aus

$$\mathcal{B}(\tau \to \text{Signal}) = \frac{N(\tau_1 \to \text{Signal}, \tau_2 \to l\nu\bar{\nu})}{2 \cdot \mathcal{B}(\tau \to l\nu\bar{\nu}) \cdot N(\tau^+\tau^-)}. \tag{5.2}$$

Dabei bezeichnet $N(\tau_1 \to \text{Signal}, \tau_2 \to l\nu\bar{\nu})$ die Anzahl der bei *BaBar* erzeugten Ereignisse gemäß Punkt 1. $\mathcal{B}(\tau \to l\nu\bar{\nu})$ steht für das Verzweigungsverhältnis von τ-Zerfällen in Leptonen und $N(\tau^+\tau^-)$ für die Anzahl der erzeugten $\tau^+\tau^-$-Paare. Diese Methode hat zwei Nachteile. Zum einen geht das Verzweigungsverhältnis $\mathcal{B}(\tau \to l\nu\bar{\nu})$ ein, welches nur mit endlicher Genauigkeit bekannt ist. Zum anderen sind Ereignisse, bei denen beide τ-Leptonen im Signalkanal zerfallen, per Definition Untergrundereignisse. Zur Bestimmung von $N(\tau_1 \to \text{Signal}, \tau_2 \to l\nu\bar{\nu})$ muss ihre Anzahl, wie auch die des restlichen Untergrunds, von der Anzahl selektierter Ereignisse abgezogen werden (siehe weiter unten). Die zu subtrahierende Anzahl hängt aber vom zu bestimmenden Verzweigungsverhältnis $\mathcal{B}(\tau \to \text{Signal})$ des Signalkanals ab.[1]

Bei der Berechnung des Verzweigungsverhältnisses nach 2. treten die genannten Probleme nicht auf. Allerdings ist der Zusammenhang zwischen Ereignisanzahl und Verzweigungsverhältnis nichtlinear. Sei $N(\tau_1 \to \text{Signal}, \tau_2 \to \text{beliebig})$ die Anzahl der bei *BaBar* erzeugten Ereignisse gemäß Punkt 2 und $\mathcal{B}_{\text{Sig.}} \equiv \mathcal{B}(\tau \to \text{Signal})$ das Verzweigungsverhältnis des Signalkanals. Dann gilt

$$\begin{aligned} & N(\tau_1 \to \text{Signal}, \tau_2 \to \text{beliebig}) \\ &= \left\{ \underbrace{\mathcal{B}_{\text{Sig.}}}_{\tau^- \to \text{Sig.}} \cdot \underbrace{(1 - \mathcal{B}_{\text{Sig.}})}_{\tau^+ \not\to \text{Sig.}} + \underbrace{(1 - \mathcal{B}_{\text{Sig.}})}_{\tau^- \not\to \text{Sig.}} \cdot \underbrace{\mathcal{B}_{\text{Sig.}}}_{\tau^+ \to \text{Sig.}} + \underbrace{\mathcal{B}_{\text{Sig.}}}_{\tau^- \to \text{Sig.}} \cdot \underbrace{\mathcal{B}_{\text{Sig.}}}_{\tau^+ \to \text{Sig.}} \right\} \times N(\tau^+\tau^-) \\ &= \{2\mathcal{B}_{\text{Sig.}} - \mathcal{B}_{\text{Sig.}}\mathcal{B}_{\text{Sig.}}\} \times N(\tau^+\tau^-), \end{aligned} \tag{5.3}$$

[1] In der betrachteten Topologie (Kap. 3) mit einem geladenen Teilchen in der einen und drei geladenen Teilchen in der anderen Hemisphäre ist diese Anzahl klein. Bei Signalzerfällen mit einem geladenen Teilchen im Endzustand kann das anders sein.

und das gesuchte Verzweigungsverhältnis ergibt sich damit zu

$$\mathcal{B}(\tau \to \text{Signal}) = 1 - \sqrt{1 - \frac{N(\tau_1 \to \text{Signal}, \tau_2 \to \text{beliebig})}{N(\tau^+\tau^-)}}. \tag{5.4}$$

Die zweite Lösung der quadratischen Gleichung (5.3) kann als unphysikalisch verworfen werden. Für den Fall $N(\tau_1 \to \text{Signal}, \tau_2 \to \text{beliebig}) \ll N(\tau^+\tau^-)$ gilt:

$$\mathcal{B}(\tau \to \text{Signal}) \approx \frac{N(\tau_1 \to \text{Signal}, \tau_2 \to \text{beliebig})}{2 \cdot N(\tau^+\tau^-)}.$$

Im Gegensatz zu (5.2) ist (5.4) unabhängig von $\mathcal{B}(\tau \to l\nu\bar{\nu})$. Im Folgenden wird deshalb ausschließlich die Methode nach 2. verwendet.

Die Anzahl der bei *BaBar* erzeugten $\tau^+\tau^-$-Paare $N(\tau^+\tau^-)$ ergibt sich aus der integrierten Luminosität $\mathcal{L}$ und dem Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\tau^+\tau^-}$ der Reaktion $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$ bei der Schwerpunktsenergie $E_{\text{CMS}}(e^+e^-) = 10{,}58\,\text{GeV}$ der e^+e^--Kollisionen:

$$N(\tau^+\tau^-) = \mathcal{L} \cdot \sigma_{\tau^+\tau^-}.$$

Um aus den selektierten Ereignissen die Zahl $N(\tau_1 \to \text{Signal}, \tau_2 \to \text{beliebig})$ zu erhalten, sind zwei Schritte nötig. Der Datensatz selektierter Ereignisse ist nicht frei von Untergrundereignissen. Ihre Anzahl wird durch die simulierten Ereignisse abgeschätzt und subtrahiert. Außerdem muss berücksichtigt werden, dass nur ein Teil der Signalereignisse die Ereignisselektion passiert hat. Der Bruchteil selektierter Signalereignisse wird als Signaleffizienz $\varepsilon_{\text{Signal}}$ bezeichnet. Sie wird für Daten durch die entsprechende Effizienz simulierter Ereignisse abgeschätzt:

$$\varepsilon_{\text{Signal}} \equiv \varepsilon_{\text{Signal}}^{\text{Daten}} \approx \varepsilon_{\text{Signal}}^{\text{Simulation}} \equiv \frac{N_{\text{Signal}}^{\text{Simulation, selektiert}}}{N_{\text{Signal}}^{\text{Simulation, generiert}}}. \tag{5.5}$$

Dabei ist $N_{\text{Signal}}^{\text{Simulation, selektiert}}$ die Anzahl simulierter Signalereignisse (nach der Definition in Punkt 2) im selektierten Datensatz. Für jedes selektierte Ereignis werden dabei die in Abschnitt 2.3.3 beschriebenen Effizienzkorrekturen für Spurrekonstruktion und Teilchenidentifikation angewendet. $N_{\text{Signal}}^{\text{Simulation, generiert}}$ bezeichnet die Anzahl (ebenfalls gemäß 2.), bevor eine Simulation und Rekonstruktion im Detektor stattgefunden hat und bevor irgendwelche Selektionskriterien angewendet wurden. Für Daten entspricht dies der (unbekannten) Anzahl von Signalereignissen, die durch e^+e^--Kollisionen bei *BaBar* erzeugt wurden. Mit diesen Näherungen bezüglich verbliebenem Untergrund und Signaleffizienz ergibt sich:

$$\begin{aligned} &N(\tau_1 \to \text{Signal}, \tau_2 \to \text{beliebig}) \\ &= \frac{N_{\text{Signal}}^{\text{Daten, selektiert}}}{\varepsilon_{\text{Signal}}} \\ &\approx \frac{N^{\text{Daten, selektiert}} - \sum_i g_i \cdot N_{\text{Untergrund}(i)}^{\text{Simlation, selektiert}}}{\varepsilon_{\text{Signal}}^{\text{Simulation}}}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Summiert werden die in der Simulation berücksichtigten Untergründe. Die in Abschnitt 2.3.3 beschriebenen Effizienzkorrekturen sind in den $N^{\text{Simulation, selektiert}}_{\text{Untergrund}(i)}$ bereits enthalten. Die g_i sind Gewichte, um die Anzahlen simulierter Ereignisse auf die aufgezeichnete Luminosität zu skalieren:

$$g_i = \frac{\mathcal{L} \cdot \sigma_i}{N^{\text{Simulation, generiert}}_{\text{Untergrund}(i)}}. \tag{5.7}$$

Dabei bezeichnet σ_i den jeweiligen Wirkungsquerschnitt für die Reaktion $e^+e^- \to$ Untergrund(i). Mit den beschriebenen Größen kann das Verzweigungsverhältnis nach Gleichung 5.4 berechnet werden.

5.2 Bestimmung der Migrationsmatrix

In dieser Arbeit werden die Verzweigungsverhältnisse mehrer Zerfallskanäle bestimmt. Da die untersuchten τ-Zerfälle sehr ähnlich sind, treten sie auch wechselseitig als Untergrund auf. Besonders deutlich wird das im Fall des Kanals $\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ in Abbildung 3.10(b). Etwa die Hälfte der gezeigten Ereignisse sind aufgrund falsch identifizierter geladener Teilchen nicht vom Typ $\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$, sondern der Art $\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ oder $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$.

Nach Gleichung 5.6 wird der verbliebene Untergrund von der Anzahl der selektierten Datenereignisse subtrahiert. Für einen τ-Untergrund i mit dem Verzweigungsverhältnis $\mathcal{B}_i$ folgt mit (5.3) für den Wirkungsquerschnitt σ_i in (5.7):

$$\sigma_i = (2\mathcal{B}_i - \mathcal{B}_i\mathcal{B}_i) \cdot \sigma_{\tau^+\tau^-}.$$

Es hängt also das Gewicht g_i und somit auch das zu bestimmende Verzweigungsverhältnis vom Verzweigungsverhältnis des Kanals i ab. Ist der Zerfallskanal i nicht nur Untergrund, sondern auch einer der zu messenden Kanäle, so ergibt sich ein System gekoppelter Gleichungen. Die Lösung dieses Gleichungssystems kann beispielsweise iterativ erfolgen.

Hier wird ein anderer Ansatz verfolgt. Sei N_j^{erzeugt} die Anzahl der bei *BaBar* in e^+e^--Kollisionen erzeugten Signalereignisse vom („wahren“) Typ j und

$$\mathbf{N}^{\text{erzeugt}} = (N_1^{\text{erzeugt}}, \ldots, N_n^{\text{erzeugt}})$$

der entsprechende Vektor der n gleichzeitig zu messenden Zerfallskanäle. Die Anzahl der tatsächlich selektierten Ereignisse vom (rekonstruierten) Typ i wird mit $N_i^{\text{selektiert}}$ bezeichnet. Die entsprechende Anzahl Untergrundkorrigierter Ereignisse sei $\tilde{N}_i^{\text{selektiert}}$:

$$\tilde{N}_i^{\text{selektiert}} = N_i^{\text{selektiert}} - N_i^{\text{restlicher Untergrund}}. \tag{5.8}$$

Dabei beinhaltet $N_i^{\text{restlicher Untergrund}}$ nicht die (migrierten) Ereignisse der n zu bestimmenden Zerfallskanäle. Der zugehörige Vektor wird $\tilde{\mathbf{N}}^{\text{selektiert}}$ genannt. Wird mit M_{ij} die Wahrscheinlichkeit bezeichnet (erzeugte) Ereignisse vom Typ j als Ereignisse vom Typ i zu selektieren, so ist der Zusammenhang zwischen erzeugten und selektierten Größen gegeben durch:

$$\tilde{N}_i^{\text{selektiert}} = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} N_j^{\text{erzeugt}}. \tag{5.9}$$

Beispielsweise gilt für die Anzahl der selektierten Ereignisse vom Typ $\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$:

$$\begin{aligned}\tilde{N}^{\text{selektiert}}_{\pi\pi\pi} &= M_{\pi\pi\pi,\,\pi\pi\pi}\, N^{\text{erzeugt}}_{\pi\pi\pi} \\ &+ M_{\pi\pi\pi,\,K\pi\pi}\, N^{\text{erzeugt}}_{K\pi\pi} \\ &+ M_{\pi\pi\pi,\,KK\pi}\, N^{\text{erzeugt}}_{KK\pi} \\ &+ M_{\pi\pi\pi,\,KKK}\, N^{\text{erzeugt}}_{KKK}\,,\end{aligned}$$

wobei für die Indizes intuitive Abkürzungen der Zerfallskanäle benutzt wurden. Das lineare Gleichungssystem 5.9 lässt sich schreiben als

$$\tilde{\mathbf{N}}^{\text{selektiert}} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{N}^{\text{erzeugt}}. \tag{5.10}$$

Die Matrix $\mathbf{M}$ wird als Migrationsmatrix bezeichnet. Ihre Elemente sind die M_{ij} aus Gleichung 5.9. Für einen Kanal i entspricht das Diagonalenelement M_{ii} der Signaleffizienz aus Gleichung 5.5: $M_{ii} \equiv \varepsilon^{(i)}_{\text{Signal}}$. Die Matrixelemente werden analog zu den Signaleffizienzen aus den Anzahlen simulierter Ereignisse bestimmt:

$$M_{ij} \equiv \frac{N^{\text{Daten, selektiert}}_{ij}}{N^{\text{Daten, erzeugt}}_{j}} \approx \frac{N^{\text{Simulation, selektiert}}_{ij}}{N^{\text{Simulation, generiert}}_{j}}.$$

Dabei bezeichtet $N^{\text{selektiert}}_{ij}$ jeweils die Anzahl der Ereignisse vom (erzeugten/generierten) Typ j, die als Ereignisse vom Typ i rekonstruiert wurden. Mit Hilfe der inversen Migrationsmatrix können somit aus den selektierten Ereigniszahlen der n gleichzeitig zu messenden Zerfallskanäle die ursprünglich erzeugten bestimmt werden:

$$\mathbf{N}^{\text{erzeugt}} = \mathbf{M}^{-\mathbf{1}} \cdot \tilde{\mathbf{N}}^{\text{selektiert}}.$$

Die Verzweigungsverhältnisse ergeben sich dann nach (5.4):

$$\mathcal{B}(i) = 1 - \sqrt{1 - \frac{N^{\text{erzeugt}}_{i}}{N_{\tau^+\tau^-}}}. \tag{5.11}$$

5.3 Die Verzweigungsverhältnisse

In dieser Arbeit wird die Methode der Migrationsmatrix auf zwei Sätze von Zerfällen angewendet. Zum einen sind dies die $n = 4$ Zerfallskanäle der Art $\tau^- \to h^-h^+h^-\nu_\tau$ und zum anderen die $n = 2$ Zerfallskanäle $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)h^-\nu_\tau$, in denen die ϕ-Resonanz vorkommt und in zwei geladene Kaonen zerfällt.

Ereignisse, bei denen die beiden τ-Leptonen eines Ereignisses in verschiedenen Signalkanälen zerfallen (z.B. $\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^+ \to K^+\pi^-\pi^+\bar{\nu}_\tau$), werden wie folgt gezählt: Bei den Anzahlen erzeugter Ereignisse N^{erzeugt}_j wird ein solches Ereignis für beide möglichen Indizes j jeweils einmal gezählt. Im Fall der selektierten Ereignisse hingegen wird es nur einmal im jeweiligen Signalkanal berücksichtigt, welcher in der Hadronhemisphäre rekonstruiert wurde. Für die selektierten Ereignisse sind diese Fälle allerdings stark unterdrückt. Ihr relativer Anteil beträgt $< 2 \times 10^{-5}$ und somit ist der entsprechende Fehler vernachlässigbar.

5.3.1 Verzweigungsverhältnisse von $\tau^- \to h^- h^+ h^- \nu_\tau$

Für die Zerfälle $\tau^- \to h^- h^+ h^- \nu_\tau$ lautet Gleichung 5.10:

$$\begin{pmatrix} \tilde{N}^{\text{selektiert}}_{\pi\pi\pi} \\ \tilde{N}^{\text{selektiert}}_{K\pi\pi} \\ \tilde{N}^{\text{selektiert}}_{KK\pi} \\ \tilde{N}^{\text{selektiert}}_{KKK} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{\pi\pi\pi,\,\pi\pi\pi} & M_{\pi\pi\pi,\,K\pi\pi} & M_{\pi\pi\pi,\,KK\pi} & M_{\pi\pi\pi,\,KKK} \\ M_{K\pi\pi,\,\pi\pi\pi} & M_{K\pi\pi,\,K\pi\pi} & M_{K\pi\pi,\,KK\pi} & M_{K\pi\pi,\,KKK} \\ M_{KK\pi,\,\pi\pi\pi} & M_{KK\pi,\,K\pi\pi} & M_{KK\pi,\,KK\pi} & M_{KK\pi,\,KKK} \\ M_{KKK,\,\pi\pi\pi} & M_{KKK,\,K\pi\pi} & M_{KKK,\,KK\pi} & M_{KKK,\,KKK} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N^{\text{erzeugt}}_{\pi\pi\pi} \\ N^{\text{erzeugt}}_{K\pi\pi} \\ N^{\text{erzeugt}}_{KK\pi} \\ N^{\text{erzeugt}}_{KKK} \end{pmatrix}.$$

Die Ereignisselektion, wie sie in Kapitel 3 beschrieben ist, liefert die entsprechenden Zahlenwerte. Die Migrationsmatrix ist (gerundet):

$$\mathbf{M}^{\mathbf{h^- h^+ h^-}} = \begin{pmatrix} 5{,}70 \cdot 10^{-2} & 1{,}39 \cdot 10^{-2} & 2{,}76 \cdot 10^{-3} & 5{,}10 \cdot 10^{-4} \\ 1{,}34 \cdot 10^{-3} & 4{,}42 \cdot 10^{-2} & 1{,}96 \cdot 10^{-2} & 5{,}04 \cdot 10^{-3} \\ 8{,}80 \cdot 10^{-6} & 2{,}83 \cdot 10^{-4} & 3{,}55 \cdot 10^{-2} & 1{,}33 \cdot 10^{-2} \\ 0 & 1{,}88 \cdot 10^{-6} & 2{,}11 \cdot 10^{-4} & 2{,}66 \cdot 10^{-2} \end{pmatrix}.$$

Wie bereits erwähnt sind die Diagonalenelemente die Signal-Effizienzen. Sie liegen zwischen $\varepsilon_{\text{Signal}}(\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau) = 5{,}70\,\%$ und $\varepsilon_{\text{Signal}}(\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau) = 2{,}66\,\%$. Der Abfall mit der Anzahl der selektierten Kaonen ist auf die strengen Bedingungen bei der Rekonstruktion der Kaonen und die in Abschnitt 3.3 beschriebene Unterscheidung der Zerfallskanäle zurückzuführen. Die zugehörigen *relativen* statistischen Fehler, welche aus der Endlichkeit der zur Verfügung stehenden Datensätze simulierter Ereignisse resultieren (vergleiche Abschnitt 5.5.6), sind:

$$\mathbf{M}^{\mathbf{h^- h^+ h^-}}_{\text{rel. Fehler}} = \begin{pmatrix} 5{,}39 \cdot 10^{-4} & 6{,}02 \cdot 10^{-3} & 1{,}87 \cdot 10^{-2} & 2{,}64 \cdot 10^{-2} \\ 3{,}62 \cdot 10^{-3} & 3{,}32 \cdot 10^{-3} & 6{,}94 \cdot 10^{-3} & 8{,}39 \cdot 10^{-3} \\ 4{,}46 \cdot 10^{-2} & 4{,}24 \cdot 10^{-2} & 5{,}13 \cdot 10^{-3} & 5{,}14 \cdot 10^{-3} \\ - & 5{,}31 \cdot 10^{-1} & 6{,}75 \cdot 10^{-2} & 3{,}61 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix},$$

wobei „–“ bedeutet, dass kein Fehler bestimmt werden konnte, da keine simulierten Ereignisse vom Typ $\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ als Ereignisse vom Typ $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ selektiert wurden. Auf die Unsicherheiten der Elemente der Migrationsmatrix wird in Abschnitt 5.5.6 bei der Behandlung der systematischen Unsicherheiten näher eingegangen.

