

**Fakultät für Physik und Astronomie
Universität Heidelberg**

Bachelorarbeit in Physik
eingereicht von

René Philipp Austermühl

geboren in Frankenberg (Eder) (Deutschland)

Heidelberg, den 30. September 2015

**Analyse von Michelson-Interferometriedaten
von Vibrationsmessungen eines dünnen
gasgekühlten Pixeldetektors**

Diese Bachelorarbeit wurde von René Philipp Austermühl am
Physikalischen Institut in Heidelberg
unter der Aufsicht von
Prof. Dr. André Schöning
durchgeführt.

Abstract

The Mu3e experiment will search for the charged lepton flavor violating decay $\mu^+ \rightarrow e^+e^+e^-$ with a sensitivity to a branching ratio of 10^{-16} . Any signal would be a clear sign of beyond standard model physics. Therefore, a silicon tracking detector with high momentum, time and vertex resolution is needed in order to differentiate signal events from background. As the momentum resolution is dominated by multiple coulomb scattering, a design of low material budget is required. This can be achieved with chips produced in the novel HV-MAPS technology, which can be thinned to $50\ \mu\text{m}$. In order to minimize the use of material, a gaseous helium cooling system will be used in the detector. Due to flow induced vibrations the momentum resolution is affected. An understanding of these vibrations is important.

This thesis describes how the flow induced vibrations are measured with two different mechanical prototypes using a Michelson-Interferometer. The frequency respond of the modules is considered, too. The measurement works without calibration and has an accuracy of less than a micrometer. For analysing a large amount of data an algorithm was developed. With local cooling applied, vibration amplitudes are found to be up to $40\ \mu\text{m}$ micrometer. The average amplitude is lower then $10\ \mu\text{m}$.

Zusammenfassung

Das Mu3e-Experiment wird den Leptonenzahl verletzenden Zerfall $\mu^+ \rightarrow e^+e^+e^-$ bis zu einem Verzweungsverhältnis von 10^{-16} messen. Ein gefundener Zerfall wäre ein eindeutiges Indiz für new physics. Dazu wird ein Silizium-Spurdetektor mit hoher Impuls-, Zeit- und Vertexpauflösung benötigt, mit dem Signalereignisse vom Untergrund unterscheiden werden können. Da die Impulsauflösung von Mehrfachstreuung dominiert ist, darf nur wenig Material im Detektor verbaut werden. Um dies zu erreichen wird er mit Chips der neuartigen HV-MAPS Technologie gebaut, welche sich auf $50\ \mu\text{m}$ Mikrometer dünnen lassen. Um das verbaute Material weiterhin gering zu halten, wird mit Heliumgas gekühlt werden. Durch die vom Gasfluss angeregten Vibrationen wird die Impulsauflösung beeinflusst. Daher ist es wichtig, die Vibrationen zu verstehen.

Diese Arbeit beschreibt, wie mittels eines Michelson-Interferometers die flussinduzierten Vibrationen und der Frequenzgang an zwei mechanischen Prototypen gemessen werden. Die Messung funktioniert ohne Kalibrierung und ermöglicht eine Genauigkeit von weniger als einem μm . Für die Auswertung großer Datenmengen wurde ein Algorithmus entwickelt. Durch die lokale Kühlung zeigen sich Amplituden von bis zu $40\ \mu\text{m}$. Die durchschnittliche Amplitude ist kleiner als $10\ \mu\text{m}$.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
1.1	Das Mu3e-Experiment	5
1.2	Aufbau der Vibrationsmessung	8
2	Struktur der Daten	12
2.1	Rohdaten	12
2.2	Theorie der Intensitätsdaten	15
3	Algorithmen zur Amplitudenbestimmung	20
3.1	Amplitudenbestimmung durch Betrachtung der Abstände der Null- durchgänge	20
3.2	Amplitudenbestimmung mithilfe der Ableitungen	22
3.3	Optimierung der Konstanten für Zeit und Amplitude	26
4	Grundeinstellungen der Simulation	27
4.1	Simulation	27
4.2	Unterschiede zu Messdaten	27
5	Ergebnisse aus Simulation und Messungen	29
5.1	Effizienzen bei Simulationen	29
5.1.1	Einfache Schwingung	30
5.1.2	Überlagerung zweier Schwingungen	34
5.1.3	Überlagerung von mehreren Schwingungen	38
5.2	Ergebnisse bei Messdaten	40
5.2.1	Gründe der Fehlzählungen	40
5.2.2	Frequenzgänge	41
5.2.3	Flussmessungen	45
6	Zusammenfassung	49
7	Ausblick	50
8	Appendix: Tabellen und Grafiken	51
8.1	Fehler bei Überlagerung von zwei Signalen	51

Anmerkung

Es liegt eine korrigierte Fassung vom 25.10.2015 vor.

1 Einleitung

Aktuell ist das Standardmodell die Grundlage der Teilchenphysik. Es konnte jedoch schon gezeigt werden, dass dieses nicht ganz vollständig ist. Zum Beispiel wurden Verletzungen der Leptonenzahl durch Neutrinooszillation [1] festgestellt. Es gibt zahlreiche Theorien zur Erweiterung des SM und viele Experimente suchen nach neuer Physik. Die Erweiterung durch supersymmetrische Teilchen erlaubt zum Beispiel die Leptonenzahlverletzung geladener Leptonen [2].

Das Mu3e-Experiment ist eines dieser Experimente. Das Ziel ist es, zu überprüfen, ob der Leptonenzahl verletzende Zerfall $\mu^+ \rightarrow e^+e^+e^-$ bis zu einem Verzweigungsverhältnis von 10^{-16} mit einem Konfidenzniveau von 90% zu finden ist [3]. Dieser Zerfall ist prädestiniert, um die neue Schwelle zu setzen, da hier die Zerfallsprodukte derart detektiert werden können, dass sich daraus der Zerfallsursprung errechnen lässt. Die invariante Masse der detektierten Zerfallsprodukte gibt Aufschluss darüber, ob Neutrinos entstanden sind. Dazu wird ein Detektor mit sehr hoher Orts- und Zeitaufösung benötigt, damit sowohl Teilchen mit geringer Energie detektiert werden können, als auch die Bestimmung der Energie hinreichend genau ist, um fehlende Neutrinos zu identifizieren. Zudem muss er Raten in der Größenordnung von 10^9 [3] verarbeiten können, da nur so bis zu einem Limit von 10^{-16} gemessen werden kann. Dafür darf dieser nur aus sehr wenig Material bestehen, um die Streuung der Elektronen und Positronen minimal zu halten. Falls der Zerfall gefunden wird, wäre dies ein klares Indiz für Physik, die über das Standardmodell hinausgeht.

Der Detektor lässt sich dank der Entwicklung neuartiger hochspannungsbetriebener monolithischer aktiver Pixelsensoren (HV-MAPS), welche bis zu einer Dicke von $50\ \mu\text{m}$ gedünnt werden können, bauen. HV-MAPS beherbergen die Ausleseelektronik auf dem Chip, sodass eine aktive Fläche von nahezu 100% erreicht wird. Als tragende Struktur wird Kapton[®] mit einer aufgebrachtene Leiterschicht aus Aluminium oder Kupfer verwendet [3].

Da eine Flüssigkeitskühlung zu viel Material benötigen würde, soll das Experiment mit gasförmigem Helium gekühlt werden. Helium ist aufgrund seiner Leichtigkeit, Verwendungssicherheit und Wärmeleitfähigkeit als Kühlmedium die beste Wahl. Es ist jedoch davon auszugehen, dass der Detektor durch das vorbeiströmende Gas zu schwingen anfängt.

Im Rahmen dieser und Lars Henkelmanns [4] Bachelorarbeit wurden die Vibrationen des Detektors untersucht. Dazu wurde ein Prototyp eines Detektormoduls mit einem Spiegel versehen und in ein Michelson-Interferometer eingebaut. So konnte die Reaktion auf einen Gasfluss und auf Schallwellen eines Lautsprechers kontaktfrei und mit hoher Präzision untersucht werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde der Auswertalgorithmus entwickelt und geschrieben. Dieser wird hier erklärt und es wird beschreiben, wie die Daten für diesen zugänglich gemacht werden. Des Weiteren wird auf die Effizienz des Algorithmus eingegangen und dessen Grenzen erläutert. Zuletzt wird noch auf die Auswertung vorgenommen und die Ergebnisse evaluiert.

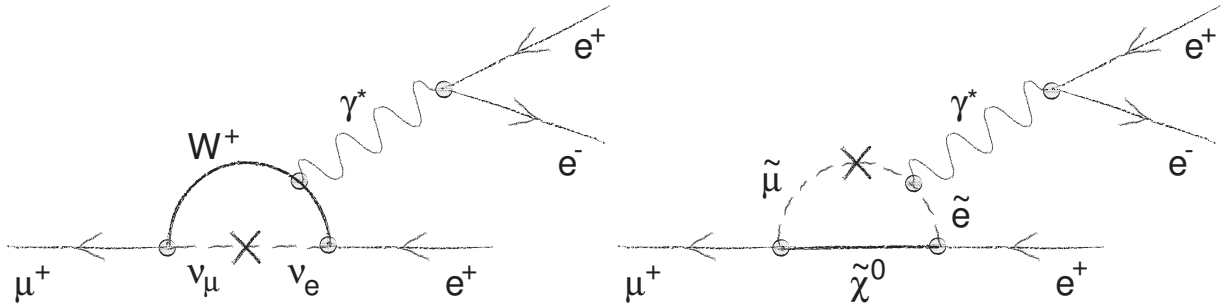


Abbildung 1: Zerfall eines Myons in drei Elektronen. Links: Zerfall über Neutrinooszillation im erweiterten Standardmodell. Rechts: Zerfall mittels supersymmetrischer Teilchen.[3]

1.1 Das Mu3e-Experiment

Bisher wurde durch das SINDRUM-Experiment bestätigt, dass das Verzweigungsverhältnis des Zerfalls $\mu^+ \rightarrow e^+e^+e^-$ kleiner 10^{-12} ist [5]. Um die vom Mu3e-Experiment erzielte Schranke von 10^{-16} zu erreichen, wird eine Myonenintensität von wenigstens 10^9 Myonen pro Sekunde benötigt. Diese soll ab dem Jahr 2017 am Paul Scherrer Institut (Viligen, Schweiz) erreicht werden [3].

Die minimale Erweiterung des Standardmodells erlaubt den gesuchten Myonenzerfall mittels Neutrinooszillation mit einem Verzweigungsverhältnis von weniger als 10^{-50} , was experimentell nicht überprüfbar ist. Somit würde der Fund dieses Zerfalls auf einen noch fehlenden Baustein des Standardmodells hinweisen und dementsprechend eine Grundlage für neue Physik bieten. Neutrinooszillation an sich wurde schon durch das Super-Kamiokande-Experiment bestätigt [1], jedoch wurde noch keine Leptonenzahlverletzung bei geladenen Leptonen nachgewiesen. Supersymmetrische Teilchen, wie sie im SUSY Modell beinhaltet sind, ermöglichen solche Zerfälle. In Abbildung 1 sind links der Zerfall von $\mu^+ \rightarrow e^+e^+e^-$ durch Neutrinooszillation und rechts über supersymmetrische Teilchen dargestellt, wobei der zweite theoretisch beobachtbar ist.

Um diesen Zerfall zu finden wird, ein Vertexdetektor für Elektronen entwickelt, bei dem die Myonen zentral und in Ruhe zerfallen. Die wahrscheinlichsten Zerfälle sind $\mu^+ \rightarrow e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu$ mit einem Verzweigungsverhältnis von nahezu eins, $\mu^+ \rightarrow e^+\nu_e\bar{\nu}_\mu\gamma$ mit 10^{-2} und $\mu^+ \rightarrow e^+e^+e^-\nu_e\bar{\nu}_\mu$ mit 10^{-5} , welche einen dominanten Untergrund erzeugen. Dies führt zu der Suche nach einem $e^+e^+e^-$ -Tripel, dessen invariante Masse der eines Myons entspricht. Die beiden Positronen und das Elektron müssen zur am gleichen Ort koinzident entstanden sein. Aufgrund der Impulserhaltung muss weiterhin für dieses Tripel die Summe der Impulse verschwinden und die Bahnen müssen in einer Ebene liegen. Hiermit erhält man die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{i=3} p_i = 0 \quad (1)$$

$$\text{und } \sum_{i=1}^{i=3} E_i = E_\mu, \quad (2)$$

wobei p_i die Impulse und E_i die Energien der Zerfallsprodukte sind. E_μ ist die Energie es ruhenden Myons. Die erste Gleichung folgt aus der Impulserhaltung und im Falle eines Zerfalls, welcher Neutrinos beinhaltet, ergibt die Summe der Impulse einen Wert ungleich null. Hierzu wird die hohe Impulsauflösung benötigt. Da Neutrinos nahezu bis keine Masse haben und es beim Zerfall möglich ist, dass diese keinen Impuls erhalten, ergibt Gleichung (1) ebenfalls nahezu 0. Dies führt zu dem Konfidenzniveau von 90%. Die zweite Gleichung stellt die Erhaltung der Schwerpunktsenergie dar. Der linke Term wäre im Falle eines Zerfalls, an dem Neutrinos beteiligt sind, kleiner als der rechte Term. Der Zerfall in ein einzelnes Positron und zwei Neutrinos erzeugt kein messbares Tripel, da nur das Positron detektiert werden kann. Dieses allein kann keinen Rückschluss auf übrige Zerfallsprodukte bieten. Um die Impulse P_i der Elektronen und Positronen hinreichend genau zu bestimmen, wird ein Detektor mit sehr hoher Orts- und Zeitauflösung benötigt.

Um die nötigen Anforderungen erfüllen zu können, werden neuartige hochspannungsbetriebene monolithische aktive Pixeldetektoren (HV-MAPS) entwickelt. Diese ermöglichen eine Zeitauflösung von 16 ns bei einer Pixelgröße von $80 \mu\text{m} \times 80 \mu\text{m}$ [3]. Da die Ausleseelektronik im Chip sitzt, wird die Detektordicke signifikant verkleinert und somit die dominante Quelle der Messunsicherheit, die durch den Detektor entstehende Mehrfachstreuung [6], minimiert.

Abbildung 2 zeigt eine schematische Darstellung des Detektors mit zwei „Recurl“-Stationen. Das Aluminiumtarget liegt zentral und ist umgeben von den beiden inneren Lagen (Lage 1 und 2) des Pixeldetektors. Die nächsten Lagen der inneren Station sind szintillierende Fasern gefolgt von zwei weiteren Lagen Pixeldetektoren (Lage 3 und 4). Bei den „Recurl“-Stationen sind keine szintillierende Fasern, sondern szintillierende Kacheln eingebaut und auf die inneren Lagen kann und wird komplett verzichtet. Der komplette Detektor befindet sich in einem Magnetfeld [3]. Die Pixeldetektoren sind auf einer Tragestruktur, bestehend aus $25 \mu\text{m}$ dickem Kapton[®], welches mit einer Leitschicht aus Aluminium oder Kupfer beschichtet ist, angebracht.

Bei einer Myonenstopprate von $2 \cdot 10^9$ Myonen pro Sekunde wird für die innerste Lage eine Signalrate von 3 kHz pro Kanal ausgegangen [3]. Die durch die Elektronik erwartete Wärmeproduktion liegt zwischen $100 \frac{\text{mW}}{\text{cm}^2}$ und $400 \frac{\text{mW}}{\text{cm}^2}$. Als Abtransport sollen zwei Heliumströme dienen. Einer läuft global durch den kompletten Detektor, mit einer Flussgeschwindigkeit von $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, der andere wird in entgegengesetzter Richtung mit etwa $20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ durch kleine Kanäle der Tragestruktur geführt [8]. In Abbildung 3 ist ein Querschnitt eines Detektormoduls dargestellt.

Aufgrund der Kraft, die durch das Gas auf den Detektor ausgeübt wird, ist davon auszugehen, dass dieser zu vibrieren beginnt. Die Amplitude dieser Vibration wird mithilfe eines Michelson-Interferometers bestimmt.