Bei der in Kapitel 3 beschriebenen Ereignisselektion werden die folgenden Ereignisanzahlen selektiert:

$$\tilde{\mathbf{N}}^{\text{selektiert}} = \begin{pmatrix} \tilde{N}^{\text{selektiert}}_{\pi\pi\pi} \\ \tilde{N}^{\text{selektiert}}_{K\pi\pi} \\ \tilde{N}^{\text{selektiert}}_{KK\pi} \\ \tilde{N}^{\text{selektiert}}_{KKK} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}40 \cdot 10^{6} \\ 1{,}92 \cdot 10^{5} \\ 3{,}78 \cdot 10^{4} \\ 5{,}09 \cdot 10^{2} \end{pmatrix}.$$

Durch Inversion der oben genannten Migrationsmatrix resultieren die Anzahlen erzeug-

ter Ereignisse:

$$\mathbf{N}^{\text{erzeugt}} = \begin{pmatrix} N^{\text{erzeugt}}_{\pi\pi\pi} \\ N^{\text{erzeugt}}_{K\pi\pi} \\ N^{\text{erzeugt}}_{KK\pi} \\ N^{\text{erzeugt}}_{KKK} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}92 \cdot 10^7 \\ 2{,}09 \cdot 10^6 \\ 1{,}03 \cdot 10^6 \\ 1{,}08 \cdot 10^4 \end{pmatrix}.$$

Die integrierte Luminosität des verwendeten Datensatzes beträgt $\mathcal{L} = 384{,}1\,\text{fb}^{-1}$. Mit einem Wirkungsquerschnitt von $\sigma(e^+e^- \to \tau^+\tau^-) = (919 \pm 3)\,\text{pb}$ [10] für die Erzeugung von $\tau^+\tau^-$-Paaren ($\Rightarrow N_{\tau^+\tau^-} \approx 353 \times 10^6$) ergeben sich aus Gleichung 5.11 die Verzweigungsverhältnisse:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau) &= 8{,}7705 \times 10^{-2}, \\ \mathcal{B}(\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau) &= 2{,}968 \times 10^{-3}, \\ \mathcal{B}(\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau) &= 1{,}4624 \times 10^{-3}, \\ \mathcal{B}(\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau) &= 1{,}53 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

Statistische Fehler sowie Korrelationen zwischen den gemessenen Werten werden in Abschnitt 5.4 berechnet. Auf systematische Unsicherheiten wird in Abschnitt 5.5 eingegangen.

5.3.2 Verzweigungsverhältnisse von $\tau^- \to \phi h^- \nu_\tau$

Wie im zuletzt beschriebenen Fall werden die Elemente der Migrationsmatrix aus den Anzahlen simulierter Ereignisse der Art $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$ berechnet, die sich aus der Ereignisselektion (Kap. 3) ergeben.
Gleichung 5.10 nimmt für die Zerfälle $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)h^-\nu_\tau$ die Form

$$\begin{pmatrix} N^{\text{selektiert}}_{\phi\pi} \\ N^{\text{selektiert}}_{\phi K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{\phi\pi,\,\phi\pi} & M_{\phi\pi,\,\phi K} \\ M_{\phi K,\,\phi\pi} & M_{\phi K,\,\phi K} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N^{\text{erzeugt}}_{\phi\pi} \\ N^{\text{erzeugt}}_{\phi K} \end{pmatrix}$$

an. Die entsprechenden Zahlenwerte gemäß Kapitel 3 sind (gerundet):

$$\mathbf{M}^{\phi\mathbf{h}^-} = \begin{pmatrix} M_{\phi\pi,\,\phi\pi} & M_{\phi\pi,\,\phi K} \\ M_{\phi K,\,\phi\pi} & M_{\phi K,\,\phi K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}15 \times 10^{-2} & 1{,}33 \times 10^{-2} \\ 2{,}02 \times 10^{-4} & 2{,}66 \times 10^{-2} \end{pmatrix}.$$

Die zugehörigen *relativen* Fehler sind (vergleiche Abschnitt 5.5.6):

$$\mathbf{M}^{\phi\mathbf{h}^-}_{\text{rel. Fehler}} = \begin{pmatrix} 5{,}46 \times 10^{-3} & 5{,}14 \times 10^{-3} \\ 6{,}91 \times 10^{-2} & 3{,}61 \times 10^{-3} \end{pmatrix}.$$

Mit den aus den Fits in Kapitel 4 erhaltenen Ereigniszahlen

$$\begin{pmatrix} N^{\text{selektiert}}_{\phi\pi} \\ N^{\text{selektiert}}_{\phi K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 591 \\ 307 \end{pmatrix}$$

ergeben sich durch Matrixinversion die Anzahlen der erzeugten Ereignisse:

$$\begin{pmatrix} N^{\text{erzeugt}}_{\phi\pi} \\ N^{\text{erzeugt}}_{\phi K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13943 \\ 11442 \end{pmatrix},$$

woraus sich mit Gleichung 5.11 die dazugehörigen Verzweigungsverhältnisse berechnen lassen:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau) &= 1{,}98 \times 10^{-5},\\ \mathcal{B}(\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau) &= 1{,}62 \times 10^{-5}.\end{aligned}$$

Unter Verwendung des Verzweigungsverhältnisses $\mathcal{B}(\phi \to K^+K^-) = 0{,}492 \pm 0{,}006$, welches anderweitig gemessen wurde [2], ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau) &= 4{,}01 \times 10^{-5},\\ \mathcal{B}(\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau) &= 3{,}29 \times 10^{-5}.\end{aligned}$$

Statistische und systematische Unsicherheiten werden in den folgenden beiden Abschnitten diskutiert.

5.4 Statistische Fehler und Korrelationen

In den vorangegangenen Abschnitten wurde beschrieben, wie die Verzweigungsverhältnisse bestimmt werden. Wegen der gleichzeitigen Bestimmung und der fast identischen Selektion sind die Werte korreliert, und eine Betrachtung in Form von Kovarianz- bzw. Korrelationsmatrizen ist erforderlich. In diesem Abschnitt werden die Beiträge berechnet, welche auf statistische Schwankungen der Anzahlen selektierter Datenereignisse zurückzuführen sind. Auf weitere systematische Unsicherheiten wird im nächsten Abschnitt eingegangen.

Zunächst wird die Fehlerfortpflanzung allgemein für eine Funktion

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

beschrieben. Dabei stehen die $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ für die Messgrößen und die $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ für die daraus bestimmten Größen. Gegeben sei außerdem die Kovarianzmatrix $\mathbf{V_x}$ der Messgrößen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit den Elementen $V_{ij} \equiv \mathrm{cov}(x_i, x_j)$[2]:

$$\mathbf{V_x} \equiv \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \ldots & V_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{n1} & V_{n2} & \ldots & V_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dann ist die Kovarianzmatrix $\mathbf{V_f}$ von $\mathbf{f}$ gegeben durch

$$\mathbf{V_f} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{V_x} \cdot \mathbf{J}^T, \tag{5.12}$$

[2] Für N Messungen $(a_1, b_1), \ldots, (a_N, b_N)$ der Größen a und b ist die Kovarianz definiert als $\mathrm{cov}(a, b) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b})$. Genau genommen müssten statt der Mittelwerte $\bar{a}$ und $\bar{b}$ die „wahren Werte“ von a und b eingehen. Diese sind in der Regel jedoch unbekannt.

wobei $\mathbf{J}$ die Jacobi-Matrix von $\mathbf{f}$ und $\mathbf{J}^T$ ihre transponierte ist:

$$\mathbf{J} \equiv \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Eine Herleitung von (5.12) ist in [43] zu finden.

Bei der Bestimmung der Verzweigungsverhältnisse werden, ausgehend von den Anzahlen der selektierten Ereignisse $\mathbf{N}^{\text{selektiert}}$, die Anzahlen der erzeugten Ereignisse $\mathbf{N}^{\text{erzeugt}}$ berechnet:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{\text{erzeugt}} &= \mathbf{M^{-1}} \cdot \tilde{\mathbf{N}}^{\text{selektiert}} \\ &= \mathbf{M^{-1}} \cdot \left(\mathbf{N}^{\text{selektiert}} - \mathbf{N}^{\text{restlicher Untergrund}}\right), \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{M^{-1}}$ die inverse Migrationsmatrix ist (Abschnitt 5.2). Hier werden nur Abhängigkeiten der Verzweigungsverhältnisse von statistischen Schwankungen der Anzahlen selektierter Ereignisse betrachtet. Die Anzahlen simulierter Untergrundereignisse, welche von diesen subtrahiert werden, unterliegen aufgrund der Endlichkeit der simulierten Datensätze ebenfalls statistischen Fluktuationen. Deren Auswirkungen auf die Verzweigungsverhältnisse werden im Rahmen der systematischen Fehler untersucht. Wird die Kovarianzmatrix von $\mathbf{N}^{\text{selektiert}}$ mit $\mathbf{V}_{\text{selektiert}}$ bezeichnet, dann ist die von $\mathbf{N}^{\text{erzeugt}}$ folglich gegeben durch

$$\mathbf{V}_{\text{erzeugt}} = \mathbf{M^{-1}} \cdot \mathbf{V}_{\text{selektiert}} \cdot \left(\mathbf{M^{-1}}\right)^T.$$

Der Zusammenhang zwischen den Verzweigungsverhältnissen $\mathcal{B}(i)$ und $\mathbf{N}^{\text{erzeugt}}$ ist durch Gleichung 5.11 gegeben. Die zugehörige Jacobi-Matrix $\mathbf{J}^{\mathcal{B}}$ hat Diagonalgestalt

$$J^{\mathcal{B}}_{ij} = \frac{\partial \mathcal{B}_i}{\partial N_j^{\text{erzeugt}}} = \delta_{ij} \cdot \frac{1}{2\mathcal{L}\sigma_{\tau^+\tau^-}} \cdot \left(1 - \frac{N_j^{\text{erzeugt}}}{\mathcal{L}\sigma_{\tau^+\tau^-}}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{mit } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \, i = j \\ 0, \, i \neq j \end{cases},$$

und die Kovarianzmatrix ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\mathcal{B}} &= \mathbf{J}^{\mathcal{B}} \cdot \mathbf{V}_{\text{erzeugt}} \cdot \left(\mathbf{J}^{\mathcal{B}}\right)^T \\ &= \mathbf{J}^{\mathcal{B}} \cdot \mathbf{M^{-1}} \cdot \mathbf{V}_{\text{selektiert}} \cdot \left(\mathbf{M^{-1}}\right)^T \cdot \left(\mathbf{J}^{\mathcal{B}}\right)^T \\ &= \mathbf{J}^{\mathcal{B}} \cdot \mathbf{M^{-1}} \cdot \mathbf{V}_{\text{selektiert}} \cdot \left(\mathbf{J}^{\mathcal{B}} \cdot \mathbf{M^{-1}}\right)^T. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Die $N_i^{\text{selektiert}}$ können als statistisch unkorreliert angenommen werden. Man muss hier unterscheiden zwischen der statistischen Unabhängigkeit und der Korrelation, welche durch die Ereignisselektion zustande kommt. Letztere wird im nächsten Abschnitt bei der Behandlung der systematischen Unsicherheit der Migrationsmatrix berücksichtigt. Die $N_i^{\text{selektiert}}$ werden als poissonverteilt angenommen, so dass die Varianzen gerade durch die $N_i^{\text{selektiert}}$ selbst gegeben sind. $\mathbf{V}_{\text{selektiert}}$ hat somit die Gestalt

$$\mathbf{V}_{\text{selektiert}} = \begin{pmatrix} N_1^{\text{selektiert}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_2^{\text{selektiert}} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N_n^{\text{selektiert}} \end{pmatrix}.$$

Aus $\mathbf{V}_{\text{selektiert}}$ wird auf die beschriebene Weise $\mathbf{V}_{\mathcal{B}}$ berechnet. Statt der Kovarianzmatrizen $\mathbf{V}_{\mathcal{B}}$ werden im Folgenden die zugehörigen Korrelationsmatrizen $\rho_{\mathcal{B}}$ angegeben, aus denen die Korrelationen der Verzweigungsverhältnisse intuitiver ersichtlich sind. Ihre Elemente sind definiert als

$$\rho_{ij}^{\mathcal{B}} \equiv \frac{V_{ij}^{\mathcal{B}}}{\sigma_{\mathcal{B}_i}\sigma_{\mathcal{B}_j}},$$

wobei $V_{ij}^{\mathcal{B}}$ das entsprechende Element der Kovarianzmatrix und $\sigma_{\mathcal{B}_i} \equiv \sqrt{V_{ii}^{\mathcal{B}}}$ die Standardabweichung des i-ten Verzweigungsverhältnisses ist. Die Matrixelemente können Werte zwischen -1 und $+1$ annehmen. Alle Diagonalenelemente sind per Definition 1.

Mit der beschriebenen Methode ergeben sich die statistischen Unsicherheiten der gemessenen Verzweigungsverhältnisse der Zerfallskanäle $\tau^- \to h^-h^+h^-\nu_\tau$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau) &= (8{,}7705 \pm 0{,}005_{\text{stat.}}) \times 10^{-2},\\
\mathcal{B}(\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau) &= (2{,}968 \pm 0{,}016_{\text{stat.}}) \times 10^{-3},\\
\mathcal{B}(\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau) &= (1{,}4624 \pm 0{,}0079_{\text{stat.}}) \times 10^{-3},\\
\mathcal{B}(\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau) &= (1{,}53 \pm 0{,}12_{\text{stat.}}) \times 10^{-5}.
\end{aligned}$$

Die zugehörige (statistische) Korrelationsmatrix ist (gerundet):

$$\rho_{\text{stat.}}^{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \pi\pi\pi & K\pi\pi & KK\pi & KKK \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -0{,}170 & 0{,}010 & -0{,}000 \\ -0{,}170 & 1 & -0{,}238 & 0{,}015 \\ 0{,}010 & -0{,}238 & 1 & -0{,}109 \\ -0{,}000 & 0{,}015 & -0{,}109 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \pi\pi\pi \\ K\pi\pi \\ KK\pi \\ KKK \end{array}$$

Die gemessenen Verzweigungsverhältnisse „benachbarter“ Kanäle, d.h. von Zerfällen, bei denen sich die Anzahl der geladenen Kaonen im Endzustand um eins unterscheidet, sind antikorreliert. Der Grund dafür ist die in Abschnitt 3.3 beschriebene Einteilung der Zerfälle vom Typ $\tau^- \to h^-h^+h^-\nu_\tau$ in die zu messenden Zerfallskanäle gemäß der Anzahl rekonstruierter Kaonen. Betrachte man dazu ein einfaches Beispiel. Angenommen ein Zerfall, welcher als $\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ selektiert wurde, wäre nicht als solcher, sondern als einer vom Typ $\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ selektiert worden. Dann wäre der Wert für das gemessene Verzweigungsverhältnis von $\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ kleiner, von $\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ hingegen größer.

Für die Zerfallskanäle $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)h^-\nu_\tau$ ist die Kovarianzmatrix $\mathbf{V}_{\text{selektiert}}$ durch die (statistischen) Fehler der Fitresultate in Abschnitt 4.1 und 4.2 gegeben. Da bei den Fits jeweils die Anzahl der Signalereignisse mit der Anzahl der Untergrundereignisse korreliert ist, sind die Fehler nicht durch $\sqrt{N_{\text{Signal}}}$ gegeben, sondern deutlich größer. Die Anzahlen werden, wie im zuvor beschriebenen Fall, als unkorreliert angenommen, so dass $\mathbf{V}_{\text{selektiert}}$ Diagonalgestalt hat:

$$\mathbf{V}_{\text{selektiert}} = \mathbf{V}_{\text{Fit}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \phi\pi & \phi K \end{array} \\ \begin{pmatrix} 55^2 & 0 \\ 0 & 22^2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \phi\pi \\ \phi K \end{array} .$$

Die statistischen Fehler der gemessenen Verzweigungsverhältnisse $\mathcal{B}(\tau^- \to \phi h^- \nu_\tau)$ sind in Tabelle 5.1 aufgelistet und die zugehörige statistische Korrelationsmatrix ist:

$$\rho^{\mathcal{B}}_{\text{stat.}} = \begin{array}{cc} \phi\pi & \phi K \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -0{,}212 \\ -0{,}212 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \phi\pi \\ \phi K \end{array} .$$

Wie im Fall „benachbarter“ Verzweigungsverhältnisse der Art $\tau^- \to h^- h^+ h^- \nu_\tau$, insbesondere $\tau^- \to K^- K^+ \pi^- \nu_\tau$ und $\tau^- \to K^- K^+ K^- \nu_\tau$, sind die gemessenen Werte antikorreliert. Das oben beschriebene Argument kann direkt übertragen werden.

Tabelle 5.1: *Gemessene Verzweigungsverhältnisse und statistische Fehler der Zerfallskanäle $\tau^- \to \phi(\to K^- K^+) h^- \nu_\tau$ und $\tau^- \to \phi h^- \nu_\tau$. Deren Zusammenhang ist durch $\mathcal{B}(\phi \to K^+ K^-) = 0{,}492$ gegeben [2].*

Zerfallskanal	Verzweigungsverhältnis
$\tau^- \to \phi(\to K^- K^+)\pi^- \nu_\tau$	$(1{,}98 \pm 0{,}25_{\text{stat.}}) \times 10^{-5}$
$\tau^- \to \phi(\to K^- K^+) K^- \nu_\tau$	$(1{,}62 \pm 0{,}12_{\text{stat.}}) \times 10^{-5}$
$\tau^- \to \phi\pi^- \nu_\tau$	$(4{,}01 \pm 0{,}51_{\text{stat.}}) \times 10^{-5}$
$\tau^- \to \phi K^- \nu_\tau$	$(3{,}29 \pm 0{,}24_{\text{stat.}}) \times 10^{-5}$

5.5 Systematische Unsicherheiten

Nachdem im letzten Abschnitt die statistischen Unsicherheiten der gemessenen Verzweigungsverhältnisse berechnet wurden, wird in diesem Abschnitt auf die Untersuchung systematischer Effekte eingegangen. Zunächst wird beschrieben, welche Systematiken untersucht werden und wie ihre Größe abgeschätzt wird. Die entsprechenden Werte werden im Anschluss daran zusammenfassend angegeben.

5.5.1 Luminosität

In die Berechnung der Verzweigungsverhältnisse geht die integrierte Luminosität nach (5.4) über die Anzahl der erzeugten Taupaar-Ereignisse $N(\tau^+\tau^-)$ und über die Normierung der Untergrundereignisse (5.7) ein. Sie wird mit Hilfe von Bhabha-, Myonpaar- und Photonpaar-Ereignissen gemessen. Die Wirkungsquerschnitte dieser Prozesse werden durch Monte-Carlo-Simulationen gewonnen. Fehler der Luminositätsmessungen für die verschiedenen Datennahmeperioden von *BaBar* finden sich in [45] und [46]. Sie sind teilweise korreliert. Die folgende Berechnung des Gesamtfehlers basiert auf der in [47] beschriebenen Methode. Dabei werden folgende Annahmen gemacht:

1. Ein Teil des Datensatzes[3], welcher $125{,}9\,\text{fb}^{-1}$ entspricht, weist einen relativen Luminositätsfehler von 0,80 % auf.

[3] Im *BaBar*-Sprachgebrauch wird dieser Teil als „Run 1, Run 2 und Run 3“ bezeichnet (Abschnitt 2.4).

2. Der entsprechende Fehler für den restlichen Teil[4] des Datensatzes von 258,2 fb^{-1} beträgt 0,49 %. Er ist nicht mit dem ersten Fehler korreliert.

3. Aufgrund der Unsicherheit des Bhabha-Wirkungsquerschnitts haben beide Teile des Datensatzes zusätzlich einen Fehler von 0,5 %, der zu 100 % zwischen den Datensätzen korreliert ist.

Die Bestimmung der systematischen Unsicherheiten der Verzweigungsverhältnisse und ihrer Korrelationen erfolgt numerisch mit Hilfe einer Variationsmethode, wie sie im Folgenden noch mehrfach durchgeführt werden wird.[5] Dabei werden die Luminositäten der verschiedenen Datennahmeperioden innerhalb ihrer Fehler variiert. Für die drei genannten Fehler werden Zufallszahlen r_1, r_2 und r_3 gemäß einer Gaußverteilung der Breite Eins und des Mittelwerts Null generiert. Für eine Datennahmeperiode $i = 1 \ldots 5$ ergibt sich die variierte Luminosität dann nach

$$\mathcal{L}_i^{\text{var.}} = \mathcal{L}_i \times \left(1 + r_{1,2} \cdot \left(\frac{\Delta\mathcal{L}}{\mathcal{L}}\right)_{1,2} + r_3 \cdot \left(\frac{\Delta\mathcal{L}}{\mathcal{L}}\right)_3\right). \tag{5.14}$$

Die Indizes der Zufallszahlen r_j und der relativen Fehler $\left(\frac{\Delta\mathcal{L}}{\mathcal{L}}\right)_j$ beziehen sich auf obige Punkte. Je nach Datennahmeperiode sind demnach r_1 und $\left(\frac{\Delta\mathcal{L}}{\mathcal{L}}\right)_1$ oder r_2 und $\left(\frac{\Delta\mathcal{L}}{\mathcal{L}}\right)_2$ zu verwenden. Die Zufallszahlen r_1, r_2 und r_3 sind für alle Datennahmeperioden i dieselben. Für jedes i sind die beiden in (5.14) auftretenden Fehler voneinander unabhängig, so dass die Verwendung von zwei (unabhängigen) Zufallszahlen gerechtfertigt ist. Mit den variierten Werten der Luminosität werden die Verzweigungsverhältnisse neu berechnet. Die Prozedur wird $N = 10\,000$-mal wiederholt und die Kovarianzen $V_{ij}^{\mathcal{B}} \equiv \mathrm{cov}(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_i)$ der Verzweigungsverhältnisse $\mathcal{B}_i$ und $\mathcal{B}_j$ werden gemäß ihrer Definition berechnet:

$$\mathrm{cov}(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j) \equiv \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (\mathcal{B}_i^{(k)} - \overline{\mathcal{B}_i})(\mathcal{B}_j^{(k)} - \overline{\mathcal{B}_j}).$$

$\overline{\mathcal{B}}_i$ und $\overline{\mathcal{B}}_j$ bezeichnen dabei die Mittelwerte der N bei den Variationen gewonnenen Verzweigungsverhältnisse. Sie sollten mit den tatsächlich gemessenen Werten $\mathcal{B}_i$ und $\mathcal{B}_j$ übereinstimmen.

Da die Luminosität für alle Zerfallskanäle auf dieselbe Weise eingeht, sind die entsprechenden Fehler der Verzweigungsverhältnisse zu 100 % (positiv) korreliert. Das Ergebnis der Variation stimmt mit dieser Erwartung überein. Die relativen Abweichungen sind $< 10^{-6}$. Für die zugehörigen Korrelationsmatrizen bedeutet das, dass alle Elemente 1 sind. Die relativen Fehler sind hingegen nicht die gleichen, da die Untergrundanteile der Zerfallskanäle unterschiedlich sind. Die Unsicherheiten der Verzweigungsverhältnisse sind in Tabelle 5.5 aufgelistet.

5.5.2 Wirkungsquerschnitt $\sigma(e^+e^- \to \tau^+\tau^-)$

Der Wirkungsquerschnitt $\sigma(e^+e^- \to \tau^+\tau^-)$ geht in $N(\tau^+\tau^-)$, die Anzahl der erzeugten $\tau^+\tau^-$-Ereignisse, und in die Normierung der τ-Untergründe (5.7) ein. Für eine Schwer-

[4] „Run 4“ und Run 5“ im *BaBar*-Sprachgebrauch.

[5] Im Falle der Luminosität wäre auch eine analytische Bestimmung der Kovarianzen möglich, technisch ist die numerische Methode der Variation jedoch praktikabler.

punktsenergie, die der Masse der $\Upsilon(4S)$-Resonanz entspricht, wird er mittels einer Monte-Carlo-Simulation bestimmt. Nach [10] ist $\sigma_{\tau^+\tau^-} = (919 \pm 3)\,\mathrm{pb}^{-1}$, der relative Fehler beträgt:

$$\frac{\Delta\sigma_{\tau^+\tau^-}}{\sigma_{\tau^+\tau^-}} = 0{,}31\,\%.$$

Wie im Fall der Luminosität erfolgt die Bestimmung der daraus entstehenden (Ko-) Varianzen der Verzweigungsverhältnisse, indem $\sigma_{\tau^+\tau^-}$ 10 000-mal im Rahmen seines Fehlers variiert wird. Die erhaltenen Werte finden sich zusammen mit allen anderen Unsicherheiten in Tabelle 5.5. Die Fehler sind innerhalb der numerischen Genauigkeit zu 100 % (positiv) korreliert. Im Gegensatz zum Fall der Luminosität ist dies nicht selbstverständlich. Der Unterschied besteht darin, dass die Normierung der Nicht-τ-Untergründe nicht von $\sigma_{\tau^+\tau^-}$, wohl aber von $\mathcal{L}$ abhängt. Der Unterschied ist offensichtlich marginal, was auf den vernachlässigbaren relativen Anteil von selektierten Untergrundereignissen dieser Art zurückzuführen ist.

5.5.3 Normierungen der Untergründe

Untergründe vom Typ $\tau^- \to h^-h^+h^-\pi^0\nu_\tau$: In die Normierung der einzelnen τ-Untergründe geht neben dem Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\tau^+\tau^-}$ auch das Verzweigungsverhältnis des jeweiligen Kanals ein. Da dieses nur mit endlicher Genauigkeit bekannt ist, folgt daraus eine Unsicherheit der in dieser Arbeit gemessenen Verzweigungsverhältnisse. Die dominanten Untergründe der selektierten Ereignisse vom Typ $\tau^- \to h^-h^+h^-\nu_\tau$ sind die mit einem zusätzlichen neutralen Pion: $\tau^- \to h^-h^+h^-\pi^0\nu_\tau$. Zur Bestimmung der Kovarianzen werden folgende Verzweigungsverhältnisse im Rahmen ihrer in [2] angegebenen Fehler variiert:

$$\begin{aligned}
\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\pi^0\nu_\tau \qquad & \frac{\Delta\mathcal{B}}{\mathcal{B}} = 1{,}3\,\%,\\
\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\pi^0\nu_\tau \qquad & \frac{\Delta\mathcal{B}}{\mathcal{B}} = 15{,}2\,\%,\\
\tau^- \to K^-K^+\pi^-\pi^0\nu_\tau \qquad & \frac{\Delta\mathcal{B}}{\mathcal{B}} = 32{,}8\,\%.
\end{aligned}$$

Dabei werden die Fehler als unkorreliert angenommen [2]. Die aus der Variation resultierenden Unsicherheiten der bestimmten Verzweigungsverhältnisse sind in Tabelle 5.5 aufgeführt. Die Korrelationsmatrix ist in Anhang A gegeben.

Das Verzweigungsverhältnis des Zerfallskanals $\tau^- \to K^-K^+K^-\pi^0\nu_\tau$ wurde bisher nicht gemessen. Die Unsicherheit, die aus diesem Untergrund entspringt, wird in Abschnitt 5.5.10 abgeschätzt.

Andere Untergründe: Der Anteil von Untergründen, die nicht vom Typ $\tau^- \to h^-h^+h^-\pi^0\nu_\tau$ sind, ist sehr gering. Im Fall von τ-Untergründen sind deshalb die Unsicherheiten der Verzweigungsverhältnisse vernachlässigbar. Für die Zerfallskanäle $\tau^- \to h^-h^+h^-\nu_\tau$ ist im Fall von Nicht-τ-Untergründen die Unsicherheit des jeweiligen Wirkungsquerschnitts σ_i vernachlässigbar. Auf die Unsicherheit der Untergründe vom Typ $e^+e^- \to q\bar{q}$, welche für die Zerfälle $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$ von Bedeutung sind, wird in Abschnitt 5.5.10 eingegangen.

5.5.4 Effizienz der Spurrekonstruktion

Nicht alle Spuren geladener Teilchen, die in einem Ereignis vorkommen, werden auch als solche rekonstruiert. Die entsprechende Effizienz ist prinzipiell unterschiedlich für Daten und simulierte Ereignisse, so dass bei letzteren für jede (berücksichtigte) Spur ein entsprechender Korrekturfaktor angewendet werden muss:

$$\eta = \frac{\varepsilon^{\text{Daten}}}{\varepsilon^{\text{Simulation}}}.$$

Der tatsächliche Wert ist, innerhalb des Fehlers, mit $\eta = 1$ verträglich. Die Unsicherheit ist jedoch nicht Null und muss somit berücksichtigt werden. Sie ist für alle Spuren voll korreliert.

Auf die Bestimmung der Spurrekonstruktionseffizienz wird in [48] eingegangen. Es wird lediglich ein Wert für alle Winkel und Impulse bestimmt. In [49] ist die empfohlene Behandlung der Fehler dokumentiert. Die Werte $\frac{\Delta\eta}{\eta}$ wurden mit Hilfe von τ-Zerfällen der gleichen wie der hier untersuchten Topologie bestimmt. Deshalb entfallen Unsicherheiten, die für Ereignisse mit anderen Winkelverteilungen oder Multiplizitäten geladener Teilchen angebracht werden müssen. Aus den in [50] aufgelisteten Werten ergeben sich somit die in Tabelle 5.2 aufgelisteten Unsicherheiten. Sie werden als voll korreliert zwischen den Datennahmeabschnitten angenommen. Die (Ko-)Varianzen werden wie-

Tabelle 5.2: *Fehler der Korrekturen der Spurrekonstruktionseffizienz für die verschiedenen Datennahmeperioden.*

Datennahmeperiode	$\frac{\Delta\eta}{\eta}$ [%] (pro Spur)
Run 1	0,718
Run 2	0,285
Run 3	0,459
Run 4	0,185
Run 5	0,214

der durch Variation bestimmt. Das Variationsgewicht für jedes simulierte Signal- oder Untergrundereignis ist $1 + 4r\frac{\Delta\eta}{\eta}$. Wobei r eine Zufallszahl (gemäß einer Gaußverteilung mit Mittelwert Eins und Breite Null) bezeichnet und der Faktor 4 auf die vier betrachteten Spuren zurückzuführen ist, für welche das Gewicht zu 100 % (positiv) korreliert ist. Die Korrelation der Unsicherheiten in Tabelle 5.2 wird dadurch berücksichtigt, dass für alle Datennahmeperioden dieselbe Zufallszahl r verwendet wird.

Wie im Fall der Luminosität sind alle Fehler der gemessenen Verzweigungsverhältnisse komplett korreliert. Dies entspricht der Erwartung, da die Spurrekonstruktionseffizienz für alle simulierten Ereignisse auf identische Weise eingeht. Die relativen Unsicherheiten der Fehler sind in Tabelle 5.5 angegeben.

5.5.5 Effizienzen der Teilchenidentifikation

Wie bei der Spurrekonstruktion werden die Effizienzen der Teilchenidentifikation nicht exakt in der Detektorsimulation beschrieben. Für simulierte Ereignisse müssen dementsprechend die in Abschnitt 2.3 beschriebenen Korrekturen angebracht werden, welche fehlerbehaftet sind.

In der hier beschriebenen Analyse müssen also für jedes Ereignis sieben Korrekturen angebracht werden: Eine für die Identifikation des Tag-Leptons, drei für die Identifikation der Hadronen als Kaon oder Pion (=„nicht Kaon“). Außerdem noch drei dafür, dass die Hadronen nicht die Identifikationskriterien für Elektronen passieren dürfen. Die Korrekturfaktoren hängen vom Polarwinkel, Azimutalwinkel und Impuls des Teilchens ab. Listen mit Korrekturwerten werden von der *BaBar*-Kollaboration zur Verfügung gestellt [24].

Zur Bestimmung der Unsicherheiten der Verzweigungsverhältnisse, die aus den Fehlern der Korrekturfaktoren stammen, werden letztere innerhalb ihrer Fehler variiert. Die angegebenen Fehler der Korrekturwerte in den unterschiedlichen Impuls- und Winkelbereichen sind rein statistischer Natur und somit voneinander unabhängig. Sie werden dementsprechend unabhängig voneinander variiert. Korrekturwerte stehen für alle Datennahmeperioden getrennt zur Verfügung. In Ermangelung von Werten für die systematischen Unsicherheiten der Korrekturen werden die statistischen Unsicherheiten in den Impuls- und Winkelbereichen als Maß für die systematischen Unsicherheiten angenommen. Deshalb werden die (statistischen) Fehler im gleichen Impuls- und Winkelbereich für alle Datennahmeperioden als korreliert behandelt, obwohl sie aufgrund ihrer statistischen Natur unkorreliert sind. Auf diese Weise wird eine künstliche systematische Unsicherheit generiert, von der angenommen wird, dass sie in der Größenordnung der tatsächlichen liegt.

Die Verzweigungsverhältnisse werden mit den variierten Werten neu berechnet und durch 1 000-fache Wiederholung werden die Kovarianzen bestimmt[6]. In Tabelle 5.5 sind die zugehörigen relativen Fehler angegeben. Sie sind teilweise korreliert, die Korrelationsmatrix ist in Anhang A angegeben. In Abschnitt 5.5.11 findet sich die Korrelationsmatrix, welche sich unter Berücksichtigung aller untersuchten systematischen Unsicherheiten ergibt.

Auf einige technische Details wird in Anhang B eingegangen. Es wird auch ein weiterer systematischer Fehler diskutiert, der sich aus der Nichteindeutigkeit der Korrekturen ergibt (Näheres dazu im Anhang). Die entsprechenden Unsicherheiten der Verzweigungsverhältnisse sind ebenfalls in Tabelle 5.5 aufgeführt.