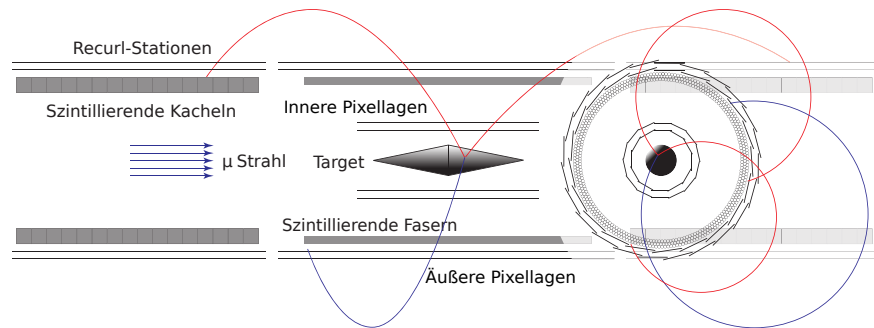


Abbildung 2: Schematischer Aufbau des Mu3e-Detektors mit zwei Recurl-Stationen. Zentral ist das Target zu erkennen, umgeben von den ersten beiden Pixeldetektorlagen, gefolgt von szintillierenden Fasern und den nächsten beiden Detektorlagen. Die Seitenstationen bestehen nur aus den äußeren Lagen und szintillierenden Kacheln. Rechts ist der Querschnitt des Detektors dargestellt [3].

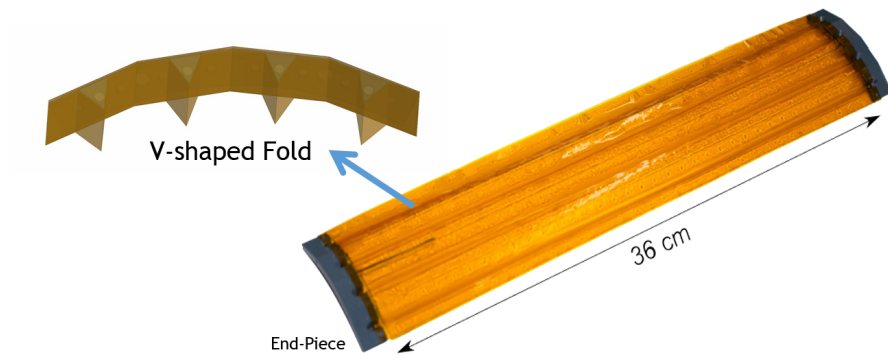


Abbildung 3: Links: Querschnitt eines Detektormoduls. Zu sehen ist die Oberfläche, sowie die Kühlkanäle. Rechts: Bild eines Prototypen mit angebrachtem Endstück zur Gasversorgung [7].

1.2 Aufbau der Vibrationsmessung

Abbildung 4 zeigt das verwendete Michelson-Interferometer von oben. Zu sehen ist links der Laser, unten der Referenzspiegel, rechts der Detektormodul-Prototyp und oben der Detektor für das Interferenzmuster. Vor dem Detektor befindet sich der Lautsprecher für die Frequenzgänge.

Der Laser sendet rotes Licht der Wellenlänge $\lambda = 635 \text{ nm}$ mit konstanter Wellenlänge $\lambda = 635 \text{ nm}$ mit konstanter Wellenlänge. Dieses wird am zentralen Strahlteiler geteilt. Einer der Strahlen läuft zum Referenzspiegel, wird dort reflektiert und wiederum am Strahlteiler geteilt, wovon ein Teilstrahl zurück zum Laser reflektiert wird und der andere zum Detektor gelangt. Der zweite gelangt zum Spiegel auf dem Detektormodul und wird dort reflektiert und ebenfalls vom Strahlteiler teils zum Laser und teils zum Detektor weitergeleitet. Die zum Laser zurückreflektierten Strahlen werden vor Irisblenden oder die Laserverschaltung geleitet, damit diese nicht die Amplitudenregulierung des selbigen stören. Die anderen beiden interferieren am Detektor. Damit die Strahlen nicht direkt in den Laser zurückgeleitet werden, muss der komplette Aufbau leicht verkippt werden.

Die Auswirkungen einer Auslenkung des Moduls auf die Intensität des Interferenzmusters sind in Abschnitt 2.2 beschrieben. Die Daten werden mit einem Silizium-Detektor von Thorlabs[®] aufgenommen. Das Speichern der Daten übernimmt ein Oszilloskop von Tektronix[®], das die vom Detektor gemessene Intensität der Laserstrahlung relativ zur Zeit aufnimmt. Die Auswertung dieser Daten ist die Grundlage dieser Arbeit.

Die untersuchten Module wurden in der Werkstatt hergestellt. Die Pixelsensoren sind durch $50 \mu\text{m}$ dicke Glasplatten ersetzt worden. Somit ist eine vergleichbare Mechanik wie beim realen Modul zu erwarten. Den bisherigen Tests unterlagen zwei Modulprototypen. Ein älterer der vierten und ein neuerer der dritten Lage. An dem älteren wurde zentral ein Spiegel in Form einer $2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}$ und $300 \mu\text{m}$ dicken mit Gold-Palladium bedampften Glasplatte angebracht. Dieses Modul ist in Abbildung 5 zu sehen. Der Spiegel ist rot markiert. Für das Modul der dritten Lage wurden zwei der $2 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ und $50 \mu\text{m}$ dicken Glasplatten, welche als Chipersatz angebracht wurden, vor dem Einbau bedampft, damit die mechanische Beschaffenheit nicht verändert wird. Diese werden als Spiegel verwendet und sind in Abbildung 6 markiert. Für den Prototypen der vierten Lage wurde eigens eine Halterung in der Werkstatt angefertigt, die es ermöglicht diesen horizontal und vertikal zu kippen. Der andere Prototyp ist an zwei Metallringen um ein Modell des Strahlrohres befestigt, womit der Aufbau näher am späteren Experiment ist.

Zur Untersuchung der Modulreaktionen auf äußeres Einwirken werden zweierlei Experimente durchgeführt. Zum einen wird das Modul durch einen Lautsprecher zum Vibrieren angeregt. Dieser wird dicht vor dem Modul platziert, sodass dessen Ton das Modul in entsprechender Frequenz anregt, um damit einen Frequenzgang des Moduls aufnehmen zu können. Zum anderen werden Flussmessungen durchgeführt, bei denen durch die Kanäle des Moduls ein Gasfluss verschiedener Flussgeschwindigkeiten geleitet wird. Dafür wird sowohl Luft als auch Helium verwendet.

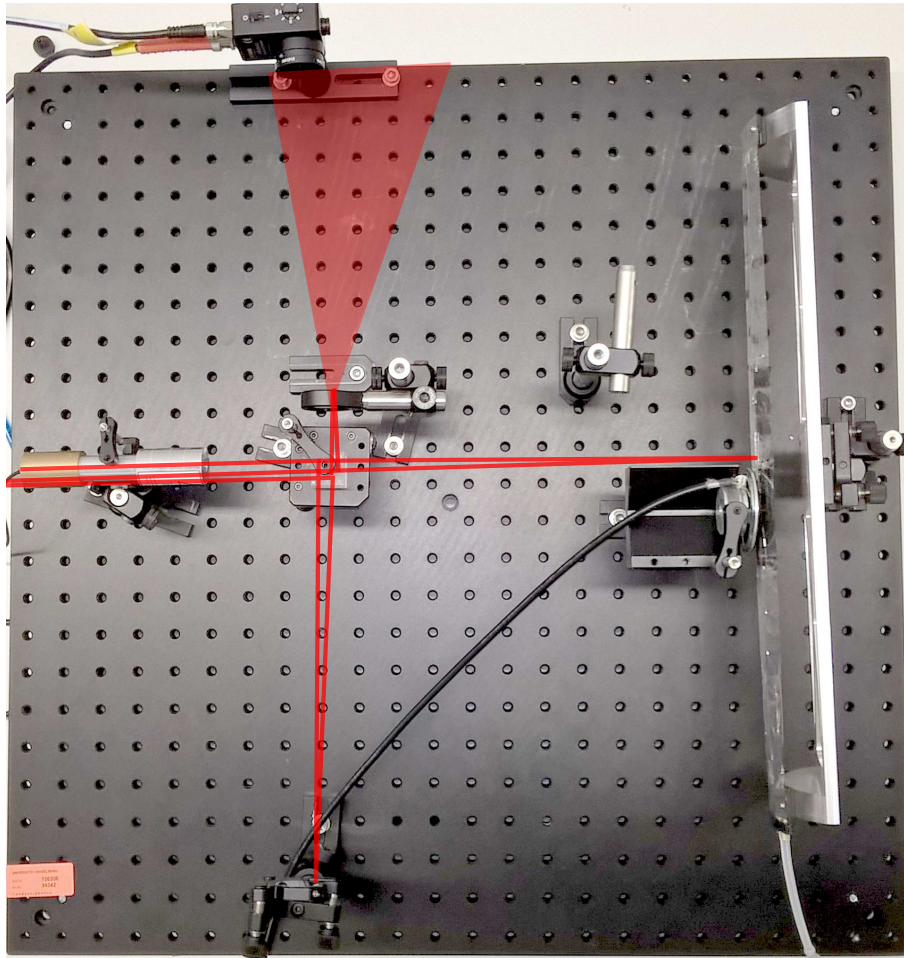


Abbildung 4: Draufsicht auf den Versuchsaufbau. Links im Bild befindet sich der Laser. Unten ist der Referenzspiegel zu sehen und rechts der Modulprototyp mit dem davor platziertem Lautsprecher. Am Modul ist ein Schlauch für die Gaszufuhr befestigt. Zentral befindet sich der Strahlteiler und dicht darüber eine bikonkave Linse zur Strahlaufweitung. Oben ist der Silizium-Detektor für die Intensitätsmessung zu sehen. Die Lichtwege sind rot eingezeichnet.

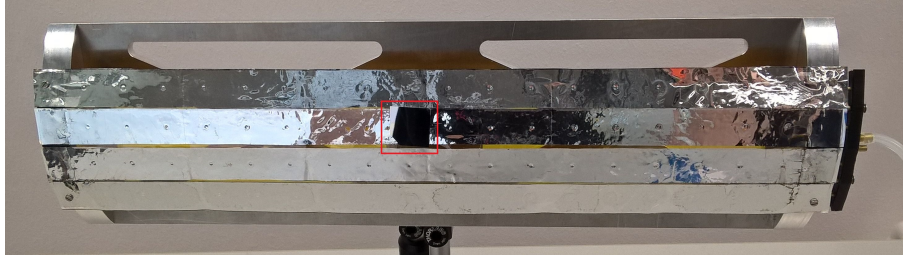


Abbildung 5: Detektormodulprototyp der vierten Lage. Zentral befindet sich der angebrachte Spiegel (rot markiert), rechts ist der Gasanschluss angebracht.



Abbildung 6: Detektormodulprototyp der dritten Lage. Die bedampften Glasplatten wurden zentral und am Rand eingebaut (rot markiert). Die Gaszufuhr erfolgt über die Endringe. Hinter dem Modul befindet sich ein Ausschnitt eines Modells des Strahlrohrs.

Der bei der Frequenzgangmessung verwendete Lautsprecher wird durch ein Koaxialkabel an einem Frequenzgenerator angeschlossen, mit welchem ein Sinus-signal mit der Spannung $U_{Anregung}$ und der Frequenz $f_{Anregung}$ erzeugt wird. Für die dritte Detektorlage werden Frequenzen von 50 Hz bis 1400 Hz angeregt, für die vierte von 10 Hz bis 1800 Hz. Dabei sind die Schritte so gewählt, dass resonante Bereiche besser aufgelöst sind als solche, in denen das Modul kaum schwingt.

Für die Flussmessungen ist ein Schlauch an dem Endstück des Moduls angebracht, durch welchen Pressluft oder Helium geleitet wird. Ein Bereich des Schlauchs ist an dem Breadboard befestigt, damit dieser nicht am Modul wackeln kann, wenn die Flussstärke verändert oder der Schlauch bewegt wird. Die Ströme werden mittels Schwebekörper-Durchflussmesser bestimmt und können über die Querschnittsfläche der vier Kühlkanäle in Flussgeschwindigkeiten umgerechnet werden. Die Querschnittsfläche eines Kanals beträgt $A_{Kanal} = 10 \text{ mm}^2$.

2 Struktur der Daten

2.1 Rohdaten

Bei den vom Michelson-Interferometer aufgenommenen und zu verarbeitenden Daten sind einige Fehlerquellen zu beachten, deren Auswirkungen zum einen durch Reduzierung der Daten und zum anderen durch deren Glättung teilweise eliminiert werden können.

Dem Signal haften drei Arten von Verunreinigungen an. Logischerweise liegt ein Rauschen vor, welches jedoch sehr gering ist. Zur Bestimmung des Signal-Rausch-Verhältnisses wurde stichprobenhaft die Amplitude des Rauschens durch die des Signals geteilt. Es liegt in der Größenordnung 10^2 und stellt somit kein wirkliches Problem dar. Daher wurde es nicht genauer betrachtet. Ebenfalls sehr gering ist der zeitlich nicht konstante Untergrund, welcher sich in der Größenordnung von weniger als einem Maximum $\approx 0.3 \mu\text{m}$ bewegt und das eigentliche Signal somit kaum beeinflusst. Dies sind niederfrequente Schwingungen des Detektormoduls. Deutlich stärker sind die Auswirkungen der Amplitudenmodulation, einer Änderung der Höhen der Maxima. Sie ist unter anderem in einer Verschiebung des Interferenzmusters bei der Position des Detektors begründet, welche durch Verkippung und Auslenkung des Modulprototypen entsteht. Daher ist sie erwartungsgemäß bei starken Auslenkungen ausgeprägter, als bei schwachen. Demnach ist sie stark von der Messung abhängig und in extremen Fällen fällt die Maximalamplitude auf unter 20% der ursprünglichen Höhe ab. Abbildung 7 zeigt ein Signal mit starker Amplitudenmodulation.

Das Rauschen kann mittels Datenreduktion und Glättung eliminiert werden. Zur Reduzierung der Daten werden Zeit und Amplitude über n Werte gemittelt und die n Werte durch den gemittelten ersetzt. Wenn jedoch keine zu große Zahl an Daten vorliegt, ist es ratsam die Daten nur zu glätten, da so weniger Informationen verloren gehen. Eine zu große Datenmenge liegt vor, wenn die einzelnen Datenpunkte zu dicht beisammen liegen, sodass zum Beispiel in der ersten Ableitung des Signals keine Strukturen mehr zu erkennen sind. Die Ableitung bietet sich an, da diese, falls sie nur über die Steigung zweier benachbarter Datenpunkte berechnet wird, besonders anfällig für Rauschen ist. Wenn etwa 20 Punkte ein Extremum ausbilden, ist dies eine gut zu verarbeitende Datenmenge. Weitere Informationen zur benötigten Datenmenge finden sich in Abschnitt 5.1.1. Unabhängig davon, ob die Daten vorher reduziert wurden, ist es in jedem Fall ratsam, sie zu glätten. Dies kann auf unterschiedliche Weise durchgeführt werden. Am einfachsten ist eine lineare Glättung mittels eines gleitenden Mittelwerts. Hierzu wird, um den n -ten Datenpunkt anzupassen, ein Mittelwert über alle Punkte vom $n - m$ -ten bis zum $n + m$ -ten Wert gebildet und der n -te durch den gemittelten ersetzt

$$a_n = \frac{1}{2m + 1} \cdot \sum_{i=n-m}^{n+m} a_i. \quad (3)$$

Der Vorteil dieser Methode ist die Einfachheit und die schnelle Implementie-

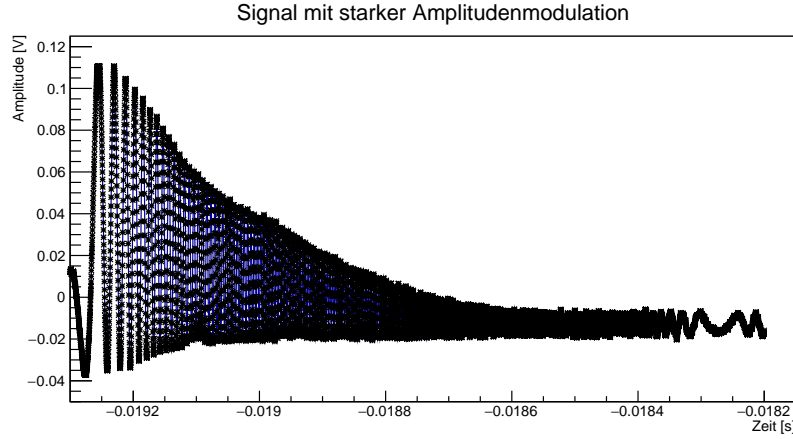


Abbildung 7: Daten der Frequenzgangmessung von Lage 3, Anregung bei 470 Hz. Es liegt eine starke Amplitudenmodulation vor, welche die Datenanalyse erschwert.

rung. Leider ist sie für Daten mit schnell schwankenden Amplituden nicht zu empfehlen, da Maxima gesenkt und Minima gehoben werden, was zu Informationsverlust führt. Für solche Daten empfiehlt sich der Savitzky-Golay-Filter [9], der mehrere Vorteile bietet. Vor allem verändert er kaum merklich die Höhe von Maxima und Minima, da die Position des zu ersetzenden Punktes durch einen χ^2 -Fit mit einem Polynom k -ten Grades über $2m + 1$ Punkte ermittelt wird. Da die Gewichtungparameter der einzelnen Datenpunkte im Falle eines konstanten Abstandes auf der Abszisse konstant sind, können diese vorher berechnet werden und erhöhen somit nicht den Aufwand im Vergleich zu linearen Glättung. Des Weiteren können die Ableitungen direkt beim Glätten durch Veränderung der Gewichtungparameter berechnet werden.