5.5.6 Signaleffizienzen

Die Bestimmung der Migrationsmatrizen erfolgt mit Hilfe von simulierten Ereignissen. Wegen der Endlichkeit der zur Verfügung stehenden Datensätze sind die Matrixelemente nur mit endlicher statistischer Genauigkeit bekannt. Um die Auswirkung auf die Verzweigungsverhältnisse zu bestimmen, werden die Elemente der Migrationsmatrizen

[6] Da die Gewichte für jedes simulierte Ereignis einzeln angebracht werden, ist mit dieser Variation ein deutlich größerer Rechenaufwand verbunden als z.B. mit der Variation der Luminosität. Sie wird deshalb nicht ganz so häufig durchgeführt.

im Rahmen ihrer Fehler variiert.

Die selektierten Ereignisse stellen eine Teilmenge der generierten Ereignisse dar. Folglich sind die entsprechenden Anzahlen korreliert. Zur Berechnung des statistischen Fehlers der Effizienz $\varepsilon = \frac{N_{\text{selektiert}}}{N_{\text{generiert}}}$ muss deshalb Binomialstatistik angewendet werden. Der Fehler ergibt sich aus binomialer Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta\varepsilon = \sqrt{\frac{N_{\text{selektiert}}(N_{\text{generiert}} - N_{\text{selektiert}})}{(N_{\text{generiert}})^3}}. \tag{5.15}$$

Für die Matrixelemente der Migationsmatrix, die nichts anderes als Effizienzen (bzw. Misseffizienzen) sind, können die Fehler ebenfalls auf diese Weise berechnet werden. Allerdings sind die Elemente der Migrationsmatrizen aufgrund der Ereignisselektion nicht unkorreliert. Die Argumentation ist analog zu der in Abschnitt 5.4 zur Erklärung der Antikorrelation „benachbarter“ Zerfallskanäle (S. 70): Betrachte man dazu ein simuliertes Ereignis vom „wahren“ Typ $\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$. Passiert dieses Ereignis die Selektion für $\tau^- \to h^-h^+h^-\nu_\tau$, so erhöht sich dadurch in jedem Fall eines der Matrixelemente $M_{xxx,\,\pi\pi\pi}$ der ersten Spalte der Migrationsmatrix. Wird es (richtig) als $\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ selektiert, so erhöht dies das Matrixelement $M_{\pi\pi\pi,\,\pi\pi\pi}$. Bei einer Selektion als $\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ hingegen wird das Matrixelement $M_{K\pi\pi,\,\pi\pi\pi}$ größer. Im Fall der Migrationsmatrix der Zerfallskanäle $\tau^- \to h^-h^+h^-\nu_\tau$ sind somit jeweils vier Matrixelemente korreliert. Diese vier Elemente können also nicht unabhängig voneinander variiert werden. Sie sind aber auch nicht voll korreliert oder antikorreliert.

Eine Methode zur Durchführung der Variation unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Korrelation wird durch Abbildung 5.1 veranschaulicht. Dabei wird die Selektion

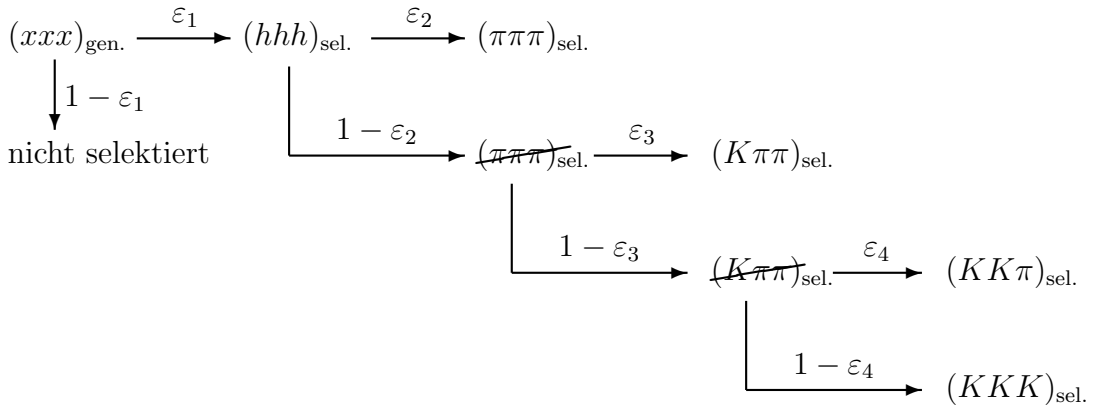


Abbildung 5.1: *Schema zur Berechnung der Elemente der Migrationsmatrix. Die gezeigte Aufspaltung in mehrere Stufen ermöglicht bei der Variation der Matrixelemente eine Berücksichtigung der Korrelationen.*

eines Ereignisses als mehrstufiger Prozess betrachtet. Für alle Stufen können die Unsicherheiten der (Miss-)Effizienzen über (5.15) berechnet und die Korrelationen angegeben werden. Die Elemente der Migrationsmatrix können dann als Produkte unkorrelierter (Miss-)Effizienzen dargestellt werden. Ausgangspunkt ist die (bekannte) Anzahl generierter Ereignisse vom Typ „xxx“, was für $\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$, $\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$,

$\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ stehen kann. Aus diesem simulierten Datensatz werden Ereignisse vom Typ $\tau^- \to h^-h^+h^-\nu_\tau$ selektiert. Die Effizienz dieser Selektion ist ε_1. Im nächsten Schritt erfolgt die Aufspaltung des verbliebenen Datensatzes in Ereignisse vom Typ $\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ und alle anderen. Zu ersteren werden gemäß Abschnitt 3.3 die Ereignisse gezählt, in denen kein Kaon identifiziert wurde. Die Effizienz (und die dazugehörige Unsicherheit) der Selektion von Ereignissen vom Typ $\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ aus dem selektierten Datensatz $\tau^- \to h^-h^+h^-\nu_\tau$ kann nach Gleichung 5.15 berechnet werden. Sie wird mit ε_2 bezeichnet. Für die restlichen Ereignisse (alle, die als $\tau^- \to h^-h^+h^-\nu_\tau$, nicht aber als $\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ selektiert wurden) ist somit die (Miss-)Effizienz durch $1-\varepsilon_2$ gegeben. ε_2 und $1-\varepsilon_2$ sind klarerweise zu 100 % antikorreliert. Die Aufspaltung der restlichen Ereignisse erfolgt nach dem gleichen Muster. Zunächst werden die Ereignisse vom Typ $\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ selektiert, dann wird der Rest in $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ aufgespalten. Die (Miss-)Effizienzen sind jeweils berechenbar und in jeder Stufe zu 100 % antikorreliert. Aus den Effizienzen $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_4$ können die Elemente der Migrationsmatrix berechnet werden[7]

$$\begin{aligned}
M_{\pi\pi\pi,\,xxx} &= \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2, \\
M_{K\pi\pi,\,xxx} &= \varepsilon_1 \cdot (1-\varepsilon_2) \cdot \varepsilon_3, \\
M_{KK\pi,\,xxx} &= \varepsilon_1 \cdot (1-\varepsilon_2) \cdot (1-\varepsilon_3) \cdot \varepsilon_4, \\
M_{KKK,\,xxx} &= \varepsilon_1 \cdot (1-\varepsilon_2) \cdot (1-\varepsilon_3) \cdot (1-\varepsilon_4).
\end{aligned}$$

Dabei steht xxx wieder für die vier generierten Datensätze, die den „wahren“ Zerfällen entsprechen. Insgesamt existieren also 16 solcher Gleichungen für die 16 Elemente der Migrationsmatrix. Sie können durch 16 voneinander unabhängige ε_i ausgedrückt werden.

Für jeden Satz vier solcher Gleichungen werden vier normalverteilte Zufallszahlen $r_1 \ldots r_4$ generiert (insgesamt also 16 Zufallszahlen). Die variierten Elemente der Migrationsmatrix ergeben sich dann aus

$$\begin{aligned}
M^{\text{var.}}_{\pi\pi\pi,\,xxx} &= (\varepsilon_1 + r_1\Delta\varepsilon_1) \cdot (\varepsilon_2 + r_2\Delta\varepsilon_2), \\
M^{\text{var.}}_{K\pi\pi,\,xxx} &= (\varepsilon_1 + r_1\Delta\varepsilon_1) \cdot (1-\varepsilon_2 - r_2\Delta\varepsilon_2) \cdot (\varepsilon_3 + r_3\Delta\varepsilon_3), \\
M^{\text{var.}}_{KK\pi,\,xxx} &= (\varepsilon_1 + r_1\Delta\varepsilon_1) \cdot (1-\varepsilon_2 - r_2\Delta\varepsilon_2) \cdot (1-\varepsilon_3 - r_3\Delta\varepsilon_3) \cdot (\varepsilon_4 + r_4\Delta\varepsilon_4), \\
M^{\text{var.}}_{KKK,\,xxx} &= (\varepsilon_1 + r_1\Delta\varepsilon_1) \cdot (1-\varepsilon_2 - r_2\Delta\varepsilon_2) \cdot (1-\varepsilon_3 - r_3\Delta\varepsilon_3) \cdot (1-\varepsilon_4 - r_4\Delta\varepsilon_4),
\end{aligned}$$

wobei die $\Delta\varepsilon_i$ die Binomialfehler der ε_i nach Gleichung 5.15 bezeichnen. Eine 10 000-fache Wiederholung der Variation liefert die Kovarianzen der Verzweigungsverhältnisse. Die relativen Fehler sind in Tabelle 5.5 aufgelistet, die zugehörigen Korrelationsmatrizen sind in Anhang A angegeben.

5.5.7 Untergrundeffizienzen

Der Anteil des Untergrunds, der die Selektion passiert, wird aus den simulierten Ereignissen abgeschätzt. Wie im Fall der Signalereignisse steht dafür nur ein endlicher

[7] Das Ergebnis ist unabhängig von der gewählten Aufspaltung. Die Effizienzen und zugehörigen Unsicherheiten der Zerfallskanäle ändern sich nicht, wenn im „Baum“ in Abbildung 5.1 $\pi\pi\pi$, $K\pi\pi$, $KK\pi$ und KKK beliebig permutiert werden.

Datensatz zur Verfügung. Das Verhältnis

$$\varepsilon_j \equiv \frac{N^{\text{Simlation, selektiert}}_{\text{Untergrund}(j)}}{N^{\text{Simulation, generiert}}_{\text{Untergrund}(j)}}$$

in Gleichung 5.6 (zusammen mit Gleichung 5.7) ist die Wahrscheinlichkeit für die Selektion von Untergrundereignissen vom Typ i. Deren statistische Unsicherheit ist durch Gleichung 5.15 gegeben.

Mit ε_{ij} wird dementsprechend die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass ein Ereignis vom Untergrundtyp j als Signalereignis vom Typ i selektiert wird. Als Untergrundereignisse werden dabei diejenigen bezeichnet, die gemäß Gleichung 5.8 von der Anzahl der selektierten Ereignisse subtrahiert werden. Die Datensätze simulierter Untergrundereignisse verschiedener Untergrundklassen j sind statistisch unabhängig und die ε_{ij} somit unabhängig in j. Bezüglich des selektierten Signaltyps i hingegen sind sie, analog zu den Elementen der Migrationsmatrix, nicht unabhängig. Somit wäre eigentlich eine Variation wie in Abschnitt 5.5.6 beschrieben erforderlich. Da der zu subtrahierende Untergrundanteil klein ist und es sich hierbei zudem um einen Effekt zweiter Ordnung handelt (im Gegensatz zum Fall der Migrationsmatrix), wird diese Korrelation vernachlässigt. Die ε_{ij} werden also alle unabhängig voneinander variiert. Das Ergebnis der Variation ist in Tabelle 5.5 angegeben. Die zugehörige Korrelationsmatrix findet sich in Anhang A.

5.5.8 Variation der Schnitte

Die Ereignisselektion (Kapitel 3) basiert zum Großteil darauf, dass auf kinematische Größen der Ereignisse Schnitte angewendet werden. Eine Voraussetzung für die Richtigkeit dieses Verfahrens ist, dass die Verteilung der Daten in dem Bereich des Schnittwerts durch die Simulation beschrieben wird. Andernfalls hängt das Ergebnis vom genauen Wert des Schnitts ab, da beispielsweise die Effizienz in Daten und Simulation unterschiedlich stark durch diesen Schnitt verändert wird. Da die Übereinstimmung zwischen Daten und simulierten Ereignissen nicht immer im Rahmen der statistischen Fehler gegeben ist, muss für die Wahl der Schnittwerte eine systematische Unsicherheit abgeschätzt werden.

Dazu wird abgeschätzt, wie weit die Verteilung der simulierten Ereignisse verschoben werden muss, damit sie im Bereich des Schnittwertes mit der Datenverteilung übereinstimmt. Bei der Selektion wird dann der Schnittwert für die simulierten Ereignisse um den entsprechenden Betrag verschoben, während er für Daten unverändert bleibt. Die Differenz der erhaltenen Verzweigungsverhältnisse dient als Abschätzung der systematischen Unsicherheit. Die Methode ist am Beispiel des Leptonenimpulses in Abbildung 5.2 veranschaulicht.

Die gewählten Variationen sind in Tabelle 5.3 angegeben (vgl. Tabelle 3.2). Der Schnitt auf den Impuls des Leptons sowie der untere ($1{,}8\,\frac{\text{GeV}}{c^2}$) Schnitt auf die fehlende invariante Masse werden als voll korreliert angenommen und entsprechend variiert. Alle anderen Schnitte werden als unkorreliert angenommen. Die dominante Unsicherheit ist in allen Zerfallskanälen die des Schnitts auf die Energiesumme neutraler Teilchen. In Tabelle 5.5 sind die kombinierten relativen Fehler aufgeführt.

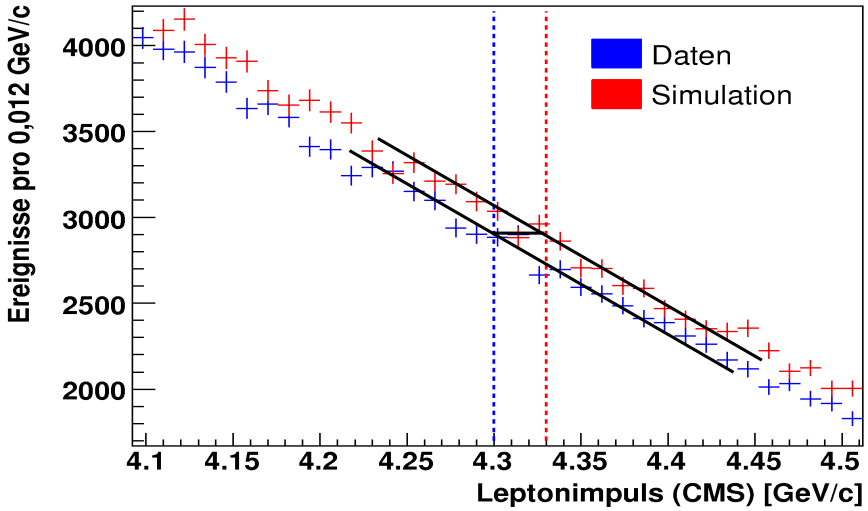


Abbildung 5.2: *Veranschaulichung der Variation der Schnitte. Dargestellt ist ein Ausschnitt der Impulsverteilung des Tag-Leptons im Bereich des Schnittwerts. Der Schnittwert wird für simulierte Ereignisse um den Betrag variiert, den die beiden Verteilungen horizontal gegeneinander verschoben sind. Die vertikalen Linien kennzeichnen die Schnittewerte für Daten (blau) und simulierte Ereignisse (rot).*

Tabelle 5.3: *Übersicht der variierten Schnitte. Die Variation bezeichnet die Änderung des Schnittwerts der für simulierte Ereignisse gegenüber den Daten.*

Schnittvariable	Schnittwert	Variation
Impuls des Leptons	$4{,}30\ \frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}}$	$+0{,}03\ \frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}}$
Fehlende invariante Masse	$1{,}80\ \frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}}$	$+0{,}02\ \frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$
	$8{,}00\ \frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}}$	$+0{,}02\ \frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$
Thrust	0,9200	+0,0008
Energiesumme neutraler Teilchen	$0{,}25\ \frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$	$+0{,}02\ \frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$

Um die Korrelationen der Verzweigungsverhältnisse zu bestimmen, müsste die Variation mehrfach wiederholt werden. Da diese Variation einen sehr großen Rechenaufwand erfordert, wurde sie nicht durchgeführt. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Fehler der Verzweigungsverhältnisse, die aus der Variation der Schnitte resultieren, voll (positiv) korreliert zwischen den Verzweigungsverhältnissen sind.

5.5.9 Elektron-Tag vs. Myon-Tag und Datennahmeperioden

Neben der Möglichkeit, die Verzweigungsverhältnisse aus dem kompletten verfügbaren Datensatz zu bestimmen, kann dazu auch nur ein Teil der Daten verwendet werden. In Tabelle 5.4 sind die Verzweigungsverhältnisse aufgelistet, welche sich aus den Aufspal-

tungen des Gesamtdatensatzes gemäß des Tag-Leptons und der Datennahmeperioden ergeben.

Für den Zerfallskanal $\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ beträgt die relative Abweichung zwischen dem Fall mit Tag-Elektron und dem mit Tag-Myon unter Berücksichtigung aller Datennahmeperioden 1,22 %. Die relativen statistischen Unsicherheiten betragen 0,08 % und 0,10 % und können diese Abweichung somit nicht erklären. Zu den systematischen Unsicherheiten, die zwischen den beiden Fällen unkorreliert sind, zählen die Teilchenidentifikation des Tag-Leptons, sowie die Signal- und die Untergrundeffizienz. Aus Tabelle 5.5 ist ersichtlich, dass diese Unsicherheiten die beobachtete Abweichung nicht erklären können. Zudem machen die Unsicherheiten aus der Identifikation des Tag-Leptons nur einen kleinen Teil der gesamten Unsicherheiten der Teilchenidentifikation aus, der Großteil der Fehler ist also voll korreliert zwischen Elektron-Tag und Myon-Tag.

Die Ursache des Unterschieds zwischen dem Fall mit Tag-Elektron und Tag-Myon ist aus einem Vergleich der zusätzlichen Aufspaltung in die Datennahmeperioden ersichtlich. Zwischen den Datennahmeperioden sind der statistische Fehler und die Fehler der Signal- und Untergrundeffizienz unkorreliert. Die relativen Fehler der Signal- und Untergrundeffizienzen betragen für die einzelnen Datennahmeperioden zwischen 0,05 % und 0,2 %. Damit ergibt sich folgendes Bild: Während die gemessenen Verzweigungsverhältnisse $\mathcal{B}(\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau)$ im Fall des Elektron-Tags zwischen den unterschiedlichen Datennahmeperioden (Tabelle 5.4) innerhalb der Fehler konsistent sind, ist dies beim Myon-Tag nicht der Fall. So beträgt beispielsweise der relative Unterschied zwischen „Run 1“ und „Run 4“ mehr als 4 % im Fall des Myon-Tag und nur 0,6 % im Fall des Elektron-Tag bei einer (unkorrelierten) Unsicherheit von jeweils etwa 0,5 %. Die Ursache für diese Diskrepanz ist ein mangelndes Verständnis der Teilchenidentifikationseffizienz der Myonen, was auf starke Zeitabhängigkeiten in der Effizienz der Myonkammern (instrumentiertes Eisenjoch) zurückzuführen ist. Das mangelnde Verständnis der Effizienz wird aus dem in Abbildung 2.10 gegebenen Vergleich der Effizenz in Daten und simulierten Ereignissen deutlich. Die dort sichtbaren Abweichungen werden durch Anwendung der Korrekturen der Teilchenidentifikationseffizienz berücksichtigt. Wie bereits erwähnt kann der Fehler der Teilchenidentifikationseffizienz aus Abschnitt 5.5.5 die Diskrepanz zwischen Elektron-Tag und Myon-Tag jedoch nicht erklären. Offensichtlich ist die dort beschriebene Methode zur Abschätzung des systematischen Fehlers der einzelnen Effizienzen bzw. Korrekturfaktoren nicht ausreichend. Deshalb wird eine weitere systematische Unsicherheit angenommen und zwar die halbe Differenz des Verzweigungsverhältnisses $\mathcal{B}(\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau)$ zwischen Elektron-Tag und Myon-Tag (alle Datennahmeperioden):

$$\frac{\Delta\mathcal{B}}{\mathcal{B}}(\text{Tag-Lepton}) = 0{,}61\,\%.$$

Diese Unsicherheit ist quasi ein gewichteter Mittelwert für die Summe aller Datennahmeperioden und somit kleiner als die Differenzen zwischen den einzelnen Perioden. Es ist davon auszugehen, dass diese Unsicherheit für alle Zerfallskanäle gleichermaßen vorhanden ist. Der relative statistische Fehler ist im Fall von $\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ am kleinsten und somit tritt die Systematik in diesem Fall am deutlichsten zum Vorschein. Der relative systematische Fehler von 0,61 % wird deshalb auf alle untersuchten

Elektron-Tag und Myon-Tag				
Datennahme-periode	$\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ $\times 10^{-2}$	$\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ $\times 10^{-3}$	$\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ $\times 10^{-3}$	$\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ $\times 10^{-5}$
Run 1-5	$8{,}7705 \pm 0{,}0055$	$2{,}968 \pm 0{,}016$	$1{,}4624 \pm 0{,}0079$	$1{,}53 \pm 0{,}12$
Run 1	$8{,}622 \pm 0{,}022$	$2{,}891 \pm 0{,}059$	$1{,}471 \pm 0{,}031$	$0{,}53 \pm 0{,}47$
Run 2	$8{,}744 \pm 0{,}013$	$2{,}901 \pm 0{,}037$	$1{,}474 \pm 0{,}019$	$1{,}33 \pm 0{,}29$
Run 3	$8{,}700 \pm 0{,}018$	$2{,}871 \pm 0{,}049$	$1{,}432 \pm 0{,}025$	$1{,}79 \pm 0{,}40$
Run 4	$8{,}813 \pm 0{,}010$	$3{,}024 \pm 0{,}029$	$1{,}459 \pm 0{,}015$	$1{,}81 \pm 0{,}23$
Run 5	$8{,}794 \pm 0{,}009$	$2{,}994 \pm 0{,}026$	$1{,}466 \pm 0{,}013$	$1{,}52 \pm 0{,}20$

Elektron-Tag				
Datennahme-periode	$\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ $\times 10^{-2}$	$\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ $\times 10^{-3}$	$\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ $\times 10^{-3}$	$\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ $\times 10^{-5}$
Run 1-5	$8{,}814 \pm 0{,}007$	$2{,}996 \pm 0{,}021$	$1{,}481 \pm 0{,}010$	$1{,}43 \pm 0{,}15$
Run 1	$8{,}749 \pm 0{,}028$	$2{,}956 \pm 0{,}077$	$1{,}504 \pm 0{,}040$	$0{,}98 \pm 0{,}67$
Run 2	$8{,}827 \pm 0{,}017$	$2{,}912 \pm 0{,}046$	$1{,}480 \pm 0{,}023$	$1{,}35 \pm 0{,}36$
Run 3	$8{,}735 \pm 0{,}023$	$2{,}824 \pm 0{,}063$	$1{,}455 \pm 0{,}032$	$0{,}86 \pm 0{,}44$
Run 4	$8{,}805 \pm 0{,}014$	$3{,}065 \pm 0{,}039$	$1{,}494 \pm 0{,}019$	$1{,}78 \pm 0{,}29$
Run 5	$8{,}848 \pm 0{,}012$	$3{,}042 \pm 0{,}035$	$1{,}474 \pm 0{,}017$	$1{,}42 \pm 0{,}25$

Myon-Tag				
Datennahme-periode	$\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ $\times 10^{-2}$	$\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ $\times 10^{-3}$	$\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ $\times 10^{-3}$	$\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ $\times 10^{-5}$
Run 1-5	$8{,}708 \pm 0{,}009$	$2{,}925 \pm 0{,}025$	$1{,}434 \pm 0{,}013$	$1{,}70 \pm 0{,}20$
Run 1	$8{,}437 \pm 0{,}033$	$2{,}794 \pm 0{,}092$	$1{,}419 \pm 0{,}049$	$-0{,}20 \pm 0{,}60$
Run 2	$8{,}595 \pm 0{,}022$	$2{,}877 \pm 0{,}063$	$1{,}461 \pm 0{,}032$	$1{,}28 \pm 0{,}48$
Run 3	$8{,}650 \pm 0{,}028$	$2{,}943 \pm 0{,}079$	$1{,}394 \pm 0{,}040$	$3{,}37 \pm 0{,}80$
Run 4	$8{,}823 \pm 0{,}016$	$2{,}968 \pm 0{,}045$	$1{,}408 \pm 0{,}023$	$1{,}84 \pm 0{,}36$
Run 5	$8{,}721 \pm 0{,}014$	$2{,}928 \pm 0{,}040$	$1{,}455 \pm 0{,}020$	$1{,}68 \pm 0{,}33$

Tabelle 5.4: *Verzweigungsverhältnisse der Zerfallskanäle $\tau^- \to h^-h^+h^-\nu_\tau$ mit zugehörigen statistischen Fehlern. Zusätzlich angegeben sind die Werte bei einer Unterscheidung zwischen Elektron-Tag und Myon-Tag sowie bei einer Aufspaltung in die verschiedenen Datennahmeperioden.*

Zerfallskanäle übertragen (Tabelle 5.5).

Da diese Unsicherheit eindeutig den Myonen zugeordnet werden kann, ist die Abschätzung eines globalen systematischen Fehlers unbefriedigend. Alternativ könnte auch nur der Teil des Datensatzes mit Elektron-Tag betrachtet werden. Von besonderem Interesse sind allerdings gerade die Zerfallskanäle mit geringer Statistik ($\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$, $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$, $\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$). Die hier abgeschätzte Unsicherheit ist klein im Vergleich zu den statistischen Unsicherheiten dieser Zerfallskanäle (Tabelle 5.5), was das beschriebene Vorgehen rechtfertigt.

5.5.10 Systematiken beim Fit der ϕ-Resonanz

Die Bestimmung der Verzweigungsverhältnisse der Zerfallskanäle $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$ basiert auf den selektierten Datensätzen, die auch zur Bestimmung der Verzweigungsverhältnisse der Zerfälle $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ verwendet wurden. Deshalb werden die bisher diskutierten Unsicherheiten für diese übernommen. Nur im Fall der Signaleffizienz wird die Unsicherheit separat bestimmt. Die Kinematik der Zerfälle $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ (nichtresonant) ist auf Grund der ϕ-Resonanz leicht unterschiedlich. Die Signaleffizienzen sind somit leicht unterschiedlich. In Abschnitt 5.3 ist das daraus ersichtlich, dass die Migrationsmatrix der Zerfälle $\tau^- \to \phi h^-\nu_\tau$ nicht exakt mit der entsprechenden Submatrix der Migrationsmatrix für die Zerfälle vom Typ $\tau^- \to h^-h^+h^-\nu_\tau$ übereinstimmt. Neben den bereits behandelten systematischen Unsicherheiten treten in der Bestimmung der Verzweigungsverhältnisse $\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$ noch weitere auf. Die untersuchten Systematiken werden im Folgenden beschrieben.

Untergrund der Art $e^+e^- \to q\bar{q}$

Bei der Bestimmung der Anzahl der Ereignisse vom Typ $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$ in Kapitel 4 hat sich gezeigt, dass der Untergrund vom Typ $e^+e^- \to q\bar{q}$ resonant im Bereich der ϕ-Resonanz ist. Die Skalierung dieses Untergrunds wirkt sich somit stark auf die durch die Fits erhaltenen Anzahlen von Signalereignissen aus. Zur Abschätzung der Unsicherheit wird zunächst ein Datensatz mit hohem Anteil an Ereignissen vom Typ $e^+e^- \to q\bar{q}$ selektiert. In der Selektion von Ereignissen vom Typ $\tau^- \to h^-h^+h^-\nu_\tau$ (Kapitel 3) wird dazu die Bedingung an die invariante Masse der geladenen Hadronen $m(h^-h^+h^-)$ umgekehrt. Statt $m(h^-h^+h^-) < 1{,}85\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$ wird $m(h^-h^+h^-) > 1{,}85\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$ verlangt. Die Masse von τ-Leptonen liegt mit $m_\tau = 1{,}777\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$ [2] unterhalb dieser Schwelle, so dass der Datensatz sehr rein an Ereignissen vom Typ $e^+e^- \to q\bar{q}$ ist. Die Anzahl der Datenereignisse wird mit der Anzahl der simulierten Ereignisse vom Typ $e^+e^- \to q\bar{q}$ verglichen. Von den Datenereignissen wird vorher die Anzahl der anderen simulierten Ereignisse (fast ausschließlich $\tau^+\tau^-$-Ereignisse), welche deutlich besser verstanden sind, subtrahiert. Es ergibt sich:

$$\frac{\#(\text{Daten}) - \#(\text{nicht } \mathrm{e^+e^-} \to \mathrm{q\bar{q}}\ (\text{Simulation}))}{\#(\mathrm{e^+e^-} \to \mathrm{q\bar{q}}\ (\text{Simulation}))} = \frac{376 - 114}{130} \approx 2{,}0.$$

Bei Übereinstimmung zwischen Simulation und Daten wäre dieses Verhältnis eins. Zur Bestimmung der Unsicherheit der Verzweigungsverhältnisse der Zerfallskanäle $\tau^- \to$

$\phi\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$ wird in den Fits der Untergrund vom Typ $e^+e^- \to q\bar{q}$ mit diesem Faktor (2,0) skaliert. Die Unsicherheit wird durch die Differenz zwischen den daraus resultierenden und den ursprünglich gemessenen Verzweigungsverhältnissen abgeschätzt. Die relativen Fehler sind 14,1 % ($\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$) und 6,2 % ($\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$) (Tabelle 5.5).

Untergrund mit zusätzlichem π^0-Meson

Die in Kapitel 4 beschriebenen Fits der invarianten Massenverteilungen berücksichtigen nicht die Untergründe mit zusätzlichem neutralen Pion: $\tau^- \to \phi\pi^-\pi^0\nu_\tau$ und $\tau^- \to \phi K^-\pi^0\nu_\tau$. Die Anzahl der in den Fitresultaten enthaltenen Ereignisse dieser Arten wird wie folgt abgeschätzt:

Im Fall des Fits $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau$ (resonant) wird angenommen, dass der Anteil von Ereignissen mit zusätzlichem π^0-Meson ($\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\pi^0\nu_\tau$) der gleiche ist wie der Anteil von Ereignissen der Art $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\pi^0\nu_\tau$ (nichtresonant) an den selektierten Ereignissen vom Typ $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ (nichtresonant):

$$\frac{N(\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\pi^0\nu_\tau)}{N(\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau)} = \frac{N(\tau^- \to K^-K^+\pi^-\pi^0\nu_\tau)}{N(\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau)}.$$

Die entsprechende Anzahl wird aus der in Kapitel 4 bestimmten Anzahl $N(\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau) = 591$ und den Anzahlen simulierter Ereignisse abgeschätzt:

$$\begin{aligned} & N(\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\pi^0\nu_\tau) \\ &= N^{\text{Fit}}(\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau) \times \frac{N^{\text{Sim.}}(\tau^- \to K^-K^+\pi^-\pi^0\nu_\tau)}{N^{\text{Sim.}}(\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau)} \\ &= 591 \times \frac{313}{25080} \approx 7{,}4. \end{aligned}$$

Diese Anzahl dient als Abschätzung der Unsicherheit des Fit-Ergebnisses, die aus diesem Untergrund entspringt:

$$\Delta N(\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau) = N(\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\pi^0\nu_\tau) \approx 7{,}4.$$

Das Vorgehen im Fall von $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$ ist analog. Allerdings existiert für das Verzweigungsverhältnis $\tau^- \to K^-K^+K^-\pi^0\nu_\tau$ nur ein oberer Grenzwert: $\mathcal{B}(\tau^- \to K^-K^+K^-\pi^0\nu_\tau) < 4{,}8 \times 10^{-6}$ bei einem 90 %-Vertrauensbereich [2]. Das Verzweigungsverhältnis wird durch diesen Grenzwert abgeschätzt. Damit ergibt sich:

$$\Delta N(\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau) = N(\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\pi^0\nu_\tau) \approx 19{,}0.$$

Die aus diesen Unsicherheiten der Fitergebnisse (7,4 bzw. 19,0 Ereignisse) resultierenden relativen Unsicherheiten der Verzweigungsverhältnisse sind:

$$\frac{\Delta\mathcal{B}(\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau)}{\mathcal{B}(\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau)} = 0{,}5\,\%$$

und

$$\frac{\Delta\mathcal{B}(\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau)}{\mathcal{B}(\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau)} = 6{,}2\,\%.$$

Der Größenunterschied zwischen den beiden Unsicherheiten ist darauf zurückzuführen, dass für den Zerfallskanal $\tau^- \to K^-K^+K^-\pi^0\nu_\tau$ der obere Grenzwert verwendet wurde.

Auch im Fall der Bestimmung des Verzweigungsverhältnisses $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ ist kein Untergrund der Art $\tau^- \to K^-K^+K^-\pi^0\nu_\tau$ berücksichtigt. Deshalb wird der entsprechende relative Fehler von 6,2 % des Zerfalls $\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$ für diese Messung übernommen (Tabelle 5.5).

Verzweigungsverhältnis $\mathcal{B}(\phi \to K^+K^-)$

Direkt gemessen werden die Verzweigungsverhältnisse der Zerfallskanäle vom Typ $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$. Unter Verwendung des anderweitig gemessenen Verzweigungsverhältnisses $\mathcal{B}(\phi \to K^+K^-) = 0{,}492 \pm 0{,}006$ [2] werden daraus die Verzweigungsverhältnisse der Zerfallskanäle $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$ berechnet. Der relative Fehler $\frac{\Delta\mathcal{B}(\phi\to K^+K^-)}{\mathcal{B}(\phi\to K^+K^-)} = 1{,}22\,\%$ überträgt sich somit direkt auf die bestimmten Verzweigungsverhältnisse (Tabelle 5.5).