Für die s -te Ableitung des n -ten Datenpunktes folgt für ein Polynom k -ten Grades über $2m + 1$ Punkte

$$a_n = \frac{1}{C_{k,s,norm}} \cdot \sum_{i=n-m}^{n+m} C_{k,s,i} \cdot a_i. \quad (4)$$

Die benötigten Gewichtungs- $C_{k,s,i}$ sowie der Normierungskonstanten $C_{k,s,norm}$ können in entsprechenden Tabellen nachgesehen werden, welche sich sowohl in der Originalpublikation von Savitzky-Golay [9] befinden, als auch in der Folgepublikation von J.Steinier, Y.Termonia und J. Deltour [10], die einige Rechenfehler in manchen Tabellen korrigiert. Wie auch für diese Arbeit sollten beide Publikationen betrachtet werden, da nicht alle Tabellen der Originalpublikation fehlerhaft waren und somit keine vollständige Liste in der Korrektur zu finden ist. Es ist selbstverständlich auch möglich die Koeffizienten selbst zu berechnen.

Es empfiehlt sich weiterhin, bei der Verwendung von hohen Punktzahlen m auch den Grad k des Polynoms höher zu wählen, da das Polynom so auch über mehrere Maxima noch mit passablem Ergebnis gelegt werden kann. k und m sollten anhand der Punktdichte gewählt werden. Eine Funktionsanpassung über 2 Maxima und ein Minimum benötigt mindestens ein Polynom vierten Grades. Abbildung 8 zeigt Messdaten vor und nach dem Komprimieren und Glätten. Die deutliche Reduktion der Punktdichte (im Beispiel auf ein fünftel der Datenpunkte) ist besonders für die Berechnung der Ableitungen wichtig, da das sonst vernachlässigbare Rauschen zu starken Schwankungen dieser Differentiale führt.

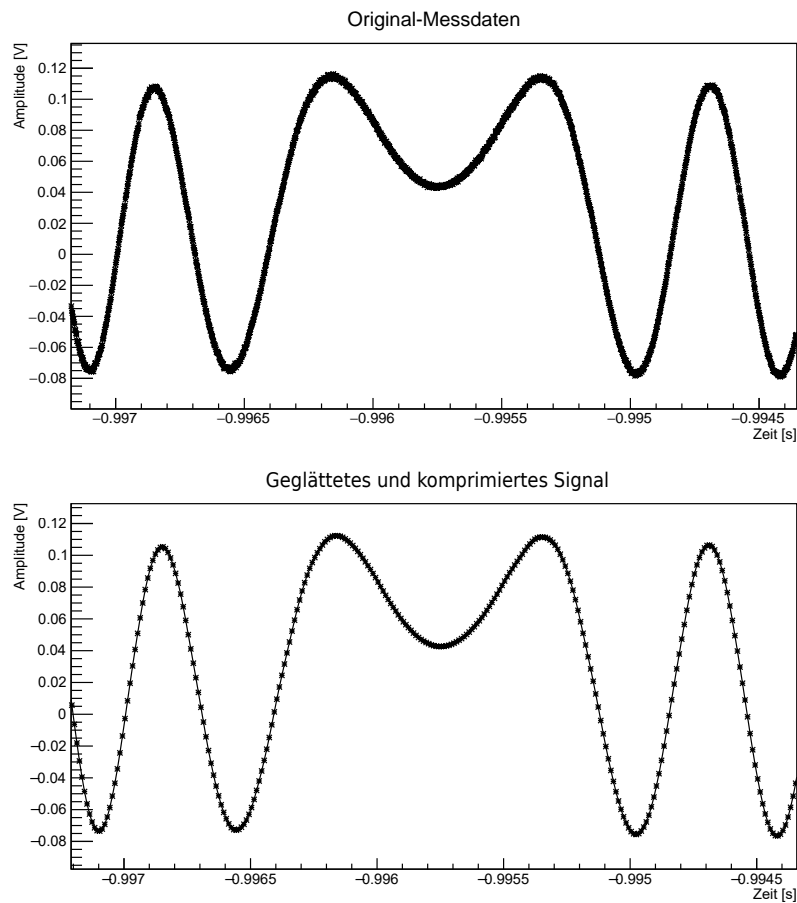


Abbildung 8: Daten der Frequenzgangmessung von Lage 3, Anregung bei 103 Hz. Oben: Original Messdaten, unten: Bearbeitete Daten. Komprimierung auf ein fünftel der Werte und Glättung über 25 Punkte mit einem Polynom vierten bzw. fünften Grades.

2.2 Theorie der Intensitätsdaten

Die Daten bei diesem Experiment bestehen vor allem aus Bündeln von Schwingungen, welche im Folgenden als Bewegungen bezeichnet werden. Die Schwingung im Inneren dieser Bündel haben im Allgemeinen keine konstante Frequenz, was an der Art der Bewegung des Detektormoduls liegt. Abbildung 9 zeigt ein simuliertes Signal, das der Intensität des Interferenzmusters entspricht, wenn das Modul harmonisch mit 100 Hz und einer Amplitude von $3 \cdot 635 \text{ nm}$ schwingt. Man sieht, dass die Abstände der Extrema nach außen (wobei die beiden Teilschwingungen die Ränder markieren) hin größer werden. Somit sinkt die Frequenz zu den Rändern hin.

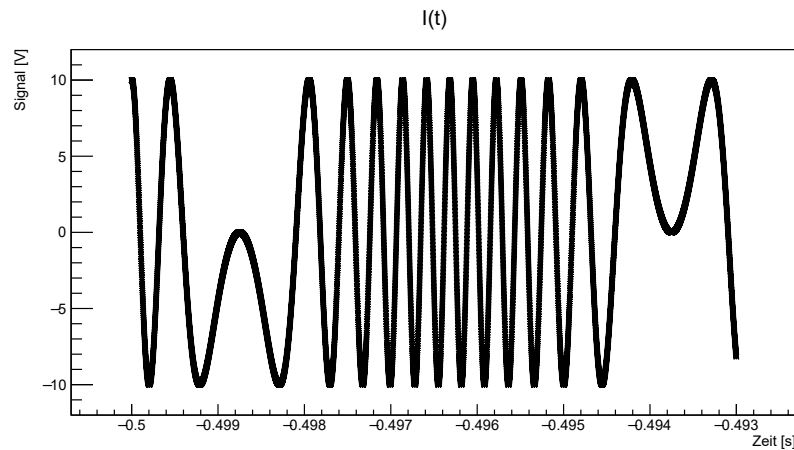


Abbildung 9: Simuliertes Intensitätssignal vom Detektor mit $f = 100 \text{ Hz}$ und zwölf Maxima bzw. Minima. Der Bereich zwischen den beiden Teilschwingungen wird als eine Bewegung bezeichnet. Und Die Endpunkte entstehen an den Umkehrpunkten der Modulschwingung.

Im einfachsten Fall schwingt das Detektormodul harmonisch und ungedämpft mit einer Frequenz f und der maximalen Amplitude A_0 . Für die Auslenkung zur Zeit t folgt damit

$$A(t) = A_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t). \quad (5)$$

Etwas allgemeiner kann die Schwingung als Überlagerung von $n \in \mathbb{N}$ ungedämpften harmonischen Oszillationen dargestellt werden, welche sich in Frequenz, Amplitude und Phase ϕ unterscheiden

$$A(t) = \sum_{i=1}^n A_{0,i} \cdot \sin(2\pi \cdot f_i \cdot t + \phi_i). \quad (6)$$

Der Detektor des Interferometers zeigt die Intensität der ankommenden Laserstrahlung an, die abhängig von dem Gangunterschied Δ_s^* der beiden Strahlen ist

$$I(\Delta_s) = I_0 \cdot \cos\left(\frac{\Delta_s^*}{\lambda} \cdot 2\pi\right), \quad (7)$$

wobei λ die Wellenlänge des Lasers ist. Im Falle des Michelson-Interferometers entspricht der Gangunterschied der doppelten Auslenkung. Somit folgt für die Intensität:

$$I(t) = I_0 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot A(t)}{\lambda} \cdot 2\pi\right) + I_{\text{Untergrund}}. \quad (8)$$

Im Falle einer einzelnen Frequenz gilt demnach

$$I(t) = I_0 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot A_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)}{\lambda} \cdot 2\pi\right) + I_{\text{Untergrund}}. \quad (9)$$

Die eben genannten Bündel treten auf, wenn die Amplitude A_0 der Schwingung größer als eine Wellenlänge ist, und sind bei einer Amplitude von mehreren Wellenlängen deutlich zu erkennen. Die Abbildungen 10 bis 12 zeigen Simulationen zu möglichen Schwingungszahlen. Hierbei ist links immer die Detektormodulbewegung dargestellt und rechts der resultierende Intensitätsverlauf. Nun kann durch Zählen der Maxima bzw. Minima ($\#_M$) oder der Umkehrpunkte ($\#_N$) (Nulldurchgänge nach Abzug des Untergrundes $I_{\text{Untergrund}}$ in der Intensität) der Bündel, die Länge einer Bewegung bestimmt werden,

$$A_0 = \#_M \cdot \frac{\lambda}{4} \quad (10)$$

$$\text{und } A_0 = \#_N \cdot \frac{\lambda}{8} \quad (11)$$

Die momentane Schwingungsfrequenz $f_I(t)$ der Intensität innerhalb einer Bewegung hängt von der Geschwindigkeit des Moduls ab und ist somit im Zentrum maximal und verschwindet an den Rändern. Sie ist gegeben durch

$$A_0 \cdot \cos(2\pi \cdot f_I(t) \cdot t) = A_0 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot A(t)}{\lambda} \cdot 2\pi\right) \quad (12)$$

$$\Rightarrow f_I(t) = 2 \cdot \frac{\dot{A}(t)}{\lambda}. \quad (13)$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Frequenz sowohl bei Extrema der Bewegung, als auch bei Sattelpunkten, null ist. Die Frequenz der Bewegungen $f_B(t)$ kann durch

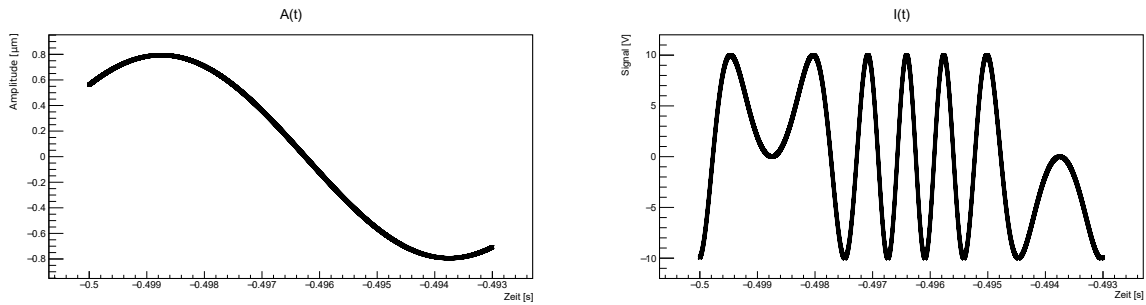


Abbildung 10: Links: Modulbewegung bei 100 Hz mit einer Amplitude von $A_0 = 0.8 \mu\text{m}$. Dies entspricht fünf Maxima im Intensitätsverlauf (rechts dargestellt).

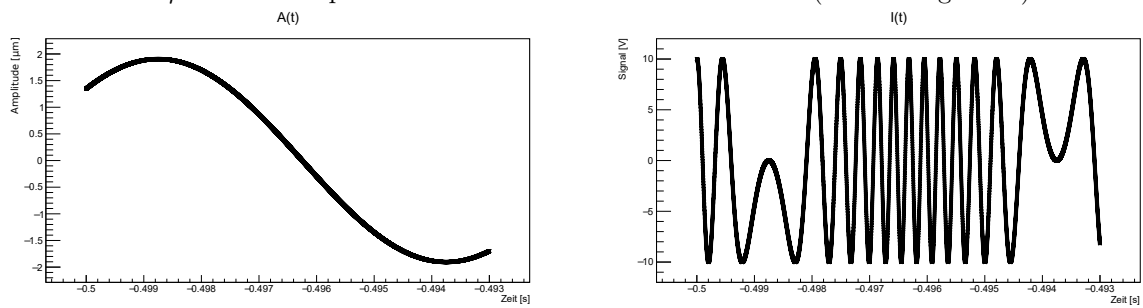


Abbildung 11: Links: Modulbewegung bei 100 Hz mit einer Amplitude von $A_0 = 1.9 \mu\text{m}$. Dies entspricht zwölf Maxima im Intensitätsverlauf (rechts dargestellt).

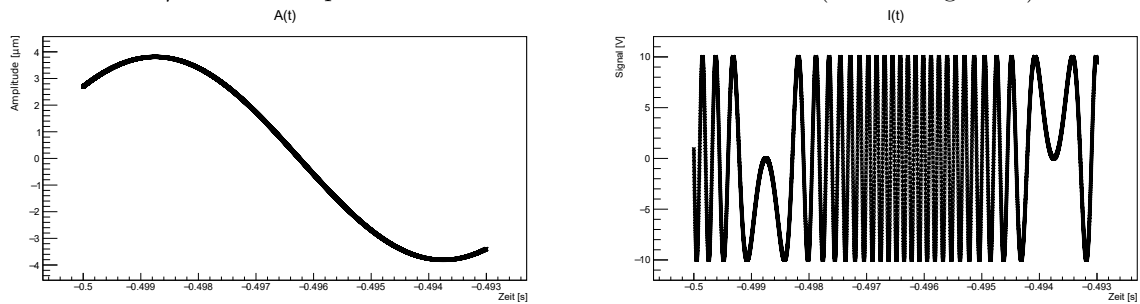


Abbildung 12: Links: Modulbewegung bei 100 Hz mit einer Amplitude von $A_0 = 3.8 \mu\text{m}$. Dies entspricht 24 Maxima im Intensitätsverlauf (rechts dargestellt).

das Inverse des zeitlichen Abstandes derer Endpunkte definiert werden. Aufgrund der Frequenzänderung liegen die Nulldurchgänge des Signals in der Mitte einer Bewegung dichter zusammen, als an Anfang und Ende. Somit ist bei den Endpunkten der Bewegung der Abstand zweier benachbarter Nulldurchgänge maximal.

Nun ist es noch interessant, das Verhalten der Intensität zu betrachten. Dabei sind besonders die Nullstellen der ersten Ableitung interessant

$$\dot{I}(t) = -I_0 \cdot \frac{\dot{A}(t) \cdot 4\pi}{\lambda} \cdot \sin\left(\frac{A(t) \cdot 4\pi}{\lambda}\right) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{und } \ddot{I}(t) &= -I_0 \cdot \left[\frac{\dot{A}(t)^2 \cdot 4\pi^2}{\lambda^2} \cdot \cos\left(\frac{A(t) \cdot 4\pi}{\lambda}\right) \right] \\ &- I_0 \cdot \left[\frac{\ddot{A}(t) \cdot 4\pi}{\lambda} \cdot \sin\left(\frac{A(t) \cdot 4\pi}{\lambda}\right) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Die Intensitätsänderung verschwindet demnach an den Endpunkten der Bewegung ($\dot{A}(t) = 0$) und wenn $A(t) = n \cdot \lambda/2$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt. Somit kann zur Amplitudenbestimmung einer Bewegung die Anzahl der Nullstellen der ersten Ableitung zwischen den Endpunkten verwendet werden. Betrachtet man den Betrag der zweiten Ableitung an den Nullstellen der ersten Ableitung, findet man, dass dieser bei den Endpunkten einer Bewegung minimal wird. Bei den äußersten Extrema ist zum einen das Geschwindigkeitsquadrat $\dot{A}(t)^2$ minimal und zum anderen verschwindet der zweite Term, da $\sin(A(t) \cdot 2\pi/\lambda) = 0$ gilt. Somit wurden zwei Möglichkeiten gefunden, die Amplitude einer Bewegung zu bestimmen.