5.5.11 Resultate

In den letzten Abschnitten wurden die untersuchten systematischen Unsicherheiten diskutiert. Die Ergebnisse der Fehlerbetrachtung sind in Tabelle 5.5 zusammengefasst. Für jeden der dort angegebenen Zerfallskanäle wird angenommen, dass die aufgelisteten Fehler unkorreliert sind (im Gegensatz zur Korrelation zwischen den Zerfallskanälen). Der systematische Gesamtfehler ergibt sich also durch quadratische Addition der einzelnen Fehler. Die Kovarianzmatrizen, welche die Fehler zwischen den Zerfallskanälen beschreiben, werden dementsprechend (elementweise) linear addiert. Für die Zerfallskanäle der Art $\tau^- \to h^-h^+h^-\nu_\tau$ ergibt sich somit die Korrelationsmatrix der systematischen Fehler:

$$\rho^{\mathcal{B}}_{\text{syst.}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \pi\pi\pi & K\pi\pi & KK\pi & KKK \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0{,}282 & 0{,}889 & 0{,}332 \\ 0{,}282 & 1 & 0{,}383 & 0{,}704 \\ 0{,}889 & 0{,}383 & 1 & 0{,}423 \\ 0{,}332 & 0{,}704 & 0{,}423 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \pi\pi\pi \\ K\pi\pi \\ KK\pi \\ KKK \end{array} .$$

Korrelationsmatrizen der einzelnen Fehler sind, insofern sie nicht auf vollständig korrelierten oder unkorrelierten Fehlern basieren, in Anhang A angegeben. Die Korrelationsmatrix der statistischen Unsicherheiten, die in Abschnitt 5.4 bestimmt wurde, ist:

$$\rho^{\mathcal{B}}_{\text{stat.}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \pi\pi\pi & K\pi\pi & KK\pi & KKK \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -0{,}170 & 0{,}010 & -0{,}000 \\ -0{,}170 & 1 & -0{,}238 & 0{,}015 \\ 0{,}010 & -0{,}238 & 1 & -0{,}109 \\ -0{,}000 & 0{,}015 & -0{,}109 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \pi\pi\pi \\ K\pi\pi \\ KK\pi \\ KKK \end{array} .$$

Für die Zerfallskanäle der Art $\tau^- \to \phi h^-\nu_\tau$ ist die systematische Korrelationsmatrix:

$$\rho^{\mathcal{B}}_{\text{syst.}} = \begin{array}{cc} \phi\pi & \phi K \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0{,}630 \\ 0{,}630 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \phi\pi \\ \phi K \end{array} .$$

Die bereits in Abschnitt 5.4 bestimmte Korrelationsmatrix der statistischen Unsicherheit ist:

$$\rho^{\mathcal{B}}_{\text{stat.}} = \begin{array}{cc} \phi\pi & \phi K \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -0{,}212 \\ -0{,}212 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \phi\pi \\ \phi K \end{array} .$$

Tabelle 5.5: *Übersicht statistischer und systematischer Fehler. Alle angegebenen Fehler sind relative Fehler in [%] und beziehen sich auf das Verzweigungsverhältnis. Der gesamte systematische Fehler wurde durch quadratische Addition der einzelnen systematischen Unsicherheiten berechnet, die Beiträge werden also als voneinander unabhängig angenommen.*

	Abschn.	$\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$	$\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$	$\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$	$\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$	$\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$	$\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$
Verzweigungsverhältnis	5.3	$8{,}7705 \times 10^{-2}$	$2{,}97 \times 10^{-3}$	$1{,}4624 \times 10^{-3}$	$1{,}53 \times 10^{-5}$	$4{,}01 \times 10^{-5}$	$3{,}29 \times 10^{-5}$
Statistischer Fehler [%]	5.4	0,06	0,54	0,55	7,8	12,8	7,7
Systematischer Fehler (ges.) [%]	5.5.11	2,11	6,55	1,68	8,2	14,3	10,3
Luminosität	5.5.1	0,81	0,75	0,66	0,68	0,66*	0,68*
$\sigma_{\tau^+\tau^-}$	5.5.2	0,40	0,37	0,33	0,33	0,33*	0,33*
Untergrund-Normierungen	5.5.3	0,23	1,37	0,46	0,21	0,46*	0,21*
Spurrekonstruktion	5.5.4	1,36	1,26	1,12	1,22	1,12*	1,22*
Teilchenidentifikation (stat.)	5.5.5	0,24	5,36	0,42	4,92	0,42*	4,92*
Teilchenidentifikation (syst.)	Anhang B	0,10	2,86	0,02	0,44	0,02*	0,44*
Signaleffizienz	5.5.6	0,05	0,15	0,10	0,19	0,10	0,22
Untergrundeffizienz	5.5.7	0,03	0,17	0,05	1,38	0,05*	1,38*
Schnitte der Ereignisselektion	5.5.8	1,15	1,14	0,50	1,04	0,50*	1,04*
Tag-Lepton	5.5.9	0,61	0,61	0,61	0,61	0,61*	0,61*
$q\bar{q}$-Untergrund	5.5.10					14,1	6,2
π^0-Untergrund	5.5.10				6,2**	0,5	6,2
$\mathcal{B}(\phi \to K^+K^-)$	5.5.10					1,22	1,22

$\star$: Diese Unsicherheiten im Fall von $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$ bzw. $\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$ wurden von den Zerfallskanälen $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ bzw. $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ übernommen.

$\star\star$: Die Unsicherheit wurde vom Zerfallskanal $\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$ übernommen.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden Zerfälle von τ-Leptonen mit drei geladenen Hadronen im Endzustand untersucht und die Verzweigungsverhältnisse der einzelnen Zerfallskanäle bestimmt. Zur Bestimmung der Verzweigungsverhältnisse wurde der bis Ende 2006 mit dem *BaBar*-Detektor aufgezeichnete Datensatz verwendet, welcher einer integrierten Luminosität von $\mathcal{L} = 384\,\mathrm{fb}^{-1}$ oder etwa 353 Millionen erzeugten $\tau^+\tau^-$-Paaren entspricht.

Die untersuchten Zerfälle der Art $\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$, $\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$, $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ treten gegenseitig als Untergrund auf, weshalb die Verzweigungsverhältnisse gemeinsam unter Berücksichtigung der Migrationen bestimmt wurden. Bei der Abschätzung der Unsicherheiten wurden die damit verbundenen Korrelationen besonders berücksichtigt und bestimmt. Durch Zusammenfügen aller Messungen von Zerfällen mit Netto-Strangeness kann das CKM-Matrixelement $|V_{\mathrm{us}}|$ bestimmt werden (Abschnitt 1.2.2). Dafür ist ein gutes Verständnis der Korrelationen unumgänglich. Korrelationsmatrizen der in dieser Arbeit beschriebenen Messungen sind in Abschnitt 5.5.11 aufgeführt. Die Messung der Verzweigungsverhältnisse ergab die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau) &= (8{,}77 \ \pm 0{,}01_{\mathrm{stat.}} \ \pm 0{,}19_{\mathrm{syst.}} \ ) \times 10^{-2}, \\
\mathcal{B}(\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau) &= (2{,}97 \ \pm 0{,}02_{\mathrm{stat.}} \ \pm 0{,}19_{\mathrm{syst.}} \ ) \times 10^{-3}, \\
\mathcal{B}(\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau) &= (1{,}462 \pm 0{,}008_{\mathrm{stat.}} \pm 0{,}025_{\mathrm{syst.}}) \times 10^{-3}, \\
\mathcal{B}(\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau) &= (1{,}53 \ \pm 0{,}12_{\mathrm{stat.}} \ \pm 0{,}13_{\mathrm{syst.}} \ ) \times 10^{-5}.
\end{aligned}$$

Im Bereich der Masse des K^0_S-Mesons, das für die Zerfallskanäle mit zwei und drei geladenen Pionen im Endzustand als Zwischenzustand auftreten kann, ist jeweils ein Massenfenster ausgeschlossen („K^0_S-Veto“).

Für die τ-Zerfälle mit zwei und drei geladenen Kaonen im Endzustand wurden zusätzlich die Zerfallskanäle untersucht, in welchen die ϕ-Resonanz auftritt. Dazu wurden die gemessenen Verteilungen der invarianten Masse des K^+K^--Paars mit Signal- und Untergrundkomponenten, die aus der Simulation gewonnen wurden, angepasst. Nach einer Validierung der Fitprozedur anhand von Spielzeugdaten wurde das Modell mit der erweiterten „unbinned“ Maximum-Likelihood-Methode an die Daten angepasst. Aus den so bestimmten Ereignisanzahlen wurden die folgenden Verzweigungsverhältnisse ermittelt:

$$\mathcal{B}(\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau) = (4{,}01 \pm 0{,}51_{\text{stat.}} \pm 0{,}57_{\text{syst.}}) \times 10^{-5},$$
$$\mathcal{B}(\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau) = (3{,}29 \pm 0{,}25_{\text{stat.}} \pm 0{,}34_{\text{syst.}}) \times 10^{-5}.$$

Ein Vergleich mit früheren Messungen ist in Abbildung 6.1 gegeben. In allen Fällen stimmt die Messung gut mit den Ergebnissen anderer Experimente und den Weltmittelwerten überein. Die gemessenen Verzweigungsverhältnisse der Zerfälle $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$ sind kompatibel mit den experimentell bestimmten oberen Grenzen. Die Messungen, welche mit „BABAR 2007“ bezeichnet und in [7] näher beschrieben sind, basieren auf demselben Datensatz wie die vorliegende Arbeit. Die vorgestellte Analyse stellt eine davon unabhängige Auswertung des *BaBar*-Datensatzes dar. Da die Messungen auf demselben Datensatz basieren, sind die meisten Unsicherheiten korreliert. Die Abschätzung der Unsicherheiten basiert jedoch zum Teil auf unterschiedlichen Methoden und kann somit zu unterschiedlichen Resultaten führen. Von den untersuchten Fehlern (Tabelle 5.5) können zwei als weitgehend unkorreliert zwischen den Analysen angenommen werden. Dies ist zum einen die systematische Komponente der Unsicherheit der Teilchenidentifikation und zum anderen die Unsicherheit durch die Schnitte der Ereignisselektion. Im Fall des Kanals $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ beträgt die relative Abweichung zwischen der Messung „BABAR 2007“ und dem Ergebnis der vorliegenden Arbeit 7,9 %. Sie kann nicht durch die untersuchten Unsicherheiten erklärt werden und erfordert einen expliziten Vergleich der Analysen. Die dominante Unsicherheit im Fall des Kanals $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$ ist auf die schlechte Beschreibung der Untergründe $e^+e^- \to q\bar{q}$ zurückzuführen. Sie ist eine Erklärung dafür, dass die Werte der *BaBar*-Analysen nicht exakt übereinstimmen, da das Ergebnis stark von der Anzahl der nach der Selektion verbliebenen Untergrundereignisse dieser Art abhängt. Für alle anderen Messungen ist eine Übereinstimmung im Rahmen der genannten unkorrelierten Fehler gegeben.

Neben den genannten Verzweigungsverhältnissen wurde in dieser Arbeit der Anteil des Zerfalls $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ bestimmt, welcher nicht die ϕ-Resonanz als Zwischenzustand enthält. Die Messung ist kompatibel damit, dass der Zerfall vollständig über die ϕ-Resonanz erfolgt. Der berechnete Wert für die obere Grenze beträgt

$$\mathcal{A}(\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau, \text{nichtresonant}) < 2{,}80\,\%$$

bei einem 90 %-Vertrauensbereich und stellt die stärkste bisher gemessene Einschränkung an diesen Anteil dar.

Eine gleichzeitige Bestimmung des CKM-Matrixelements $|V_{\text{us}}|$ und der Strangequark-Masse m_{s} kann mit Hilfe der Spektren der invarianten Massen hadronischer Endzustände von τ-Zerfällen mit Netto-Strangeness erfolgen (Abschnitt 1.2.2). In Abbildung 6.2 sind die Spektren der in dieser Arbeit untersuchten Zerfallskanäle gezeigt. Alle in dieser Arbeit diskutierten Korrekturen wurden angewendet. Die Zerfälle $\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ besitzen Endzustände mit Netto-Strangeness. Aus den gezeigten Verteilungen ist ersichtlich, dass die Beschreibung der Daten durch simulierte Ereignisse schlecht ist. Zur Bestimmung der in Abschnitt 1.2.2 beschriebenen Momente $R^{kl}_{\tau,\text{S}}$ muss der verbliebene Untergrund subtrahiert werden, was aber aufgrund der schlechten Übereinstimmung zwischen Daten und Simulation schwierig ist. Folglich sind noch weitere Betrachtungen nötig. Dies ist jedoch nicht Ziel der vorgestellten Arbeit.

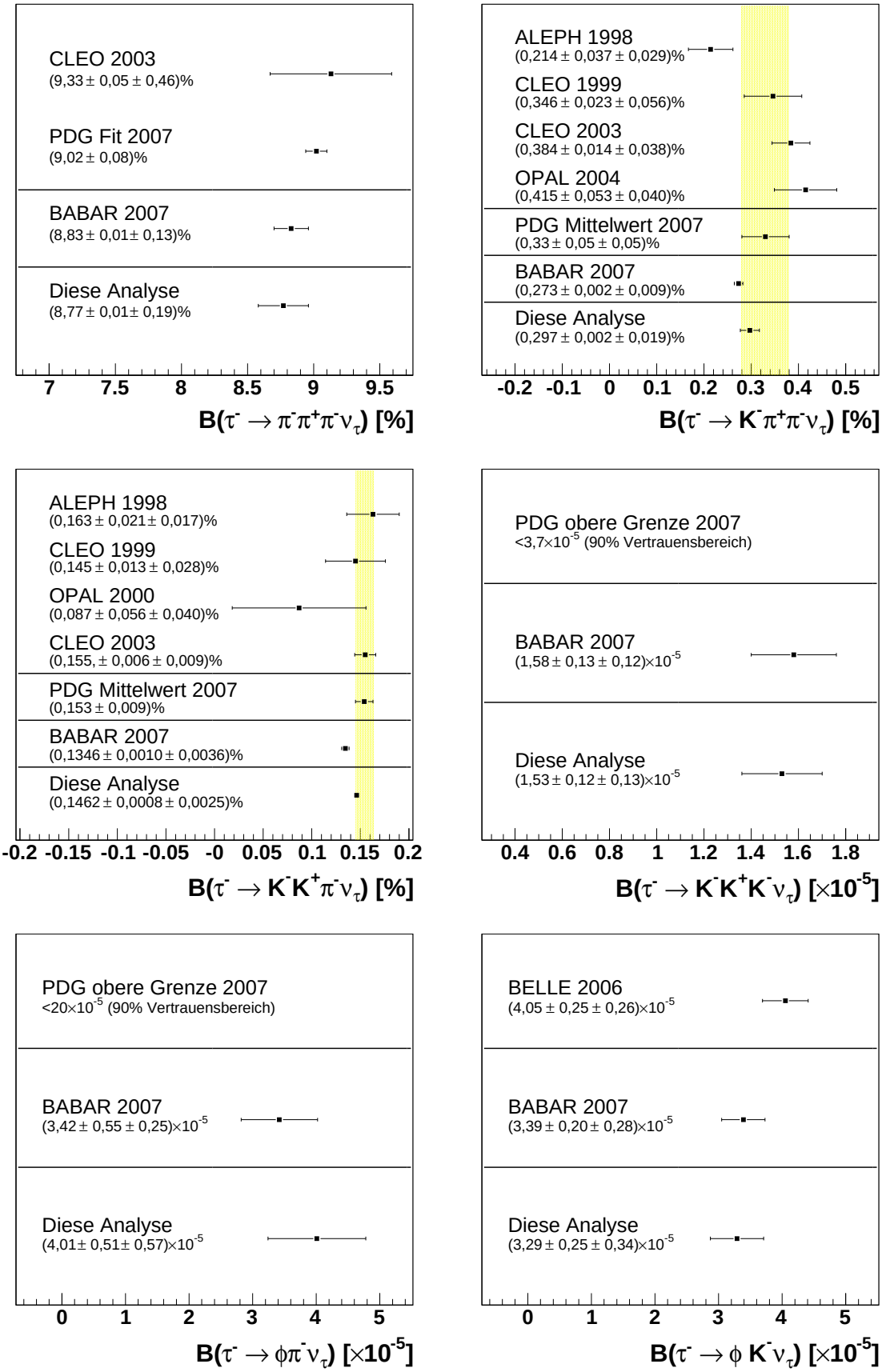
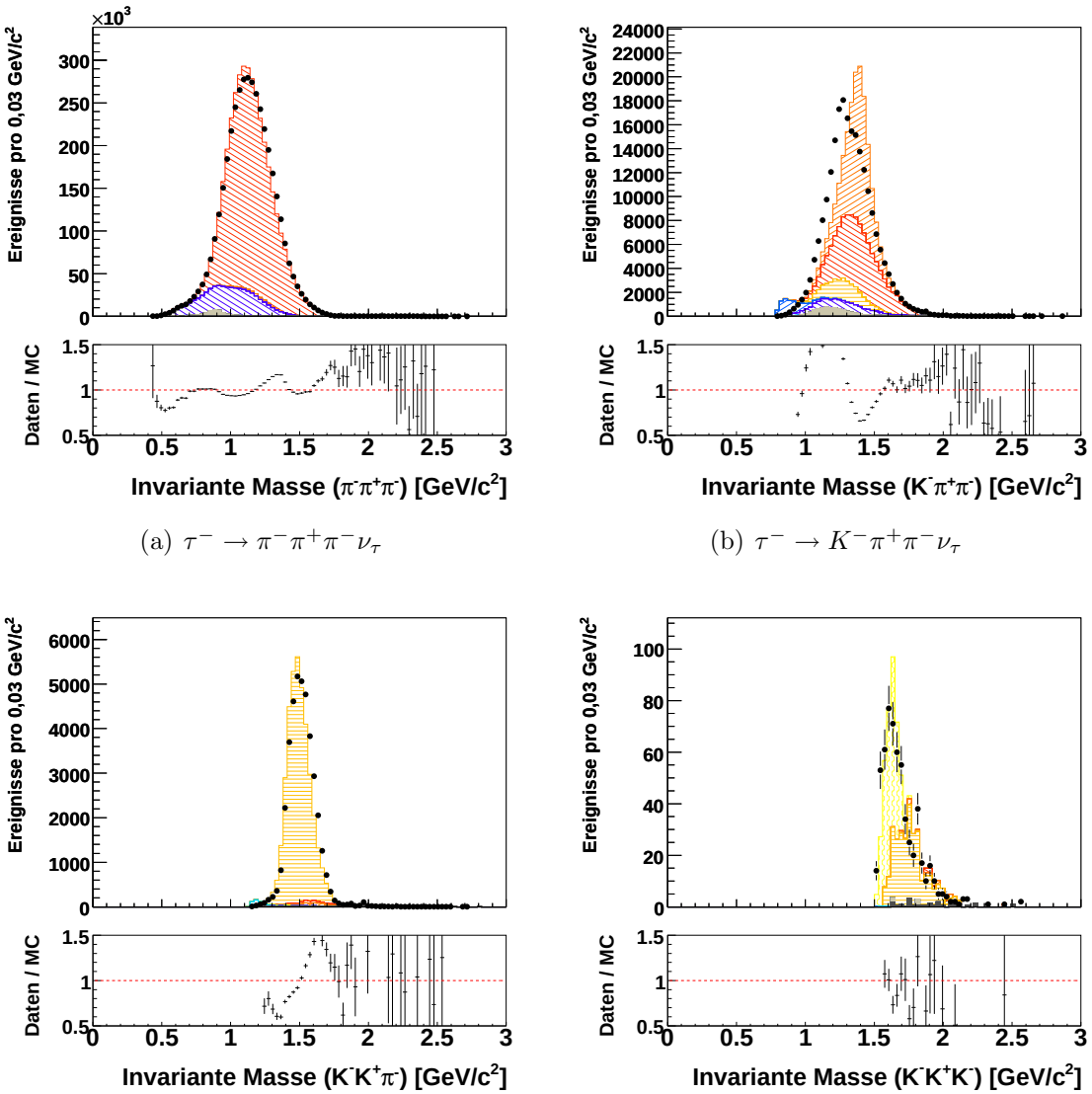


Abbildung 6.1: *Vergleich der Ergebnisse dieser Arbeit mit anderen Messungen. Die Messungen, welche mit „BABAR 2007“ bezeichnet sind, stammen aus [7]. Alle anderen Vergleichsmessungen sowie Fit- und Mittelwerte sind [52] entnommen. Mittelwerte werden, soweit vorhanden, durch ein gelbes Band hervorgehoben. Bei den Kanälen* $\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ *und* $\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ *ist in allen Fällen der Kanal mit einem* K^0_S*-Meson als Zwischenzustand ausgeschlossen.*



(a) $\tau^- \to \pi^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ (b) $\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$

(c) $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ (d) $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$

Abbildung 6.2: *Spektren der invarianten Masse $m(h^-h^+h^-)$ der Hadronen aus Zerfällen vom Typ $\tau^- \to h^-h^+h^-\nu_\tau$. Nicht angewendet ist der Schnitt bei $m(h^-h^+h^-) = 1{,}85\,\frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2}$.*

Anhang A

Korrelationsmatrizen

Im Folgenden sind Korrelationsmatrizen zu einzelnen systematischen Fehlern aufgelistet. Nicht aufgelistet sind alle Korrelationsmatrizen von Fehlern, die vollständig korreliert oder unkorreliert sind (siehe Abschnitt 5.5). Im ersten Fall sind alle Matrixelemente 1, im letzten ist die Matrix die Einheitsmatrix.

Normierung der Untergründe

$$\rho^{\mathcal{B}}_{\text{Untergr. Norm.}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \pi\pi\pi & K\pi\pi & KK\pi & KKK \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -0{,}010 & 0{,}002 & -0{,}000 \\ -0{,}010 & 1 & -0{,}032 & 0{,}012 \\ 0{,}002 & -0{,}032 & 1 & -1{,}000 \\ -0{,}000 & 0{,}012 & -1{,}000 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \pi\pi\pi \\ K\pi\pi \\ KK\pi \\ KKK \end{array}$$

Effizienzen der Teilchenidentifikation

$$\rho^{\mathcal{B}}_{\text{PID}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \pi\pi\pi & K\pi\pi & KK\pi & KKK \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -0{,}200 & 0{,}254 & -0{,}146 \\ -0{,}200 & 1 & 0{,}560 & 0{,}784 \\ 0{,}254 & 0{,}560 & 1 & 0{,}515 \\ -0{,}146 & 0{,}784 & 0{,}515 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \pi\pi\pi \\ K\pi\pi \\ KK\pi \\ KKK \end{array}$$

Signaleffizienzen $\tau^- \to h^- h^+ h^- \nu_\tau$

$$\rho^{\mathcal{B}}_{\text{Signaleff.}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \pi\pi\pi & K\pi\pi & KK\pi & KKK \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -0{,}005 & 0{,}016 & -0{,}008 \\ -0{,}005 & 1 & -0{,}031 & 0{,}002 \\ 0{,}016 & -0{,}031 & 1 & -0{,}021 \\ -0{,}008 & 0{,}002 & -0{,}021 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \pi\pi\pi \\ K\pi\pi \\ KK\pi \\ KKK \end{array}$$

Signaleffizienzen $\tau^- \to \phi h^- \nu_\tau$

$$\rho^{\mathcal{B}}_{\text{Signaleff.}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \phi\pi & \phi K \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -0{,}008 \\ -0{,}008 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \phi\pi \\ \phi K \end{array} \end{array}$$

Untergrundeffizienzen

$$\rho^{\mathcal{B}}_{\text{Untergr.Eff.}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \pi\pi\pi & K\pi\pi & KK\pi & KKK \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -0{,}180 & 0{,}0186 & 0{,}007 \\ -0{,}180 & 1 & -0{,}110 & 0{,}006 \\ 0{,}019 & -0{,}110 & 1 & -0{,}128 \\ 0{,}007 & 0{,}006 & -0{,}128 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \pi\pi\pi \\ K\pi\pi \\ KK\pi \\ KKK \end{array} \end{array}$$

Anhang B

Korrekturen der Teilchenidentifikationseffizienz

In Abschnitt 2.3 sind die Kriterien der Teilchenidentifikation bei *BaBar* beschrieben. Dort ist auch erwähnt, dass die Effizienzen der Teilchenidentifikation unterschiedlich für Daten und simulierte Ereignisse sind. Deshalb müssen die simulierten Ereignisse korrigiert werden, wenn bei der Selektion ausgenutzt wird, dass ein Teilchen gewisse Teilchenidentifikationskriterien (z.B. die für Kaonen) erfüllt. Für jedes identifizierte Teilchen ist eine Korrektur der Art

$$\eta_{\mathrm{PID}} = \frac{\varepsilon^{\mathrm{Daten}}}{\varepsilon^{\mathrm{Simulation}}}$$

erforderlich, wobei $\varepsilon^{\mathrm{Daten}}$ und $\varepsilon^{\mathrm{Simulation}}$ die Effizienzen sind, welche aus Kontrolldatensätzen bestimmt werden (Abschnitt 2.3.3). Wird ausgenutzt, dass ein Teilchen gewisse Teilchenidentifikationskriterien explizit nicht erfüllt, so sind Korrekturen der Form

$$\eta_{\mathrm{PID}}^{\mathrm{Veto}} = \frac{1 - \varepsilon^{\mathrm{Daten}}}{1 - \varepsilon^{\mathrm{Simulation}}}$$

nötig. Werte für η_{PID}, $\varepsilon^{\mathrm{Daten}}$ und $\varepsilon^{\mathrm{Simulation}}$ werden von der *BaBar*-Kollaboration zur Verfügung gestellt [24]. Sie werden in Form von Tabellen, d.h. „gebinnt“, in Abhängigkeit von den folgenden Teilcheneigenschaften angegeben:

1. rekonstruierter Teilchentyp
2. wahrer Teilchentyp
3. Ladung
4. Impuls
5. Polarwinkel
6. Azimutalwinkel
7. Datennahmeperiode.

Die Bestimmung der Effizienzen funktioniert nicht in allen Bereichen dieser Eigenschaften gleich gut, was z.B. daran liegt, dass die Statistik in einigen Bereichen klein ist. Deshalb wird zu jedem Korrekturwert η_{PID} ein Status angegeben. In Tabelle B.1 sind die verschiedenen Möglichkeiten aufgelistet.

Tabelle B.1: *Übersicht über die möglichen Stati der Korrekturen η_{PID} der Teilchenidentifikationseffizienz [51].*

Status	Wert	Bedeutung
In Ordnung	-1	Alles in Ordnung.
Symmetrisierter Fehler	-2	$\varepsilon^{\mathrm{Daten}}$ und/oder $\varepsilon^{\mathrm{Simulation}}$ sind nahe 0 oder 1, so dass ihre Fehler asymmetrisch sind. Der Fehler auf η_{PID} wurde symmetrisiert.
Extrapolation	-3	$\varepsilon^{\mathrm{Simulation}} = 0$. Die obere Grenze ist kompatibel mit $\varepsilon^{\mathrm{Simulation}}$ bei niedrigeren Impulsen. η_{PID} und Fehler wurden extrapoliert.
Unterer Grenzwert	-4	$\varepsilon^{\mathrm{Simulation}} = 0$. Die obere Grenze ist *nicht* kompatibel mit $\varepsilon^{\mathrm{Simulation}}$ bei niedrigeren Impulsen. η_{PID} wird durch eine untere Grenze abgeschätzt, der Fehler ist bedeutungslos.
Zu geringe Statistik	-5	Weniger als 10 Einträge im Kontrolldatensatz. Es wurde (willkürlich) $\eta_{\mathrm{PID}} = 1$ und $\Delta\eta_{\mathrm{PID}} = 1000$ gesetzt.
„Null durch Null“	-6	$\varepsilon^{\mathrm{Daten}} = 0$ und $\varepsilon^{\mathrm{Simulation}} = 0$. Es wurde (willkürlich) $\eta_{\mathrm{PID}} = 1$ und $\Delta\eta_{\mathrm{PID}} = 1000$ gesetzt.

Eine Verwendung von Korrekturen mit Statuswerten -4, -5 oder -6 nach Tabelle B.1 ist nicht sinnvoll und wird auch nicht empfohlen [24]. Sie werden in dieser Arbeit nicht verwendet. Allerdings trifft ein solcher Status in etwa 10 % der Fälle zu. Da nicht anzunehmen ist, dass die „wahren“ Korrekturwerte in diesen Bereichen 1 betragen, müssen Werte dafür abgeschätzt werden. In der gewählten Vorgehensweise werden dazu gewichtete Mittelwerte verwendet, die aus Korrekturwerten mit „gutem“ Status -1, -2 und -3 (Tabelle B.1) gewonnen wurden. Die Mittelwertbildung erfolgt gemäß folgender Punkte:

- Unterschieden wird zwischen rekonstruiertem und wahrem Teilchentyp sowie der Ladung (Punkt 1 bis 3). Über diese Eigenschaften wird also nicht gemittelt.

- Hingegen werden bezüglich Impuls, Winkel und Datennahmeperiode (Punkt 4 bis 7) die Mittelwerte gebildet.

- Tritt bei mehreren Teilchen dasselbe Gewicht auf (d.h. dasselbe Bin), so wird es jedesmal berücksichtigt.
- Auch von den Korrekturwerten mit Status -1, -2 und -3 werden nur die mit relativem Fehler $\frac{\Delta\eta_{\mathrm{PID}}}{\eta_{\mathrm{PID}}} < 100\,\%$ verwendet.

Für ein Teilchen, das in einen Bereich mit „schlechtem“ Status (-4, -5 oder -6) fällt, wird also entsprechend seiner Eigenschaften gemäß Punkt 1, 2 und 3 der entsprechende Mittelwert der „guten“ Gewichte verwendet. Der Fehler wird durch die mittlere quadratische Abweichung der zu Grunde liegenden Verteilung abgeschätzt. Er wird für die in Abschnitt 5.5.5 beschriebene Variation verwendet. Ist $\frac{\Delta\eta_{\mathrm{PID}}}{\eta_{\mathrm{PID}}} > 100\,\%$, so wird wie bei Teilchen mit „schlechtem“ Status verfahren.

Das Vorgehen für die Korrekturen $\eta_{\mathrm{PID}}^{\mathrm{Veto}}$ ist dasselbe wie für η_{PID}. Der einzige Unterschied besteht darin, dass in diesem Fall keine gesonderte Statusinformation zur Verfügung steht. Deshalb wird auf die entsprechende Information der η_{PID} zurückgegriffen.

Für die Fälle „Pion wurde als Kaon missidentifiziert“ stehen spezielle Korrekturwerte zur Verfügung. Diese Korrekturen wurden über die Datennahmeperioden und die Ladung gemittelt. Korrekturen mit unphysikalisch hohen Werten (bis zu $\eta_{\mathrm{PID}} = 90$ tritt auf) wurden durch interpolierte ersetzt. Eine detaillierte Beschreibung der letzten beiden Schritte findet sich in [30]. Diese speziellen Korrekturen werden in der vorliegenden Analyse verwendet. Allerdings haben die Korrekturwerte, welche interpoliert wurden, in der Regel keinen „guten“ Status, so dass sie in dieser Analyse nicht eingehen, da ohnehin die Mittelwerte der „guten“ Korrekturen verwendet werden.

Es stellt sich die Frage, wie Werte η_{PID} und $\eta_{\mathrm{PID}}^{\mathrm{Veto}}$, die nach Punkt 1 bis 7 auf denselben Effizienzen $\varepsilon^{\mathrm{Daten}}$ und $\varepsilon^{\mathrm{Simulation}}$ basieren, zu variieren sind. Genau genommen müssten nicht η_{PID} und $\eta_{\mathrm{PID}}^{\mathrm{Veto}}$, sondern $\varepsilon^{\mathrm{Daten}}$ und $\varepsilon^{\mathrm{Simulation}}$ variiert werden und zwar unabhängig, da sie auf unterschiedlichen Datensätzen basieren. Dies ist technisch nicht ohne weiteres möglich. Deshalb werden η_{PID} und $\eta_{\mathrm{PID}}^{\mathrm{Veto}}$ unabhängig voneinander variiert. Da in erster Näherung $\eta_{\mathrm{PID}}^{\mathrm{Veto}} \approx 1$ und $\frac{\Delta\eta_{\mathrm{PID}}^{\mathrm{Veto}}}{\eta_{\mathrm{PID}}^{\mathrm{Veto}}} \approx 0$ gilt, ist der dadurch entstehende Fehler klein.

Im Gegensatz dazu ist die Unsicherheit, welche durch die Wahl des oben beschriebenen Mittelungsverfahrens entsteht, nicht zu vernachlässigen. Um einen entsprechenden Fehler abzuschätzen, werden die Verzweigungsverhältnisse berechnet, indem für jedes Teilchen die vorgegebenen Korrekturwerte, also auch die mit „schlechtem“ Status (-4, -5, -6) verwendet werden. Die Differenz der Ergebnisse der beiden Methoden wird als Abschätzung für den systematischen Fehler verwendet. Entsprechende Werte sind in Tabelle 5.5 aufgeführt, sie werden als unkorreliert angenommen. Die Unsicherheit ist vor allem für den Zerfallskanal $\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau$ groß. Dies liegt daran, dass der Untergrundanteil, in welchem Pionen als Kaonen missidentifiziert wurden, groß ist. Gerade in diesen Fällen kommen viele Korrekturen mit „schlechtem“ Status vor, weshalb sich deren unterschiedliche Behandlung besonders stark auf das Ergebnis auswirkt.

Anhang C

Parameter der Fit-Funktionen

Tabelle C.1: *Parameter der in Abschnitt 4.1 definierten Funktionen zum Fit der der Verteilung $m(K^+K^-)$ im Zerfallskanal$\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau$. Nicht aufgeführt sind die Normierungskonstanten $C_{\phi\pi}$, $C_{\text{nichtres.}}$, $C_{q\bar{q}}$ und C_{Rest}, die von dem RooFit-Paket intern automatisch so bestimmt werden, dass die entsprechenden Funktionen auf* 1 *normiert sind.*

Parameter	Wert
$N_{q\bar{q}}$	88 ± 9
N_{Rest}	635 ± 25
$\star\ m_\phi$	$(1019{,}460 \pm 0{,}019)\ \frac{\text{MeV}}{\text{c}^2}$
$\star\ \Gamma_\phi$	$(4{,}26 \pm 0{,}05)\ \frac{\text{MeV}}{\text{c}^2}$
σ_1	$(0{,}00101 \pm 0{,}00029)\ \frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}$
σ_2	$(0{,}00002 \pm 0{,}00500)\ \frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}$
a_1	$(-71{,}809 \pm 0{,}083)\ \left(\frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}\right)^{-1}$
a_2	$(135{,}01 \pm 0{,}12)\ \left(\frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}\right)^{-2}$
a_3	$(-64{,}112 \pm 0{,}082)\ \left(\frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}\right)^{-3}$
g_1	$0{,}747 \pm 0{,}065$
g_2	$0{,}253 \pm 0{,}065$
b_1	$(130 \pm 350)\ \left(\frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}\right)^{-1}$
c_1	$(600 \pm 420)\ \left(\frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}\right)^{-1}$
c_2	$(0{,}9954 \pm 0{,}0011)\ \frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}$
d_0	$148{,}8 \pm 3{,}1$
d_1	$(-118{,}3 \pm 3{,}8)\ \left(\frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}\right)^{-1}$
d_2	$(-174{,}5 \pm 3{,}6)\ \left(\frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}\right)^{-2}$
d_3	$(145{,}6 \pm 2{,}5)\ \left(\frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}\right)^{-3}$

$\star$ Die Werte m_ϕ und Γ_ϕ wurden [2] entnommen.

Tabelle C.2: *Parameter der in Abschnitt 4.2 definierten Funktionen zum Fit der der Verteilung $m(K^+K^-)$ im Zerfallskanal$\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$. Nicht aufgeführt sind die Normierungskonstanten $C_{\phi K}$, $C_{\text{komb.}}$, $C_{\text{nichtres.}}$ und C_{Rest}, die von dem RooFit-Paket intern automatisch so bestimmt werden, dass die entsprechenden Funktionen auf* 1 *normiert sind.*

Parameter	Wert
N_{Rest}	120 ± 10.9524
$\star\ m_\phi$	$(1019{,}460 \pm 0{,}019)\ \frac{\text{MeV}}{\text{c}^2}$
$\star\ \Gamma_\phi$	$(4{,}26 \pm 0{,}05)\ \frac{\text{MeV}}{\text{c}^2}$
σ_3	$(0{,}00111 \pm 0{,}00038)\ \frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}$
p_1	$(91 \pm 15)\ \left(\frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}\right)^{-1}$
p_2	$(1{,}007 \pm 0{,}039)\ \frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}$
q_0	$-455{,}8 \pm 1{,}0$
q_1	$(454{,}6 \pm 1{,}0)\ \left(\frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}\right)^{-1}$
q_2	$(200{,}4 \pm 1{,}0)\ \left(\frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}\right)^{-2}$
q_3	$(-14{,}7 \pm 1{,}0)\ \left(\frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}\right)^{-3}$
q_4	$(-183{,}9 \pm 1{,}0)\ \left(\frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}\right)^{-4}$
r_1	$(750 \pm 170)\ \left(\frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}\right)^{-1}$
r_2	$(0{,}99468 \pm 0{,}00048)\ \frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}$
s_0	$822{,}9 \pm 7{,}2$
s_1	$(-787{,}1 \pm 7{,}0)\ \left(\frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}\right)^{-1}$
s_2	$(-684{,}1 \pm 6{,}6)\ \left(\frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}\right)^{-2}$
s_3	$(655{,}9 \pm 6{,}0)\ \left(\frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}\right)^{-3}$
t_1	$0{,}135 \pm 0{,}053$
u_1	$(1650 \pm 450)\ \left(\frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}\right)^{-1}$
u_2	$(0{,}994 \pm 0{,}013)\ \frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}$
w_0	$-1{,}126 \pm 0{,}028$
w_1	$(1{,}154 \pm 0{,}029)\ \left(\frac{\text{GeV}}{\text{c}^2}\right)^{-1}$

$\star$ Die Werte m_ϕ und Γ_ϕ wurden [2] entnommen.