Nun stellt sich die Frage nach der realen Auslenkung des Moduls, da durch den verwendeten Aufbau nur der Wegunterschied gemessen werden kann, nicht jedoch die Richtung der Modulbewegung. Es kann angenommen werden, dass nach jeder Bewegung das Vorzeichen der Bewegungsrichtung geändert wird. (Dies ist nur korrekt, wenn die Modulauslenkung $A(t)$ keinen Sattelpunkt hat!) Somit kann durch alternierende Addition und Subtraktion der aufeinanderfolgenden Bewegungsamplituden die reale Modulauslenkung bestimmt werden. Im Idealfall kann damit der Verlauf der Detektorbewegung über die Zeit dargestellt werden. Durch Messfehler und weitere negative Einflüsse entstehen Sprünge und falsche Richtungsänderungen. Diese werden durch Über- und Unterzählungen, zu frühe oder zu späte Beendigung des Zählens der Extrema oder Nulldurchgänge, verursacht.

Sei B_m die Schwingungszahl der m -ten Schwingung, dann gilt für die tatsächliche Auslenkung A_m des Moduls nach der m -ten Schwingung

$$A_m = \sum_{i=1}^m -1^i \cdot B_i. \quad (16)$$

Damit ist es nicht nur möglich, die Amplitude zu bestimmen, sondern auch den

kompletten Verlauf der Modulbewegung zu rekonstruieren.

3 Algorithmen zur Amplitudenbestimmung

Im Folgenden wird die Funktion der beiden hier genutzten Algorithmen erläutert. Der erste benötigt weniger Rechenleistung als der zweite, erfordert jedoch ein hohes Maß an Zeit für die Optimierung der Startparameter. Er kann verwendet werden, wenn keine genaue Analyse von Nöten ist, sondern nur eine Abschätzung bei imensen Datenmengen gemacht werden soll. Im Allgemeinen ist er dem anderen unterlegen.

Der zweite ist wesentlich ausgereifter und benötigt keine komplizierte Optimierung, da hier nicht nur das Signal an sich, sondern auch seine erste und zweite Ableitung betrachtet wird, welche allgemeinere und weniger veränderliche Eigenschaften zur Determinierung der Start- und Endpunkte einer Bewegung bieten. Des Weiteren ist er weniger anfällig für Amplitudenmodulation des Signals, welche den Anwendungsbereich des ersten stark begrenzt.

Zeiten, Amplituden, Intensitäten und deren Ableitungen werden im Folgenden nicht als von der Zeit abhängig dargestellt und mit einem Subindex $n \in \mathbb{N}$ angegeben, da diskrete und keine kontinuierlichen Daten vorliegen. Es werden die Zeitindizes der Datenpunkte verwendet.

3.1 Amplitudenbestimmung durch Betrachtung der Abstände der Nulldurchgänge

Der erste Algorithmus betrachtet zur Determinierung der Endpunkte einer Bewegung die Zeitdifferenz zwischen zwei Nulldurchgängen des Signals, womit eine schnelle Abschätzung der Schwingungsamplituden möglich ist.

Um die Zeitdifferenzen der Nulldurchgänge zu betrachten, müssen diese zuerst gefunden werden. Eine einfache Möglichkeit ist es, sich das Produkt der Intensität zweier benachbarter Punkte anzuschauen. Ist dieses negativ, so liegt ein Nulldurchgang vor. Dafür muss das Signal zunächst vom Untergrund bereinigt werden. Bei einem konstanten Untergrund bietet es sich an, den Mittelwert von allen Messpunkten zu nehmen und diesen anschließend von jedem einzelnen abzuziehen. Damit ein Nulldurchgang nicht doppelt gezählt wird, muss darauf geachtet werden, dass das Signal vorher einen bestimmten Schwellenwert $C_{Schwelle}$ über- bzw. unterschritten hat. Dieser sollte mithilfe der Rauschstärke und der Höhe der Extrema gewählt werden. In Abbildung 13 ist ein Signal dargestellt, bei dem $C_{Schwelle} \approx 0.2$ in rot eingetragen ist. $C_{Schwelle}$ sollte so hoch wie möglich gewählt werden, um einen möglichst großen Abstand zwischen dem ersten Nulldurchgang der „Halbschwingung“ und dem nächsten zu erzeugen. Wenn das Extremum der Halbschwingung die Schwelle gerade so überschreitet, dass der Abstand der beiden Nulldurchgänge gleich dem eines innerhalb der vorherigen und nachfolgenden Bewegung ist, wird kein Endpunkt gefunden und es entsteht eine Doppelzählung (d.h. zwei Bewegungen werden als eine gewertet). Ein veränderlicher Untergrund oder starke Modulationen in der Amplitude können leicht zu Fehlern führen, da diese die Position der Nulldurchgänge verfälschen oder diese sogar unauffindbar machen kann, falls die Änderung des

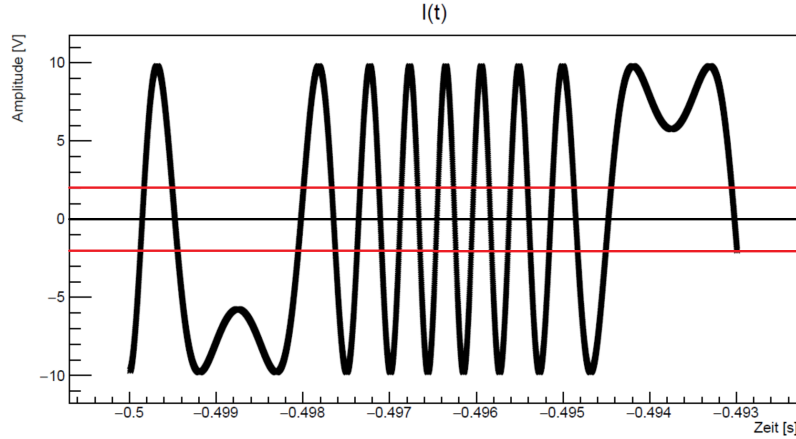


Abbildung 13: Darstellung von $C_{Schwelle}$ an einem simulierten Signal mit 7.9 Maxima. $C_{Schwelle} = 0.2$.

Untergrunds oder die Modulation der Amplitude zu stark ist. Wenn nun die Nulldurchgänge bekannt sind, können deren maximale Abstände als Endpunkte der Bewegungen verwendet werden, da mit abnehmender Frequenz die Abstände zwischen den Nulldurchgängen zunehmen (vgl. Gleichung 13). Der einfachste Weg, um die Endpunkte einer Bewegung zu finden, ist es, eine Konstante C_{Zeit} zu wählen mit der gilt

$$t_{n-1} - t_{n-2} \geq C_{Zeit} \cdot (t_n - t_{n-1}) \quad (17)$$

$$\text{und } t_{m-1} - t_{m-2} \leq C_{Zeit} \cdot (t_m - t_{m-1}), \quad (18)$$

wobei n und m die Positionen (n -ter bzw. m -ter Datenpunkt) der Nulldurchgänge sind. Erstere Gleichung gilt für den Beginn und zweitere für das Ende einer Bewegung. Wenn nun $m > n$ gilt und keine sonstigen Start- und Endpunkte zwischen dem n -ten und m -ten Datenpunkt liegen, gilt für die Amplitude A_0 der Bewegung

$$A_0 = m - n. \quad (19)$$

Nun ist es jedoch sehr schwierig C_{Zeit} so zu wählen, dass weder während einer Bewegung aufgehört wird zu zählen, noch, dass mehrere Bewegungen zusammengezählt werden. Durch Optimierung kann C_{Zeit} jedoch relativ gut bestimmt werden, solange alle Bewegungen gleichartig sind, was nötig ist, um überhaupt globale Parameter wählen zu können.

Eine weitere Möglichkeit zur Endpunktbestimmung besteht darin sich die Extrema der Abstände der Nulldurchgänge anzuschauen. Hierzu berechnet man die erste und zweite Ableitung dieser Abstände $\Delta_n = t_n - t_{n-1}$ und wenn gilt

$$\dot{\Delta}_n = \frac{t_n - 2t_{n-1} + t_{n-2}}{t_n - t_{n-1}} = 0 \quad (20)$$

$$\text{und } \ddot{\Delta}_n = \frac{\dot{\Delta}_n - \dot{\Delta}_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} < 0, \quad (21)$$

liegt ein Randpunkt einer Bewegung vor. Eine etwas einfachere Methode die Maxima der Abstände der Nulldurchgänge zu finden, ist der direkte Vergleich der umliegenden Punkte

$$\Delta_{n-1} < \Delta_n > \Delta_{n+1}. \quad (22)$$

Dies gilt im Falle eines Maximums und ist mit gleichem Aufwand zu berechnen wie die erste Methode. Es kann nur zu Problemen führen, wenn es Schwankungen im Verlauf der Abstände gibt. Einzelne Schwankungen lassen sich herausfiltern, wenn nicht nur die beiden Nachbarpunkte zum Vergleich verwendet werden, sondern auch noch deren Nachbarn

$$\Delta_{n-1} < \Delta_n > \Delta_{n+1} \quad (23)$$

$$\text{und } \Delta_{n-2} < \Delta_n > \Delta_{n+2}, \quad (24)$$

wobei in diesem Fall Bewegungen mit einer Schwingung einfach mitgezählt werden. Des Weiteren werden die Schwingungszahlen von drei Bewegungen der Form $p, 1, q$ als eine Bewegung der Schwingungszahl $p + 1 + q$ gewertet. Dadurch kann es schnell zu Überzählungen kommen, wofür Signale mit kleiner oder stark veränderlicher Amplitude anfälliger sind.

3.2 Amplitudenbestimmung mithilfe der Ableitungen

Der zweite Algorithmus betrachtet nun die erste und zweite Ableitung des Signals, sucht die Nullstellen der ersten Ableitung der Intensität (Gleichung 14) und die zugehörigen Tiefpunkte der zweiten (Gleichung 15).

Die ersten beiden Ableitungen des n -ten Datenpunkts lassen sich leicht numerisch bestimmen

$$\dot{I}_n = \frac{I_n - I_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \quad (25)$$

$$\text{und } \ddot{I}_n = \frac{\dot{I}_n - \dot{I}_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}. \quad (26)$$

Wenn eine Bewegung endet, muss die Geschwindigkeit des Moduls verschwinden und die Krümmung, die zweite Ableitung, minimal sein. Dazu werden zuerst

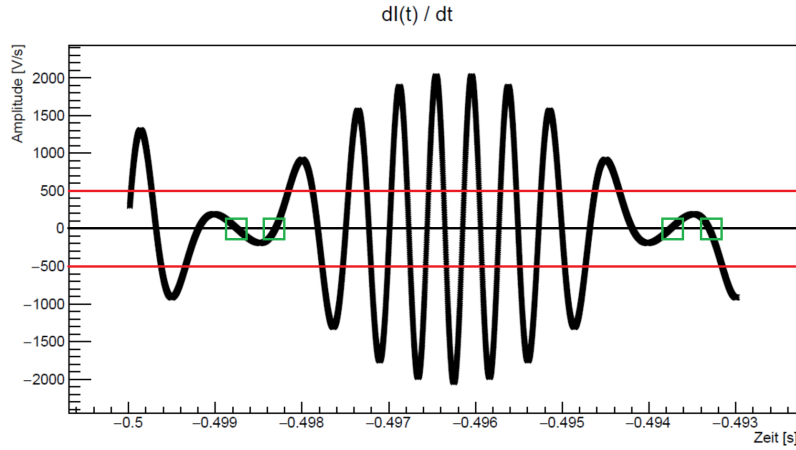


Abbildung 14: Verlauf der ersten Ableitung der Intensität bei einem Signal mit 7.8 Amplituden bei 100Hz - rot: $C_{Schwelle} \approx 0.2$

die Nullstellen der ersten Ableitung gesucht. Diese werden auf die gleiche Weise gesucht, wie die Nullstellen des Signals beim ersten Algorithmus, wobei hier die Korrektur um den konstanten Untergrund wegfällt, da dieser bereits beim Bilden der ersten Ableitung bereinigt wurde. Seien $m \in \mathbb{N}$ die Positionen der Nullstellen der ersten Ableitung, so gilt für einen Endpunkt einer Bewegung

$$|\ddot{I}_{m-1}| > |\ddot{I}_m| < |\ddot{I}_{m+1}|. \quad (27)$$

Abbildung 14 zeigt den Verlauf der ersten Ableitung. In rot ist die Schwelle eingezeichnet, welche überschritten werden muss, damit der nachfolgende Nulldurchgang als solcher gewertet wird. Im Gegensatz zum ersten Algorithmus muss hier $C_{Schwelle}$ möglichst klein gewählt werden, da sonst bei langen Bewegungen die Ränder nicht mitgezählt werden. Aufgrund der schnelleren Schwingung im inneren einer Bewegung ist die Ableitung dort größer als am Rand. In grün sind die vier Nulldurchgänge eingezeichnet, welche nicht gezählt werden, da das Signal nach dem vorherigen Nulldurchgang nicht die Schwellen überschritten hat. Da bei den Endpunkten die Krümmung minimal sein soll, die Richtung dieser jedoch irrelevant ist, dürfen nur die Beträge der zweiten Ableitung verglichen werden. Auch hier können mit den gleichen Einschränkungen wie beim ersten Algorithmus die übernächsten Nachbarn der zweiten Ableitung zum Vergleich hinzugezogen werden, um deren Minima zu finden.

Um die Robustheit noch zu verbessern, kann der erste Algorithmus in abgeschwächter Form zusätzlich implementiert werden. Da am Rand einer Bewegung die Abstände zwischen den Maxima zunehmen, kann verlangt werden, dass der Abstand des letzten und vorletzten Maximums $\Delta_{k,Ende}$ der k -ten Bewegung, größer sein muss als C_{Zeit} -mal der minimale Abstand zweier Maxima $\Delta_{k,min}$

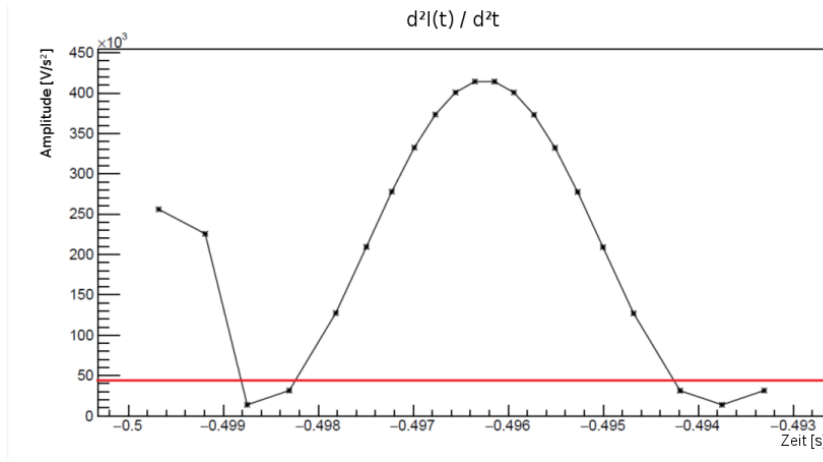


Abbildung 15: Schwelle $C_{Amp} \approx 0.1$ (rot) im Verlauf des Betrages der zweiten Ableitung an den Nullstellen der ersten Ableitung.

dieser Bewegung

$$\Delta_{k,Ende} > C_{Zeit} \cdot \Delta_{k,min}. \quad (28)$$

Dies verhindert, dass Vertiefungen im Verlauf des Betrages der zweiten Ableitung an den Nullstellen der ersten während einer Bewegung nicht als Endpunkte gewertet werden. Hier muss wiederum darauf geachtet werden, dass C_{Zeit} nicht zu groß gewählt wird, da es sonst zu Überzählungen kommt. Es kann ebenfalls noch eine Schwelle eingeführt werden, unter welcher die gefundenen Tiefpunkte liegen müssen, um als Endpunkte gewertet zu werden. Dies ist in Abbildung 15 dargestellt. Wenn C_{Amp} die Parametrisierung dieser Schwelle ist (rote Linie in Abbildung 15) und m wieder die Positionen der Nullstellen der ersten Ableitung bezeichnet, $|\ddot{I}_{max}|$ das globale Maximum des besagten Betrages der zweiten Ableitung ist und $|\ddot{I}_{min}|$ das globale Minimum sowie Δ_m der zeitliche Abstand der Datenpunkte m und $m - 1$, muss für die Endpunkte der k -ten Bewegung gelten

$$|\ddot{I}_m| < |\ddot{I}_{m+1}|, \quad (29)$$

$$|\ddot{I}_m| < |\ddot{I}_{m-1}|, \quad (30)$$

$$|\ddot{I}_m| < C_{Amp} \left(|\ddot{I}_{max}| - |\ddot{I}_{min}| \right), \quad (31)$$

$$\text{und } \Delta_m > C_{Zeit} \cdot \Delta_{k,min}. \quad (32)$$

In Abbildung 16 ist nochmal ein komplettes Tripel aus Signal, dessen Ableitung und des besagten Verlaufs der zweiten Ableitung dargestellt. Abgebildet sind Daten der Frequenzgangmessung der dritten Lage, welche mit 103 Hz angeregt wurde.

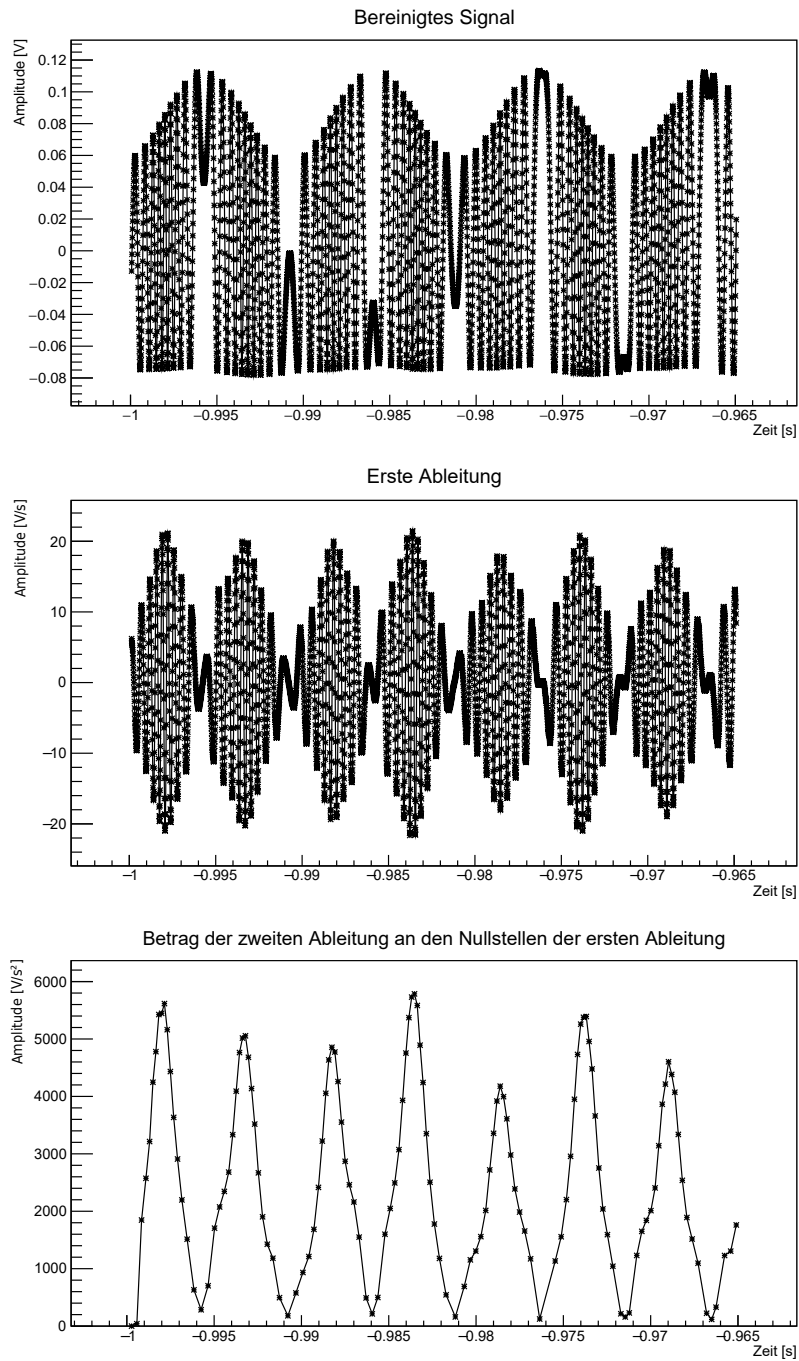


Abbildung 16: Daten der Frequenzgangmessung der drittel Lage, Anregung bei 103 Hz, oben: Messdaten, mitte: Erste Ableitung, unten: Betrag der zweiten Ableitung an den Nullstellen der ersten Ableitung

3.3 Optimierung der Konstanten für Zeit und Amplitude

Damit beide Algorithmen vernünftige Ergebnisse erzielen, müssen die Parameter C_{Zeit} , C_{Amp} und $C_{Schwelle}$ angemessen gewählt werden. Auch hier wäre es von Nutzen, wenn dies automatisch vom Programm übernommen wird.

Unter der Annahme, dass eine Schwingungsamplitude dominiert, können die Parameter so gewählt werden, dass die Standardabweichung in der Verteilung der gezählten Amplituden minimal wird. Hierzu sollten die Anfangsparameter so definiert sein, dass die Amplitude zuerst überschätzt wird, da im Falle einer massiven Unterschätzung die Standardabweichung ebenfalls klein wird, da nur sehr kleine Schwingungen „gefunden“ werden.

Bei durch den Strom des Kühlgases hervorgerufenen Vibrationen kann die Annahme einer dominierenden Schwingungsamplitude nicht gemacht werden, infolgedessen muss ein anderes Tuningverfahren verwendet werden.

4 Grundeinstellungen der Simulation

Im Folgenden wird nur noch der zweite Algorithmus untersucht, da der erste nicht ausreichend genau funktioniert, um verlässliche Ergebnisse zu erzielen. Hiermit ist besonders die Sensitivität gegenüber eines konstanten Untergrundes gemeint, welcher bei Flussdaten und Frequenzdaten mit hoher Amplitude nicht gegeben ist.

4.1 Simulation

Um die Effizienz des Algorithmus zu berechnen, müssen die Ergebnisse, die dieser liefern soll, bekannt sein. Dazu wurde angenommen, dass das Detektormodul harmonisch schwingt, und anhand dessen die theoretische Intensität, welche der Detektor unter Vernachlässigung von Einflüssen des optischen Aufbaus anzeigen sollte, berechnet. Für die Detektorauslenkung $A(t)$ wurde eine Überlagerung von bis zu drei Sinus-Schwingungen verschiedener Phase ϕ_i , Amplitude A_i und Frequenz f_i verwendet

$$A(t) = \sum_{i=1}^3 (A_i \cdot \sin(2\pi \cdot f_i \cdot t + \phi_i)) + A_0 \cdot t. \quad (33)$$

Mit Gleichung 8 wurden die Intensitäten berechnet und im gleichen Datenformat wie die Messdaten gespeichert. Auf diese Weise wurden Simulationen für Effizienz- und Optimierungsstudien erzeugt. Abbildung 9 zeigt eine Schwingung von 12 Maxima, was einer Auslenkung aus der Ruhelage um die dreifache Wellenlänge des verwendeten Lasers entspricht. Die übrigen Parameter wurden so gewählt, dass der Untergrund der Intensität $I_{\text{Untergrund}}$ verschwindet. I_0 wurde auf 10V gesetzt.

Es wurden bei allen Simulationen folgende Einstellungen verwendet:

$$\begin{aligned} I_{\text{Untergrund}} &= 0V, \\ I_0 &= 10V, \\ \#_{\text{Datenpunkte}} &= 1000000, \\ \text{und } \lambda_{\text{Laser}} &= 635nm. \end{aligned}$$

Des Weiteren wird die Amplitude der Schwingung immer in der Anzahl der Maxima angegeben, was dem Viertel der Wellenlänge des Lasers entspricht.

4.2 Unterschiede zu Messdaten

Wie zu erwarten ist, sind die Simulationen viel sauberer, als die real gemessenen Daten. Dies liegt an äußeren Einflüssen, z.B. Luftbewegungen oder Geräusche im Raum, und an optischen Einflüssen des Aufbaus. Eine detaillierte Beschreibung lässt sich in der Bachelorarbeit von Lars Henkenmann nachlesen [4].

Realdaten unterliegen somit einem nicht konstanten Untergrund und haben eine veränderliche Maximalamplitude, was beim Auswerten der Daten zu Schwierigkeiten führt.

Ein nicht konstanter Untergrund verschiebt beim ersten Algorithmus die Lage der Nulldurchgänge, was zu einer Verfälschung des Ergebnisses führt. Die Abstände zwischen den Nulldurchgängen verändern sich und somit ist die Definition der Endpunkte durch diese nichtig. Da der Untergrund jedoch in der Regel viel niederfrequenter ist als das flussinduzierten oder vom Lautsprecher angeregten Vibrationen, hat er weniger Auswirkungen auf den zweiten Algorithmus. Die Änderung der Maximalamplitude kann beide Algorithmen beeinflussen. Falls sie symmetrisch in der Zeit verläuft, hat sie keinen Einfluss auf den ersten Algorithmus, da nur die Position der Nulldurchgänge betrachtet wird, wobei in diesem Fall $C_{Schwelle}$ gesenkt werden muss. Der zweite Algorithmus reagiert sensibler, da eine Änderung der Höhen der Maxima einer Änderung der Krümmung und somit der zweiten Ableitung entspricht, welche zum Finden der Endpunkte verwendet wird. Ist Frequenz der Amplitudenmodulation genauso groß oder kleiner als die der Bewegung, so hat sie keine Auswirkungen. Höherfrequente Änderungen jedoch führen zu Schwankungen der Krümmung des Signals und somit zu falschen Minima im Verlauf des Betrages der zweiten Ableitung an den Nullstellen der ersten Ableitung. Diese sorgen dafür, dass Endpunkte an Positionen gefunden werden, wo keine sind, und somit entstehen Unterzählungen.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde auf die Simulation von Störungen verzichtet und es wurden nur „perfekte“ Daten erzeugt.

Beispiele für Simulationen und gemessene Daten finden sich in den Abbildungen 11 (simuliert) und 16 oben (gemessen). Im Vergleich sieht man, dass die Maximalamplitude der Simulation konstant bleibt. Bei den Messdaten liegt eine Schwankung der Höhen der Extrema vor, wobei die der Minima wesentlich schwächer ist, als die der Maxima. Messdaten, die derartigen Schwankungen unterliegen, lassen sich problemlos auswerten, da die Frequenz der Schwankungen nicht kleiner als die der Modulbewegung ist. Die Auswertung des Signals aus Abbildung 26, welches ein Beispiel starker Amplitudenmodulation ist, liefert keine verlässlichen Ergebnisse.

5 Ergebnisse aus Simulation und Messungen

Hier werden die Ergebnisse der beiden Algorithmen dargestellt. Dazu wurden zum einen Daten von Messungen mit dem Interferometer verwendet und zum anderen Simulationen.

Wie auch im vorherigen Kapitel werden sämtliche Amplituden in Anzahl der Maxima angegeben, was einem Viertel der Wellenlänge des Lasers entspricht.

5.1 Effizienzen bei Simulationen

Zum Effizienztest wurden Simulationen mit verschiedenen Frequenzen f_i und Datenraten R_i erzeugt. Für einfache Schwingungen wurden die Parameter wie in Tabelle 1 gewählt. Die Datenraten werden in $\frac{\text{MS}}{\text{s}}$ (Megasample pro Sekunde) angegeben. Dabei entspricht $1 \frac{\text{MS}}{\text{s}} \equiv 10^6$ Messpunkten pro Sekunde.

Tabelle 1: Parameter der Simulationen mit einer Frequenz. Die Amplituden A_{min} und A_{max} sind in Anzahl der Maxima angegeben.

Datei	f_1	$R [\frac{\text{MS}}{\text{s}}]$	A_{min}	A_{max}
1	100	1	1.1	300
2	100	0.25	1.1	300
3	300	1	1.1	300
4	300	0.25	1.1	300

Diese Simulationen wurden mit verschiedenen Glättungsverfahren und -breiten untersucht. Die untersuchten Einstellungen finden sich in Tabelle 2.

Tabelle 2: Glättungseinstellungen - Die erste Zahl der Glättungsbreite gibt den Glättungsparameter an, die zweite die Zahl der Punkte, die zur Glättung berücksichtigt werden.

Glättungsbreite	Filter	Grad des Polynoms
2 → 5 Pkt.	Savitzky-Golay	2 / 3
4 → 9 Pkt.	Gleitender Mittelwert	0
6 → 13 Pkt.	Savitzky-Golay	4 / 5
12 → 25 Pkt.	Savitzky-Golay	4 / 5

Für die Überlagerung zweier Schwingungen wurde eine Grundschwingung von $f_1 = 100$ Hz mit 10 Maxima bei einer Datenrate von $R = 1 \frac{\text{MS}}{\text{s}}$ gewählt. Zu dieser wurde eine zweite Schwingung mit der Frequenz f_2 und Amplitude A_2 addiert.

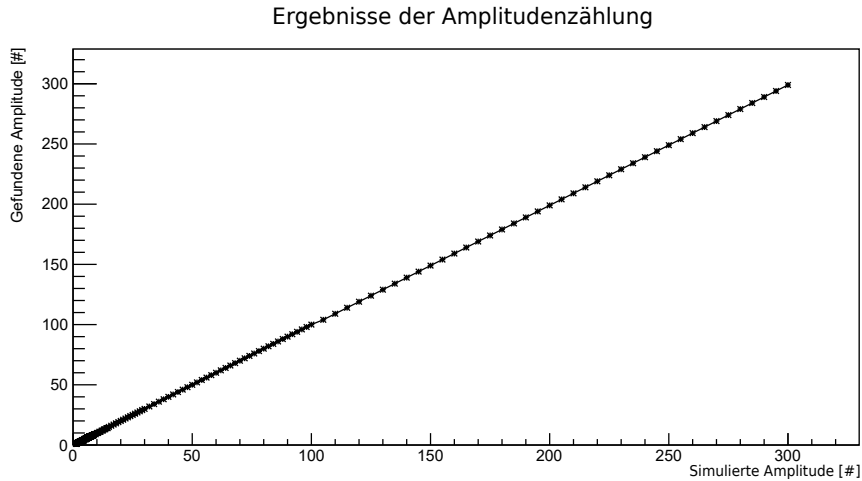


Abbildung 17: Zählung der Amplituden bei einer Glättung über 13 Punkte. Die Zählung funktioniert beinahe fehlerlos. Ab 100 Maxima wird die Amplitude jedoch konstant um 1 unterschätzt. $C_{Schwelle} = 0.05$.

5.1.1 Einfache Schwingung

Hierzu wurde eine Modulschwingung $A(t) = A_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f_i \cdot t)$ erzeugt und A_0 für jede Frequenz f_i aus Tabelle 1 angepasst. Danach wurde jede der vier Simulationen mit dem Algorithmus ausgewertet und die ermittelte Amplitude gegen die erzeugte aufgetragen. Der eingetragene Fehler der Ordinate ist gleich der Standardabweichung der Verteilung der gezählten Amplituden. Die entstandenen Abbildungen werden im Folgenden behandelt.

Der Algorithmus macht in den meisten Fällen bei einem simulierten Signal keine Fehler. Jedoch sind zum einen sehr kleine Amplituden (< 3 Maxima) zum anderen sehr große problematisch.