Abbildungsverzeichnis

1.1 Feynmangraph $s \to u$ 5
1.2 Feynmangraph semileptonischer Kaonzerfälle 6
1.3 Feynmangraphen τ-Zerfälle: hadronisch vs. leptonisch 7

2.1 PEP-II-Beschleuniger. 10
2.2 BABAR-Detektor (Längsschnitt). 11
2.3 Siliziumvertexdetektor (Querschnitt). 12
2.4 Driftkammer (Längs- und Querschnitt). 12
2.5 Prinzip des Čerenkov-Detektors (DIRC). 13
2.6 Elektromagnetisches Kalorimeter (Längsschntt) 14
2.7 Instrumentiertes Eisenjoch. 15
2.8 Energieverlustmessung dE/dx. 16
2.9 Čerenkov-Winkel gegen Teilchenimpuls im Laborsystem. 17
2.10 Teilchenidentifikationseffizienzen. 20

3.1 Graphische Veranschaulichung von $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$ und $e^+e^- \to B\bar{B}$. . . 25
3.2 Veranschaulichung des Thrust und der Definition der Hemisphären. . . 26
3.3 Feynmangraphen radiativer Bhabha- und Myonpaar-Ereignisse. 29
3.4 Verteilungen des Leptonenimpuls und der fehlenden invarianten Masse. 30
3.5 Feynmangraph eines Zwei-Photonen-Ereignisses. 32
3.6 Verteilungen der Akolinearität. 33
3.7 Verteilungen der Energiesumme neutraler Teilchen. 35
3.8 Verteilung des Thrustes. 36
3.9 Čerenkov-Winkel gegen Kaonimpuls im Laborsystem. 38
3.10 Impulsverteilungen der geladenen Hadronen im Schwerpunktsystem. . . 40

4.1 Feynmangraphen der Zerfälle $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$ und $\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$. 41
4.2 Verteilung von $m(K^+K^-)$ der Zerfälle $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$. 43
4.3 Fit $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$: Angepasste Signal- und Untergrundfunktionen. 47
4.4 Spielzeugdaten und Pull-Verteilungen $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)\pi^-\nu_\tau$. 48
4.5 Verteilung von $m(K^+K^-)$ in $\tau^- \to K^-K^+\pi^-\nu_\tau$ und Fitergebnis. . . . 49
4.6 Verteilung von $m(K^+K^-)$ der Zerfälle $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$. 50
4.7 Fit $\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$: Angepasste Signal- und Untergrundfunktionen. . . . 53
4.8 Spielzeugdaten $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$. 54
4.9 Pull-Verteilungen zum Fit der ϕ-Resonanz in $\tau^- \to \phi(\to K^-K^+)K^-\nu_\tau$. 55
4.10 Verteilung von $m(K^+K^-)$ in $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$ und Fitergebnis. . . 56
4.11 Verteilungen $m_1(K^+K^-)$ vs. $m_2(K^+K^-)$ von $\tau^- \to K^-K^+K^-\nu_\tau$. . . . 58

5.1 Schema zur Variation der Migrationsmatrix. 76
5.2 Veranschaulichung der Variation der Schnitte 79

6.1 Ergebnisübersicht und Vergleich mit anderen Messungen. 89
6.2 Spektren der invariante Masse $m(h^-h^+h^-)$. 90

Tabellenverzeichnis

1.1 Die Eichbosonen des Standardmodells. 4
1.2 Übersicht der Quarks und Leptonen. 4

2.1 Integrierte Luminositäten der Datenahmeperioden. 21
2.2 Wirkungsquerschnitte und Anzahlen simulierter Ereignisse. 22
2.3 Anzahlen separat simulierter τ-Zerfälle 22

3.1 Kriterien der Vorselektion. 25
3.2 Übersicht der Selektionskriterien von $\tau^- \to h^- h^+ h^- \nu_\tau$-Ereignissen. . . . 37

5.1 Statistische Fehler $\tau^- \to \phi h^- \nu_\tau$. 71
5.2 Fehler der Korrekturen der Spurrekonstruktionseffizienz. 74
5.3 Variation der Schnitte. 79
5.4 Statistische Fehler und Laufzeitübersicht $\mathcal{B}(\tau^- \to h^- h^+ h^- \nu_\tau)$ 81
5.5 Übersicht statistischer und systematischer Fehler. 86

B.1 Statusübersicht für Korrekturen der Teilchenidentifikationseffizienz . . 94

C.1 Parameter der Funktionen zum Fit von $\tau^- \to \phi \pi^- \nu_\tau$ 97
C.2 Parameter der Funktionen zum Fit von $\tau^- \to \phi K^- \nu_\tau$ 98

Literaturverzeichnis

[1] M. Kobayashi and T. Maskawa,
„CP Violation In The Renormalizable Theory Of Weak Interaction,“
Prog. Theor. Phys. **49** (1973) 652.

[2] W. M. Yao *et al.* [Particle Data Group],
„Review of particle physics,“
J. Phys. G **33** (2006) 1.

[3] T. Alexopoulos *et al.* [KTeV Collaboration],
„A Determination of the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa Parameter $|V_{\rm us}|$ Using K_L Decays,“
Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 181802, [arXiv:hep-ex/0406001].

[4] E. Gamiz, M. Jamin, A. Pich, J. Prades and F. Schwab,
„$|V_{\rm us}|$ and $m_{\rm s}$ from hadronic tau decays,“
Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 011803, [arXiv:hep-ph/0408044].

[5] D. Boutigny *et al.* [BABAR Collaboration],
„BaBar technical design report,“
`http://www.slac.stanford.edu/cgi-wrap/getdoc/slac-r-457.pdf`.

[6] K. Abe *et al.* [Belle Collaboration],
„The first observation of $\tau^{\pm}- \to \phi K^{\pm}\nu$ decay,“
Phys. Lett. B **643** (2006) 5, [arXiv:hep-ex/0608026].

[7] B. Aubert *et al.* [BABAR Collaboration],
„Exclusive branching fraction measurements of semileptonic tau decays into three charged hadrons, $\tau^- \to \phi\pi^-\nu_\tau$ and $\tau^- \to \phi K^-\nu_\tau$,“
arXiv:0707.2981 [hep-ex].

[8] N. Cabibbo,
„Unitary Symmetry and Leptonic Decays,“
Phys. Rev. Lett. **10** (1963) 531.

[9] E. Gamiz, M. Jamin, A. Pich, J. Prades and F. Schwab,
„Theoretical progress on the $V_{\rm us}$ determination from tau decays,“
arXiv:0709.0282 [hep-ph].

[10] S. Banerjee *et al.*,
„Tau and muon pair production cross-sections in electron-positron annihilations

at $\sqrt{s} = 10.58\,\mathrm{GeV}$,“
arXiv:0706.3235v1 [hep-ph].

[11] P. F. Harrison, H. R. Quinn *et al.* [BABAR Collaboration],
„The BaBar physics book: Physics at an asymmetric B factory.“

[12] B. Aubert *et al.* [BABAR Collaboration],
„The BaBar detector,“
Nucl. Instrum. Meth. A **479** (2002) 1, [arXiv:hep-ex/0105044].

[13] *BaBar* Run Coordinators,
„Accelerator and Detector Performance Data,“
`http://bbr-onlwww.slac.stanford.edu:8080/babarrc/perfdata.html`.

[14] *BaBar* Publication Board,
„The Pub Board Page of Official Plots“
`http://www.slac.stanford.edu/BFROOT/www/Organization/PubBoard/OfficialPlots/index.html`.

[15] *BaBar*-Kollaboration,
„Drift Chamber Project Home Page,“
`http://www.slac.stanford.edu/BFROOT/www/Detector/CentralTracker/overview/index.html`.

[16] K. Kleinknecht,
„Detectors for particle radiation,“
2nd ed., Cambridge University Press (1998).

[17] M. B. Nikolich *et al.*
„Charged Particle Identification Using DCH and DIRC Based Likelihoods“
BaBar Analysis Document **917**, v 1 (2004).

[18] *BaBar*-Kollaboration,
„EMC Calibration Homepage,“
`http://www.slac.stanford.edu/BFROOT/www/Detector/Calorimeter/software/calib_mtg/general_calib.html`.

[19] T. Brandt,
„Likelihood based Electron Identification,“
BaBar Analysis Document **391**, v 1 (2002).

[20] F. Fabozzi, L. Lista *et al.*
„Muon Identification in the *BaBar* Experiment,“
BaBar Analysis Document **60**, v 1 (2000).

[21] *BaBar* Particle ID Analysis Working Group,
„Inventory of PidSelectors for 'r18a',“
`http://www.slac.stanford.edu/BFROOT/www/Physics/Tools/Pid/Selectors/r18a/selectors.html`.

[22] G. Mancinelli und S. Spanier,
„Kaon Selection at the *BaBar* Experiment,“
BaBar Analysis Document **116**, v 1 (2001).

[23] S. Mclachlin,
„PID control samples at *BaBar* “,
BaBar Analysis Document **1056**, v 1 (2004).

[24] *BaBar* Particle ID Analysis Working Group,
`http://www.slac.stanford.edu/BFROOT/www/Physics/Tools/Pid/pid.html`.

[25] S. Jadach, B. F. L. Ward and Z. Was,
„The precision Monte Carlo event generator $\mathcal{KK}$ for two-fermion final states in e^+e^- collisions,“
Comput. Phys. Commun. **130** (2000) 260, [arXiv:hep-ph/9912214].

[26] S. Jadach, Z. Was, R. Decker and J. H. Kuhn,
„The Tau Decay Library Tauola: Version 2.4,“
Comput. Phys. Commun. **76** (1993) 361.

[27] D. J. Lange,
„The EvtGen particle decay simulation package,“
Nucl. Instrum. Meth. A **462** (2001) 152.

[28] S. Agostinelli *et al.* [GEANT4 Collaboration],
„GEANT4: A simulation toolkit,“
Nucl. Instrum. Meth. A **506** (2003) 250.

[29] D. Nekrassov,
„Messung des Verzweigungsverhältnisses $\mathcal{B}(\tau^- \to K^0\pi^-\nu_\tau)$ mit dem *BaBar*-Experiment,“
Diplomarbeit, Universität Heidelberg (2006).

[30] R. Hohler,
„Messung des Verzweigungsverhältnisses $\mathcal{B}(\tau^- \to K^-\pi^+\pi^-\nu_\tau)$ mit dem *BaBar*-Experiment,“
Diplomarbeit, Universität Heidelberg (2007).

[31] R. Bartoldus *et al.*,
„Trigger and Filter Documentation for Run1,“
BaBar Analysis Document **194** (2002).

[32] S. Banerjee,
„BGFTAU Filter,“
BaBar Analysis Document **1265** (2005).

[33] J. Williams,
„TauUser,“
BaBar Analysis Document **842** (2004).

[34] S. Schenk,
Private Mitteilung.

[35] I. Adam *et al.* [BABAR-DIRC Collaboration],
„The DIRC particle identification system for the BaBar experiment,“
Nucl. Instrum. Meth. A **538** (2005) 281.

[36] I. Nugent, S. Banerjee, M. Roney,
„τ^- to $\pi^-\pi^-\pi^+\nu$, $K^-\pi^-\pi^+\nu$, $K^-\pi^-K^+\nu$ and $K^-K^-K^+\nu$,“
BaBar Analysis Document **930**, v 17 (2006).

[37] F. Salvatore und A. Lyon,
„Measurement of $\mathcal{B}(\tau^- \to K^-\pi^0\nu_\tau)$ using the *BaBar* detector,“
BaBar Analysis Document **972**, v 34 (2006).

[38] D. H. Perkins,
„Introduction to High Energy Physics,“
4th ed., Cambridge University Press.

[39] G. Lopez Castro und D. A. Lopez Falcon,
„VMD description of $\tau \to (\omega,\phi)\pi^-\nu_\tau$ decays and the ω-ϕ mixing angle,“
Phys. Rev. D **54** (1996) 4400, [arXiv:hep-ph/9607409].

[40] W. Verkerke und D. Kirkby,
„The RooFit toolkit for data modeling,“
[arXiv:physics/0306116].

[41] R. Brun und F. Rademakers,
„ROOT: An object oriented data analysis framework,“
Nucl. Instrum. Meth. A **389** (1997) 81.

[42] F. James und M. Roos,
„Minuit: A System For Function Minimization And Analysis Of The Parameter Errors And Correlations,“
Comput. Phys. Commun. **10** (1975) 343.

[43] R. J. Barlow,
„Statistics - A Guide to the Use of Statistical Methods in the Physical Sciences,“
Wiley, 1989

[44] R. J. Barlow und C. Beeston,
„Fitting using finite Monte Carlo samples,“
Comput. Phys. Commun. **77** (1993) 219.

[45] R. Gamet und C. Touramanis,
„Luminosity Measurement for the Runs 1, 2 and 3 data sample using Release 12 and SP5 Simulation,“
BaBar Analysis Document **1312**, v 1 (2005).

[46] R. Gamet
„Run 4 and Run 5 Luminosity Measurement using R18d,“
BaBar-Kollaborationstreffen, Juni 2007,
`http://www.slac.stanford.edu/BFROOT/www/Organization/CollabMtgs/2007/detJun07/Tues3/gamet.pdf`.

[47] S. Banerjee und A. Lusiani,
„TauQED AWG: notes on systematics studies,“
`http://www.slac.stanford.edu/BFROOT/www/Physics/Analysis/tauqed/systematics.html`.

[48] I. Nugent, M. Roney, R. Kowalewski,
„Tau31 Tracking Efficiency Study for 2004,“
BaBar Analysis Document **931**, v 1 (2004).

[49] I. Nugent,
„Tau31 Tracking Efficiency Study - Expert Recipes,“
`http://www.slac.stanford.edu/BFROOT/www/Physics/TrackEfficTaskForce/TauEff/R18/Tau31ExpertRecipe.html`.

[50] I. Nugent,
„Tau31 Systematic Uncertainties for the Vivace Dataset (analysis 32),“
`http://www.slac.stanford.edu/BFROOT/www/Physics/TrackEfficTaskForce/TauEff/R18/Vivace/Vivace.ps`.

[51] K. Flood [*BaBar* Particle ID Analysis Working Group],
`http://www.slac.stanford.edu/BFROOT/www/Physics/Tools/Pid/PidOnMc/pidonmc.html`.

[52] W. M. Yao *et al.* [Particle Data Group],
„Review of particle physics,“
J. Phys. G **33**, 1 (2006) und 2007 mit Aktualisierungen für die Auflage 2008,
`http://pdg.lbl.gov`.

Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich allen Personen meinen Dank ausdrücken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Herrn Prof. Dr. Ulrich Uwer danke ich für die hervorragende, stets motivierte und freundliche Betreuung und seine volle Unterstützung während des ganzen letzten Jahres. Es hat mir sehr viel Freude gemacht, unter seiner Betreuung dieses interessante Thema zu bearbeiten. Danken möchte ich auch Herrn Prof. Dr. Norbert Herrmann für die spontane und unkomplizierte Übernahme der Zweitkorrektur. Aleksandra Adametz und Stefan Schenk gilt mein tiefer Dank für ein immer offenes Ohr und ihre unermüdlichen Erklärungen und Hilfestellungen in allen Bereichen dieser Arbeit. Würdigen möchte ich hier auch die ausführlichen Erklärungen und vielen nützlichen Tipps von Dr. Rolf Dubitzky und Dr. Jörg Marks zu technischen und physikalischen Problemen. Für die Weitergabe eigener Erfahrungen mit τ-Analysen, besonders zu Beginn dieser Arbeit, danke ich Roland Hohler und Daniil Nekrassov. Bedanken möchte ich mich auch bei Johannes Albrecht, Tobias Fritz, Tanja Haas, Tobias Herr und Nina Krieger, durch deren Anmerkungen, Vorschläge und Korrekturen diese Arbeit viel an Verständlichkeit gewonnen hat. Die gemeinsame Zeit im Büro mit Dr. Johan Blouw werde ich ebenso in guter Erinnerung behalten wie die freundliche und aufgeschlossene Atmosphäre in der HE-Gruppe.

Ein besonderer Dank gilt Stefan Meinel, ohne dessen unzählige Erklärungen mir im Laufe dieses Studiums viele Einsichten in die Welt der Physik verschlossen geblieben wären.

Nicht angemessen danken kann ich hier meinen Eltern für ihre uneingeschränkte mir stets gewisse Unterstützung. Daher schließe ich mein Studium nicht frei von Wehmut ab, da mein lieber Vater dessen Ende nicht mehr erleben durfte.

Parabase

Freudig war, vor vielen Jahren,
Eifrig so der Geist bestrebt,
Zu erforschen, zu erfahren,
Wie Natur im Schaffen lebt.
Und es ist das ewig Eine,
Das sich vielfach offenbart;
Klein das Große, groß das Kleine,
Alles nach der eignen Art.
Immer wechselnd, fest sich haltend;
Nah und fern und fern und nah;
So gestaltend, umgestaltend -
Zum Erstaunen bin ich da.

J. W. von Goethe

Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den 28. September 2007 _____