Die Analysen haben ergeben, dass der Algorithmus ab 1.2 Maxima anfängt zu zählen. Abbildung 17 zeigt die Ergebnisse der Zählung der Simulation. Auf der Abzisse ist die erzeugte Amplitude aufgetragen, auf der Ordinate die gezählte. Man sieht, dass beides übereinstimmt und dass bis zu 100 Maxima keine Fehlzählung auftritt. Ab dort wird jede Schwingung konstant um 1 unterschätzt, was am Glätten der Datenpunkte und an dem Parameter $C_{Schwelle}$ liegt.

Das Programm kann nur ganze Amplituden zählen, wobei zum Beispiel für eine Glättungskonstante von 6 gilt, dass kleine Schwingungszahlen ($1 < n < 9$) $n - 0.3$ bis $n + 0.6$ als n gezählt werden. Siehe dazu Abbildung 18. Bei größeren Amplituden verschiebt sich der Punkt, ab welchem eine weitere Schwingung gezählt wird zu höheren Werten, was zu der oben erwähnten Unterschätzung der Schwingungszahlen führt. Der Bereich, in dem eine Schwingung als gleiche Amplitude gewertet wird, hängt von der Amplitude selbst ab, sowie von dem Schwellenparameter $C_{Schwelle}$

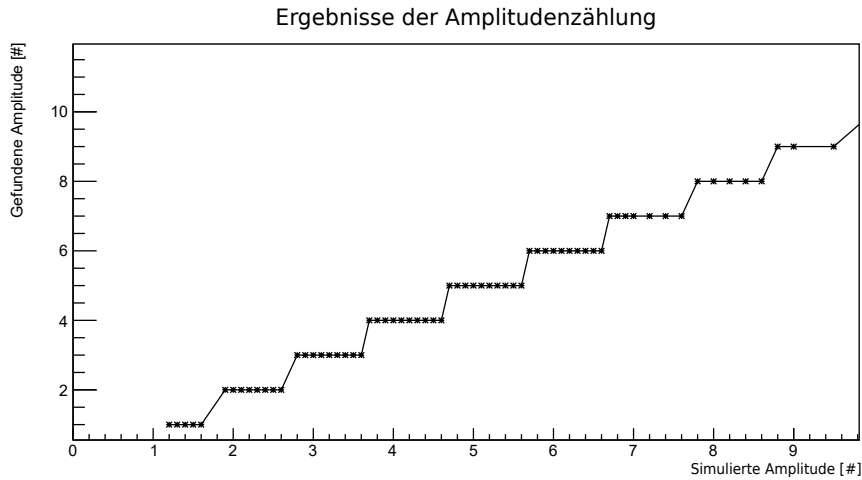


Abbildung 18: Vergrößerung des Beginns der Abbildung 17. Man sieht, in welchem Bereich die Schwingungen gezählt werden, und ab wann ein nächst höherer Wert gefunden wird.

Die Schwingungen mit Amplituden von 1.7, 1.8 und 2.7 Maxima können nicht gezählt werden. Da zwischen dem 1.7 und 1.8 ein neues Extrema-Paar in der ersten Ableitung entsteht, sind die Werte zwischen den beiden nicht hoch/tief genug, um die Schwelle zu überwinden, sodass das nächste Extrema gezählt wird. Das Setzen dieser Schwelle wäre zwar bei Simulationen nicht nötig, die Parameter des Algorithmus wurden jedoch zum besseren Vergleich genau wie bei Realdaten gewählt.

Abbildung 19 zeigt die Entstehung eines neues Maximum-Minimum-Paares in der ersten Ableitung. Bei 3.6 Amplituden ist das Paar schon vorhanden, wird aufgrund der Schwelle jedoch nicht gewertet, da es noch zu niedrig ist. Es werden drei Maxima gezählt. Das Signal bei 3.7 Amplituden erfüllt die Bedingung und wird deshalb als vier Maxima gezählt.

In Abbildung 20 sieht man einen starken Abfall der gezählten Amplitude zwischen 205 und 210 Maxima bei einer Glättung über 25 Punkte. Das liegt daran, dass hier die Datenrate dem Glättungsparameter nicht mehr gerecht wird. Um 25 Punkte mit einem Polynom fünften Grades zu fiten, dürfen diese nur höchstens vier Extrema bilden. Man sieht jedoch im Gegensatz zur Glättung über 13 Punkte, dass der Knick bei 100 nicht auftritt. Dies liegt an einer Verschiebung des Punktes, ab dem die beiden neuen Minima gezählt werden. Da die erste Ableitung (Vergleiche dazu Abbildung 16 Mitte) im Zentrum einer Bewegung bei höheren Schwingungszahlen steigt, steigt auch das Akzeptanzniveau der Nullstellen. Somit tritt das Paar erst später auf und die Amplitude wird um eins unterzählt. Dieses Verhalten ist bisher nur bei einer Glättungsbreite von 13 aufgetreten.

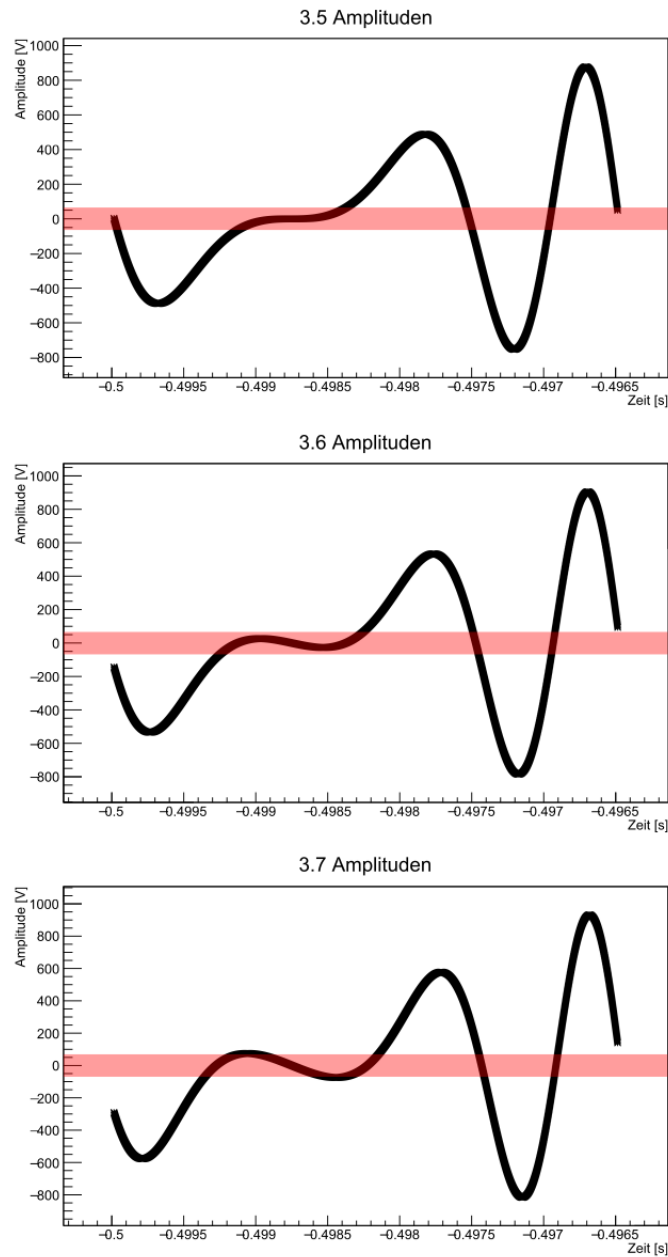


Abbildung 19: Entstehung eines neuen Extrema-Paars in der ersten Ableitung bei einer Frequenz von 100 Hz und $1 \frac{\text{MS}}{\text{s}}$ Datenrate. Sowohl die Bewegung mit 3.5 als auch die mit 3.6 Maxima schaffen es nicht, die Schwelle zu überschreiten. Somit werden ihnen 3 Maxima zugeordnet, im Gegensatz zu der Bewegung mit 3.7 Maxima, welche die Schwelle überschreitet und somit als 4 gewertet wird.

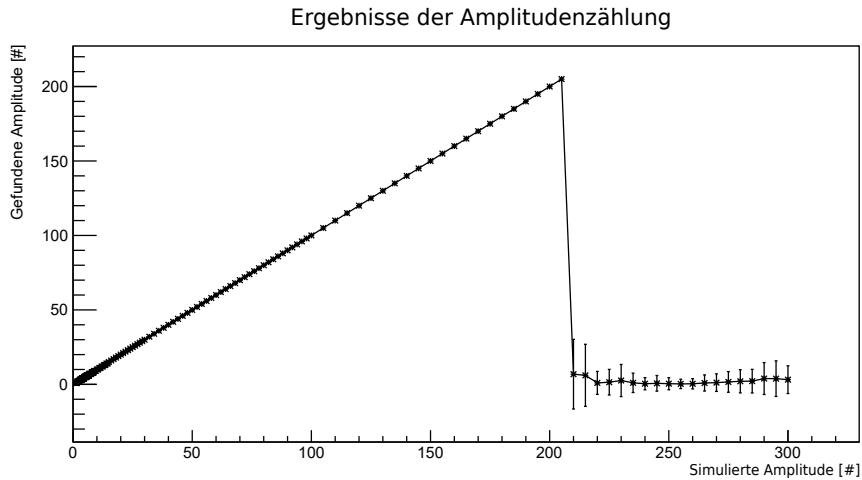


Abbildung 20: Zählung der Amplituden bei einer Glättung über 25 Punkte

Die maximal bestimmbare Amplitude ist demnach abhängig von der Datenrate und der Glättungsbreite. Eine Glättung über eine größere Anzahl an Punkten braucht eine höhere Datenrate. In Tabelle 3 steht die maximale Anzahl an Schwingungen, die bei gegebener Datenrate und Frequenz gefunden werden kann. In den Spalten sind die vier simulierten Messreihen aufgetragen und in den Reihen die vier verschiedenen Glättungseinstellungen. Daraus ergibt sich für die benötigte Datenrate R bei n Schwingungen der Frequenz f

$$R > C_{Glatt} \cdot f \cdot n, \tag{34}$$

wobei der Wert von C_{Glatt} ebenfalls in Tabelle 3 zu finden ist und aus den dortigen Messpunkten berechnet wurde. Er wurde auf zwei signifikante Stellen nach Addition der Standardabweichung nach oben gerundet. Somit kann ein sicheres Ergebnis berechnet werden. Da es sich hier um eine Abschätzung handelt, wird auf die Angabe eines Fehlers verzichtet.

Tabelle 3: Maximal messbare Amplituden bei verschiedenen Datenraten und Glättungsbreiten. Die Glättungsbreiten sind in den Zeilen dargestellt und die Simulationen aus Tabelle 1 in den Spalten. In der letzten Spalte findet sich der Parameter zur Bestimmung der minimal benötigten Datenrate, wenn Frequenz und Anzahl der Maxima bekannt sind. $C_{Schwelle} = 0.03$.

Glättung\Datei:	1	2	3	4	$C_{Glatt}[\frac{kS}{s \cdot Hz}]$
5 Pkt.	638.4	160.3	212.8	53.4	0.016
9 Pkt.	318.3	80.5	106.1	26.8	0.032
13 Pkt.	525	131.4	174.9	43.8	0.029
25 Pkt.	265.2	67	70	27.1	0.040

5.1.2 Überlagerung zweier Schwingungen

Hierzu wurden Schwingungen gemäß Gleichung 6 mit $n = 2$ erzeugt. Die Amplituden und Frequenzen wurden gemäß Tabelle 4 gewählt. Die Phase zwischen den beiden Schwingungen betrug $\phi_1 = \frac{\pi}{4}$. Zur Überprüfung der Richtigkeit wurde die Auslenkung der einzelnen Schwingungen vor der Umrechnung in das Intensitätssignal bestimmt, indem der vertikale Abstand zwischen den Extrema abgelesen, in Schwingungen umgerechnet und in ein Histogramm eingetragen wurde. Dieses konnte dann mit dem Histogramm aus der Schwingungszählung des Algorithmus verglichen werden. Die Einträge des Histogramms der Originalschwingung wurden so gewählt, dass 0.5 bis 1.5 Schwingungen als eine gezählt werden, 1.5 bis 2.5 als 2 usw. Die Parameter waren die selben, wie bei Messdaten (Vergleiche dazu Tabelle 7), und es wurde über 13 Punkte geglättet.

Die qualitative Überprüfung der Funktion des Algorithmus lässt sich leicht durch den Vergleich der erzeugten und der gefundenen Bewegung durchführen. In den Abbildungen 21 und 22 sind links das Originalsignal und rechts das vom Algorithmus berechnete Signal gezeigt.

Man sieht, dass der Algorithmus in der Lage ist, die Modulbewegungen in den meisten Fällen aufzulösen. Problematisch sind solche, in denen die Schwingungszahl einzelner Bewegungen kleiner 2 wird, da in diesen Fällen der Algorithmus an seine Grenzen kommt und Start- und oder Endpunkte teilweise nicht findet. Dadurch entstehen Sprünge in der Rekonstruktion der Modulbewegung und diese entspricht nicht mehr der Realität. Ebenfalls problematisch sind regelmäßig auftretende Über- oder Unterzählungen, welche wie eine Drift in der Modulbewegung aussehen. In Abbildung 23 findet sich ein Beispiel einer Drift und in Abbildung 24 ein Sprung in der Rekonstruktion. Ein Sprung ist in der Regel kein Problem für die Auswertung der Daten, da einzelne Ausreißer bei einer großen Anzahl korrekt bestimmter Schwingungen kaum ins Gewicht fallen.

Zur Quantifizierung der Genauigkeit des Codes werden drei Werte berechnet. Der Erste berechnet sich aus der Summe aller erzeugten Schwingungen $\#_e$ sowie aller gezählten $\#_g$ und gibt an, welcher Prozentsatz an Schwingungen nicht gezählt wurde. Da die Anzahl der Schwingungen verglichen wird, fallen große

Tabelle 4: Parameter der Simulationen bei Überlagerung von zwei Frequenzen. In der ersten Spalte ist die Nummer der Simulation angegeben. Die Amplituden sind in Maxima angegeben.

Datei	f_1 [Hz]	A_1	f_2 [Hz]	$A_{2,min}$	$A_{2,max}$
0	100	10	5	1	20
1	100	10	10	1	20
2	100	10	30	1	20
3	100	10	66	1	20
4	100	10	80	1	20
5	100	10	120	1	20
6	100	10	150	1	20
7	100	10	200	1	20
8	100	10	333	1	20
9	100	10	400	1	20

Bewegungen stärker ins Gewicht, als kleine

$$E_{fehlend} = \frac{\#_g - \#_e}{\#_e}. \quad (35)$$

Ein negativer Wert bedeutet, dass zu wenige Schwingungen gefunden wurden. Um zu überprüfen, ob die gezählten Werte im Mittel die korrekte Größe haben, wird die prozentuale Abweichung des Mittelwerts (Mittel über alle Schwingungen pro Bewegung) $E_{Mittelwert}$ berechnet

$$E_{Mittelwert} = \frac{\bar{\#}_g - \bar{\#}_e}{\bar{\#}_e}. \quad (36)$$

Für den dritten Wert wird noch die Abweichung der Breite σ der beiden Verteilungen untersucht. Da es in diesem Falle unpraktisch ist, direkt die prozentuale Abweichung zu berechnen, wird diese relativ zu Mittelwert $\bar{\#}_e$ angegeben

$$E_{Breite} = \frac{\sigma_g - \sigma_e}{\bar{\#}_e}. \quad (37)$$

Damit eine gute Übereinstimmung vorliegt, müssen die Beträge aller Werte möglichst klein sein.

Die Ergebnisse für die Simulationen aus Tabelle 4 befinden sich in den Abbildungen 36 bis 46, welche im Appendix zu finden sind. Der schwarze Graph gibt den Fehlerparameter $E_{fehlend}$ wieder, der rote $E_{Mittelwert}$ und der grüne E_{Breite} . Bei Überlagerungen der Grundschiwingung (100 Hz mit zehn Maxima) mit Schwingungen einer Frequenz kleiner gleich 150 Hz liegen die Abweichungen stets unter 21 %, meistens sogar unter 10 %. Darüber gibt es Abweichungen von über 100 %. Am stärksten weichen die Überlagerungen mit drei und vier Maxima bei 200 Hz

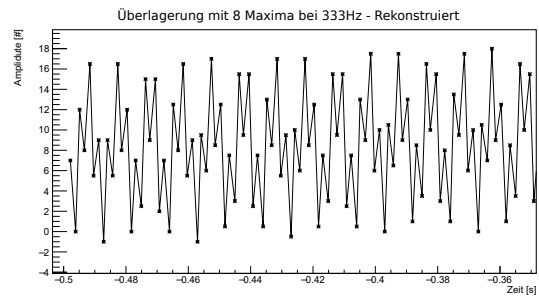
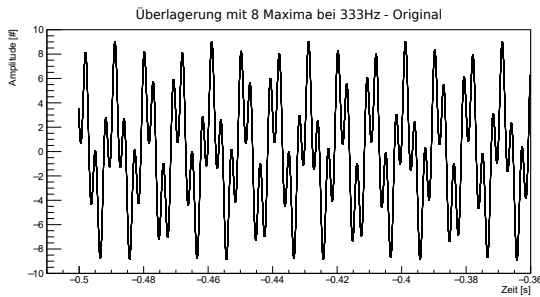


Abbildung 21: Überlagerung von zehn Maxima bei 100 Hz mit acht Maxima bei 333 Hz

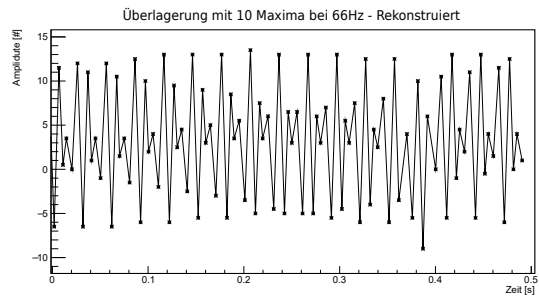
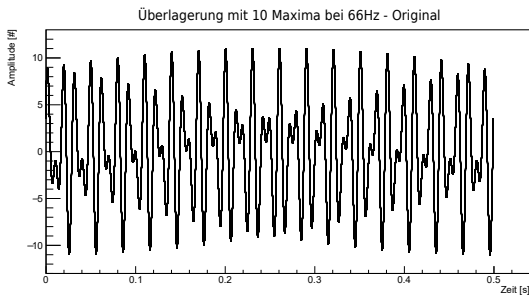


Abbildung 22: Überlagerung von zehn Maxima bei 100 Hz mit zehn Maxima bei 66 Hz

ab. Die entstehende Schwingung hat viele Bewegungen mit einer Amplitude < 2 , welche vom Algorithmus nur sehr ineffizient erkannt werden. Bewegungen mit 0 und 0.5 Maxima (sehr kleine Schwingungen), $0 \text{ Maxima} < A < 1.2 \text{ Maxima}$, werden niemals erkannt, kommen jedoch in diesem Signal vor. Diese werden teilweise auch zu Bewegungen mit 2 Maxima zusammengezählt, was den Mittelwert ebenfalls erhöht. Dies ist auch der Grund für die Fehler über etwa 10% . Ein Überschätzung des Mittelwert kommt ebenfalls zustande, wenn die sehr kleinen Schwingungen komplett ignoriert werden und somit nur die größeren gewertet werden. Eine Unterschätzung findet bei Sattelpunkten statt. Diese werden ebenfalls als Endpunkte gewertet und teilen eine Bewegung in zwei kleinere auf. Dadurch wird zusätzlich die Breite der Verteilung erhöht. Die kleineren Fehler sind in einer Über- oder Unterzählung um eine halbes bis ein Maxima begründet, welches auch der Fehler ist, welcher für eine Einzelzählung mindestens angenommen werden muss.

Die Summe über alle Schwingungen, die durch den Algorithmus gefunden werden, ist stets kleiner als die Summe über alle erzeugten. Dies liegt an der Implementierung, welche zum einen die letzten und ersten Punkte, ob des Glättens, überspringt und zum anderen Schwingungen mit einem oder weniger Maxima nicht weiter betrachtet, da diese öfters Fehlzählungen sind, die besonders bei

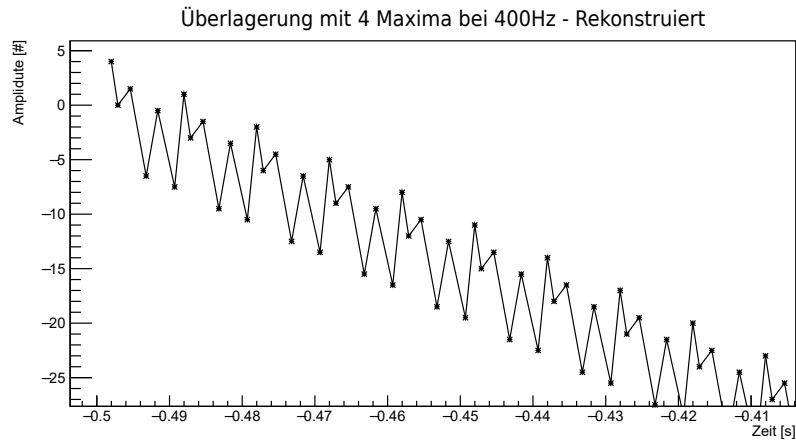


Abbildung 23: Überlagerung von zehn Maxima bei 100 Hz mit vier Maxima bei 400 Hz. Es ist ein Drift in negativer Richtung zu erkennen. Hier werden zwei kleine Bewegungen nicht gezählt.

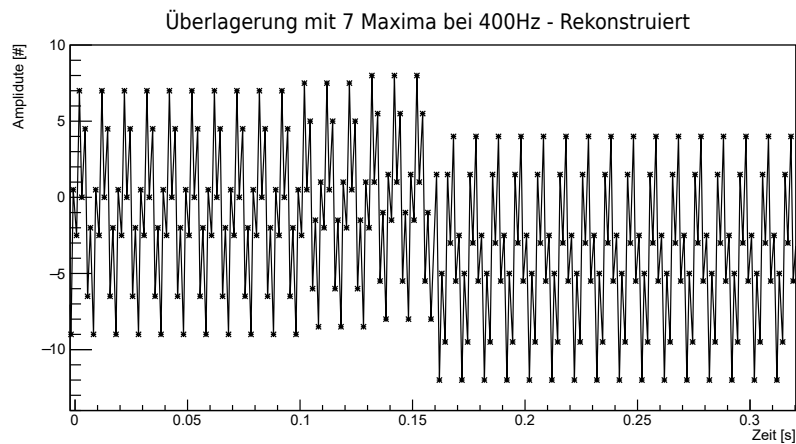


Abbildung 24: Überlagerung von zehn Maxima bei 100 Hz mit sieben Maxima bei 400 Hz. Es ist ein Sprung in negativer Richtung zu erkennen. Hier werden bei $t \approx 0.16$ s die drei Maxima große Bewegung nach unten und die folgende sieben nach oben zu einer zehn Maxima Bewegung nach unten zusammengefasst. Das nachfolgende Signal ist so drei Maxima niedriger und vertikal gespiegelt.

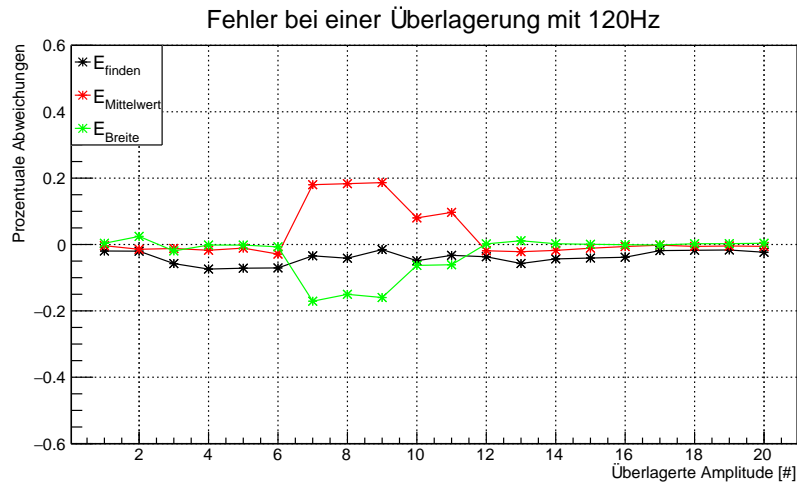


Abbildung 25: Fehler bei einer Überlagerung mit 120 Hz

stark amplitudenmodulierten Signalen auftreten. Exemplarisch ist in Abbildung 25 noch Simulation 5 gezeigt, welche die Überlagerung mit 120 Hz untersucht. Man sieht die Unterschätzung der Gesamtschwingungszahl, sowie die zeitweise stärkere Überschätzung des Mittelwerts bei einer Überlagerung mit 7 bis 11 Maxima. In diesem Bereich ist die Breite der Verteilung erwartungsgemäß zu klein. Die sehr kleinen Schwingungen wurden übersehen, was eine schmalere Verteilung erzeugt.

5.1.3 Überlagerung von mehreren Schwingungen

Bei der Überlagerung mehrerer Schwingungen wird zur Überprüfung nur noch die maximale Auslenkung des Moduls betrachtet, da dies die interessante Größe ist.

Hierzu wurden drei Schwingungen verschiedener Frequenzen und Amplituden überlagert. In Tabelle 5 finden sich die verwendeten Frequenzbereiche, durch welche die zehn Amplitudentripel aus Tabelle 6 geführt wurden.

Die Frequenzen wurden so gewählt, dass die erste grob durchgestimmt wird, während die zweite einen, im Vergleich dazu, feinen Verlauf über einen großen Bereich hat. Die dritte bleibt bei kleineren Frequenzen und soll ein möglichst großes gemeinsames Vielfaches mit den anderen Frequenzen haben. Dadurch ist ein großer Bereich an möglichen Zusammensetzungen von Frequenz und Amplitude abgedeckt.

Problematisch sind vor allem Signale, bei denen sich die Teiloszillationen an manchen Stellen gegenseitig auslöschen, da so kleine, nicht zählbare Amplituden entstehen, welche Sprünge im Verlauf erzeugen und somit die maximale Auslenkung erhöhen. Selbiges gilt für kleine periodisch auftretende Schwingungen, welche zu einer Drift führen. Somit wurde in vielen der einzelnen Durchgänge

Tabelle 5: Frequenzbereiche, welche mit den zugehörigen Amplituden der nachfolgenden Tabelle durchgestimmt wurden. Dabei bezeichnet f_{min} die kleinste und f_{max} die größte Frequenz. $f_{Schritt}$ gibt die Schrittweite zwischen diesen beiden Frequenzen an.

Frequenz	f_{min} [Hz]	f_{max} [Hz]	$f_{Schritt}$ [Hz]
1	100	500	100
2	50	500	25
3	40	105	13

Tabelle 6: Amplitudenwerte für die Überlagerung von drei Schwingungen, angegeben in Anzahl der Maxima. A_1 wird der Frequenz aus der ersten Zeile der oberen Tabelle zugeordnet. A_2 der Zweiten und A_3 der Dritten.

Durchgang	A_1	A_2	A_3
0	15	10	5
1	5	10	15
2	10	15	5
3	10	5	15
4	15	5	10
5	5	15	10
6	5	5	5
7	4	6	5
8	2	3	2
9	9	2	15

überzählt. Unterzählungen hat es in Bezug auf die Maximalamplitude nicht gegeben. Somit kann der Algorithmus zumindest als obere Abschätzung verwendet werden. Es gab teilweise massive Überschätzungen.

Bei individueller Betrachtung der Ergebnisse sieht man, dass Sprünge und Drifts bei Bewegungen auftreten, welche Schwingungen mit weniger als 4 Maxima beinhalten. Dabei sind die Auswirkungen auf das Ergebnis bei Schwingungen mit weniger als 3 Maxima deutlich stärker. Es kann daher gesagt werden, dass Bewegungen ab 4 Schwingungen korrekt gezählt werden können. Darunter können Fehler auftreten, die zu einer Überschätzung der Gesamtbewegung führen. Die obere Schranke bleibt weiterhin die Punktdichte pro Frequenz und Schwingung.

5.2 Ergebnisse bei Messdaten

Der Algorithmus wird nun auf reale Messdaten, sowohl die Frequenzgänge, als auch die Flussdaten, angewendet. Die gewählten Parameter sind in Tabelle 7 dargestellt und haben während des Entwickelns und Testens des Algorithmus und dessen Implementierung die besten Ergebnisse erzielt. Der Zeitparameter ist klein genug, um auch kurze Schwingungen (< 3 Maxima) zuzulassen, und groß genug, um bei Signalen mit Schwankungen des Betrages der zweiten Ableitung an den Nullstellen der ersten Ableitung Unterbrechungen des Zählens weitab von den Rändern zu verhindern. Bei manchen der Bewegungen wäre es besser gewesen, wenn C_{Zeit} ein größerer Wert zugeordnet gewesen wäre, jedoch konnte bisher keine sinnvolle Implementierung einer Parameterabhängigkeit vom Signal gefunden werden. C_{Amp} ist gerade groß genug, um möglichst wenige Endpunkte zu überspringen, jedoch werden auch hier Schwankungen der Höhen der Maxima während einer Bewegung erst gegen dessen Ende auch als Endpunkte gewertet, da die Schwelle noch nicht unterschritten ist. $C_{Schwelle}$ wurde gerade so gewählt, dass das Rauschen keinen Einfluss hat.

Tabelle 7: Parameter der Auswertung der Messdaten

C_{Zeit}	=	1.4
C_{Amp}	=	0.1
$C_{Schwelle}$	=	0.03

5.2.1 Gründe der Fehlzählungen

Die Fehlzählungen der Signale haben zwei Ursachen: Die Form der Daten und die daraus resultierende Wahl der Parameter.

Wie in Abbildung 26 zu sehen ist, ist der Verlauf des Betrages der zweiten Ab-

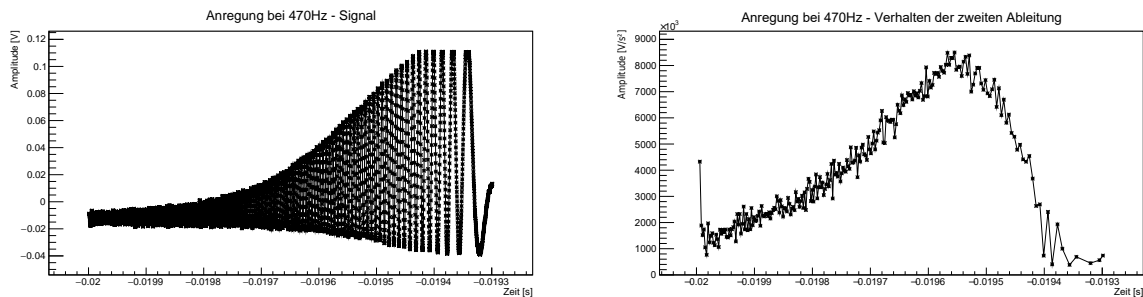


Abbildung 26: Schlecht zu zählendes Signal. Links: Signal, rechts: Betrag der zweiten Ableitung an den Nullstellen der ersten - Anregung der dritten Detektorlage mit 470 Hz.

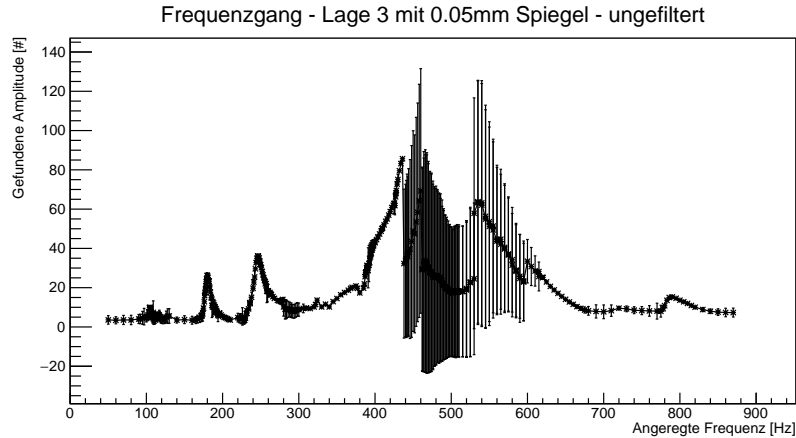


Abbildung 27: Ungefilterter Frequenzgang der dritten Detektorlage.

leitung an den Nullstellen der ersten Ableitung nicht glatt. Daher werden auch während einer Bewegung Minima gefunden, welche daraufhin fälschlicherweise als Endpunkte interpretiert werden. Es kommt zu einer Unterschätzung der Schwingungsamplitude. Dies kann in einem gewissen Maße verhindert werden, wenn der Parameter für die Amplitude C_{Amp} hinreichend klein gewählt wird. Ist er jedoch zu klein, werden Endpunkte nicht mehr gefunden und es kommt zu Mehrfachzählungen. Im Falle von monofrequenten Schwingungen ist das Ergebnis ein etwa ganzzahliges Vielfaches der eigentlichen Amplitude und kann, wenn die Datenrate hoch genug ist und wenigstens ein Teil der Schwingungen korrekt gezählt wurde, anhand der Frequenzverteilung korrigiert werden. In sonstigen Fällen ist es schwierig, die Fehlzählung zu determinieren.

Ein weiterer Fehler ist die Eigenschaft des Algorithmus nur ganzzahlige Schwingungen zählen zu können. Daher werden bei der alternierenden Addition (vgl. dazu Gleichung 16) pro Zählung kleine Fehler gemacht, die sich summieren können und somit zum Beispiel einen Drift vortäuschen.

5.2.2 Frequenzgänge

Zuerst werden die Frequenzgänge der äußeren Detektorlagen untersucht. Abbildung 27 zeigt das Resonanzverhalten eines Moduls der dritten Lage. Im Verlauf sieht man, dass bei den kleineren und größeren Amplituden die Fehlerbalken im Vergleich zum Rest sehr groß sind. Grund dafür ist, dass Bewegungen mit weniger als 4 Maxima nicht effektiv gezählt werden und dass bei Messdaten die Anzahl der Fehlmessungen bei großen Amplituden steigt. Das Verhalten bei Bewegungen mit vielen Maxima liegt nicht nur an dem Algorithmus, sondern vielmehr daran, dass die Modulbewegungen zu einer Verschiebung des Interferenzmusters beim Detektor führen und somit zu einer Amplitudenmodulation des Intensitätssignals. Dies verursacht den Einbruch im Frequenzgang ab 438Hz.

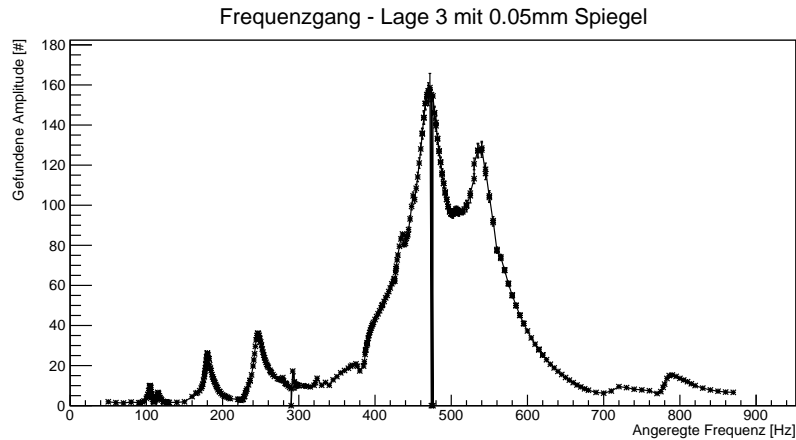


Abbildung 28: Frequenzgefilterter Frequenzgang der dritten Detektorlage.

Um nun die tatsächliche Amplitude der Schwingung zu bestimmen, wird ein Bandpassfilter in den Algorithmus eingebaut. Dieser lässt nur Modulschwingungen zu, welche selbst mit der Anregungsfrequenz $\pm 20\%$ schwingen. Dies führt zu Abbildung 28. Es fallen jedoch drei Fehlzählungen auf. Diese liegen bei 290 Hz, 474 Hz und 476 Hz. Abbildung 26 gibt Aufschluss über die Probleme bei den Zählungen im Bereich von 470 Hz. Von 466 Hz bis 484 Hz schwankt der Verlauf des Betrages der zweiten Ableitung an den Nullstellen der ersten Ableitung zu stark, um ein sicheres Zählen zu ermöglichen. Daher ist anzunehmen, dass in diesem Bereich die korrekte Amplitude wenige Maxima größer ist. In den meisten Fällen werden genügend Schwingungen der richtigen Frequenz gefunden, bei diesen beiden jedoch keine einzige. Von 470 Hz bis 478 Hz werden weniger als zehn zur Frequenz passende Schwingungen gefunden, was diesen Bereich besonders kritisch macht. Die Nullzählung bei 290 Hz hat andere Gründe. Hier ist das Signal zwar sauber, das Modul schwingt jedoch mit alternierender Frequenz (siehe dazu Abbildung 29). Die wahre Amplitude liegt etwa bei 12 ± 2 Maxima. Im ungefilterten Frequenzgang werden 8.0 ± 3.3 Maxima angegeben, da hier die langsame Schwingung jeweils als zwei Bewegungen gezählt wird. Wie bereits in Kapitel 2.2 beschrieben, muss ein Tiefpunkt in der Geschwindigkeit des Moduls kein Bewegungsende sein, es kann auch ein Sattelpunkt vorliegen, was hier der einzig logische Schluss ist, da eine Schwingung der Amplitudenfolge $12 - 6 - 6 - 12 - 6 - 6 - \dots$ sehr ungewöhnlich wäre.

Im Gegensatz zur dritten Detektorlage ist bei der vierten nur die Zählung der kleinen Bewegungen problematisch, was deutlich in Abbildung 30 zu sehen ist. Hier liegen Mehrfachzählungen von Schwingungen mit weniger als 4 Maxima vor, da einige der Endpunkte der Bewegungen nicht gefunden werden konnten. Besonders Mehrfachzählungen können sauber mit dem Bandpassfilter entfernt werden, da sie, im Gegensatz zu kleinen Unterschätzungen, ein Vielfaches der

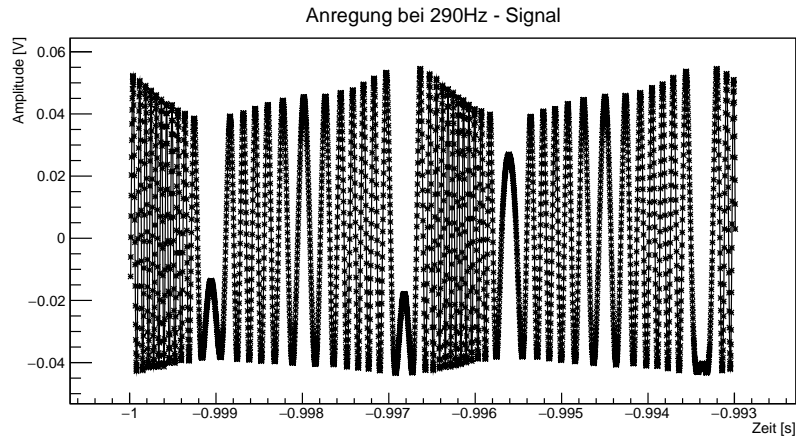


Abbildung 29: Interferenzsignal bei einer Anregung von 290 Hz - Lage 3.

eigentlichen Frequenz haben und somit nicht zufällig noch in den 20%-Bereich fallen können. Das Ergebnis davon ist in Abbildung 31 zu sehen.

Der Vergleich der beiden Frequenzgänge zeigt, dass die vierte Detektorlage empfindlicher auf kleine Frequenzen reagiert, da hier die Peaks unter 300 Hz die gleiche Höhe haben, wie die zwischen 400 Hz und 600 Hz. Bei der dritten Lage ist der höchste Peak um einen Faktor > 3 größer als bei kleinen Frequenzen. Der resonante Bereich zwischen 400 Hz und 600 Hz ist bei der vierten Lage breiter und hat weniger Struktur. Er trägt vier kleine Peaks, anstatt zwei stärkere. Für die dritte Lage liegt die stärkste Auslenkung bei (472 ± 3) Hz und für die vierte bei (106 ± 1) Hz. Ein absoluter Vergleich der Amplituden ist hier nicht möglich. Umfangreiche Messungen der Frequenzgänge finden sich in [4].

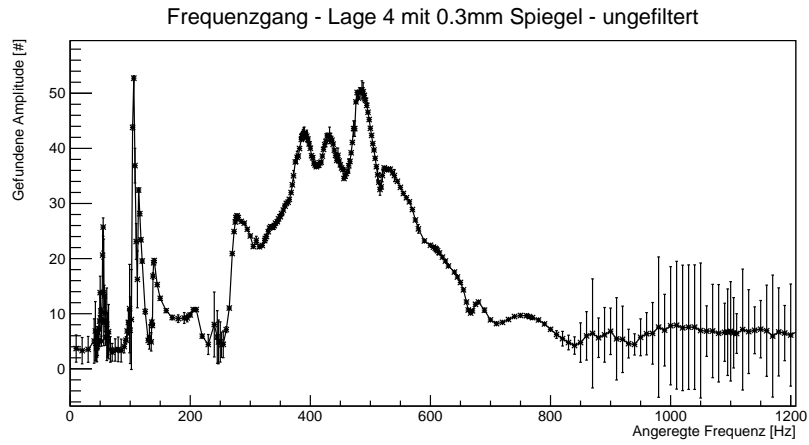


Abbildung 30: Ungefilterter Frequenzgang der vierten Detektorlage.

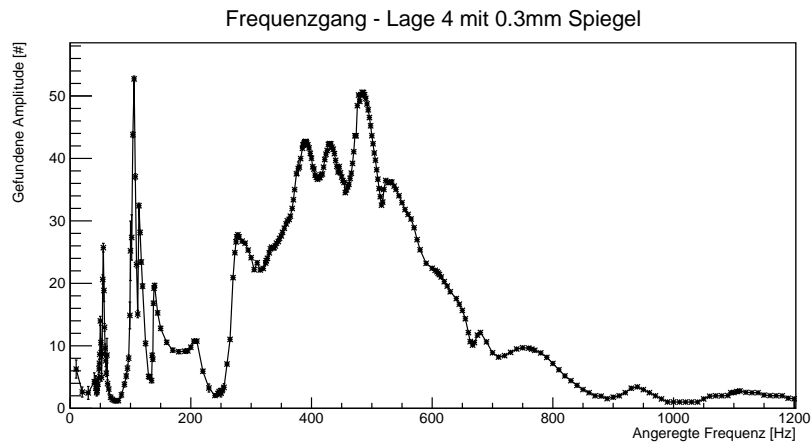


Abbildung 31: Frequenzgefilterter Frequenzgang der vierten Detektorlage.

5.2.3 Flussmessungen

Für das Mu3e-Experiment sind vor allem die Ergebnisse aus den Helium-Flussmessungen interessant. Diese sind in Abbildung 32 dargestellt und wurden [4] entnommen. Die maximale Auslenkung übersteigt in keinem der Fälle $40 \mu\text{m}$. Die durchschnittliche Amplitude ist stets kleiner als $10 \mu\text{m}$. In Abbildung 33 ist ein Beispielhistogramm dargestellt. Es zeigt die Reaktion des Moduls auf einen Heliumfluss von $(25.36 \pm 0.58) \frac{\text{m}}{\text{s}}$ [4]. Die Häufigkeit, mit der die Auslenkung einer Bewegung beobachtet wird, nimmt exponentiell ab. Die stärkste Bewegung beinhaltete 30 Maxima, welches einer Auslenkung von $4.8 \mu\text{m}$ aus der Ruhelage entspricht. Hier kann jedoch nicht das größte befüllte Intervall als Maximalauslenkung gedeutet werden, da das Auswerten der Flussdaten sehr fehlerhaft ist. Es liegen vor allem Schwingungen mit einer Amplitude kleiner zwei vor, welche nur sehr ineffizient gezählt werden. Daher kommt es zu Mehrfachzählungen und die maximale Auslenkung wird überschätzt.

Ein Auszug eines Intensitätsverlaufs einer Flussmessung findet sich in Abbildung 34, welcher Schwingungen mit mehr als zwei Maxima zeigt. Hier sind die Fehlzählungen in dem Verlauf der Höhen der Maxima begründet. Diese schwanken sehr stark und somit auch deren Krümmung, was zu Fehlplatzierungen der Start- und Endpunkte führt. Abbildung 35 zeigt den Verlauf des Betrages der zweiten Ableitung an den Nullstellen der ersten Ableitung um dieses zu verdeutlichen.

Die obere Grenze der Modulauslenkung durch die vom Gasfluss erzeugten Vibrationen kann somit auf etwa $40 \mu\text{m}$ gesetzt werden. Dies würde zu einer merklichen Verschlechterung der Ortsauflösung führen. Beim Modul der dritten Lage wurden keine Schwingungen über $20 \mu\text{m}$ festgestellt, was zum einen besser für die Zukunft des Mu3e-Experiments ist und zum anderen vor allem realistischer, da dieses Modul aktueller ist, die Aufhängung mehr der Realität entspricht, der Spiegel keine Änderung der mechanischen Beschaffenheit darstellt und es, im Gegensatz zu dem anderen, komplett intakt ist. Auch hier ist die genaue Auswertung und Interpretation der mit dem hier erklärten Algorithmus erzeugten Ergebnisse in [4] nachzulesen.

Es sollte jedoch nochmals erwähnt werden, dass nur die durch den lokalen Fluss induzierten Vibrationen untersucht wurden. Daher ist es nötig, das Experiment derart zu erweitern, dass auch die Auswirkungen des globalen Flusses gemessen werden können. Es wurde ebenfalls nur ein einzelnes Detektormodul betrachtet und nicht der komplette Ring, was ebenfalls die Ergebnisse beeinflusst.

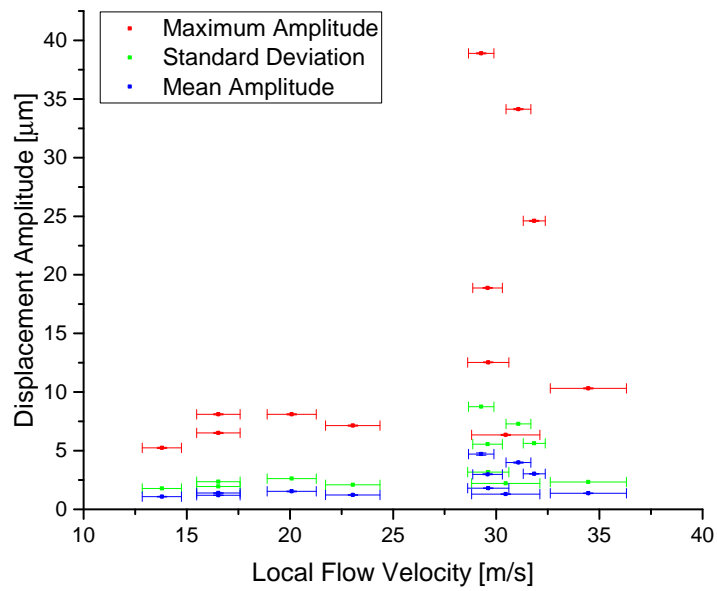
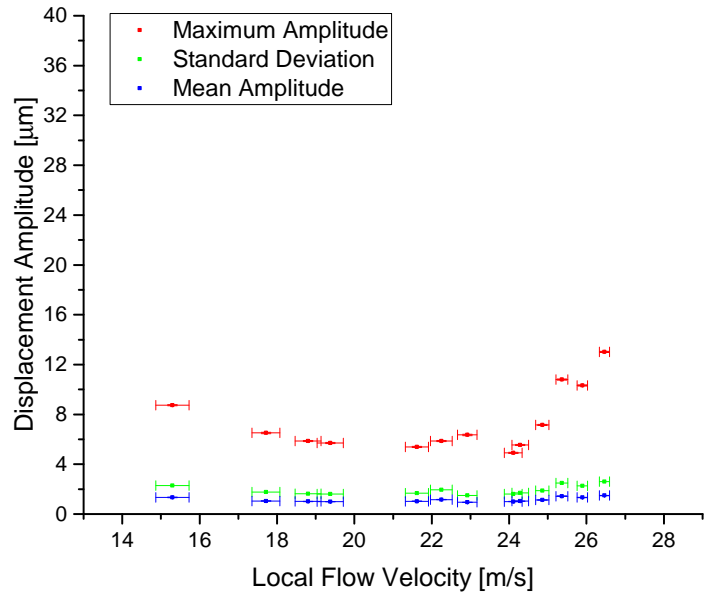


Abbildung 32: Ergebnisse der Helium-Flussmessung von Lage 3 (oben) und Lage 4 (unten) [4].

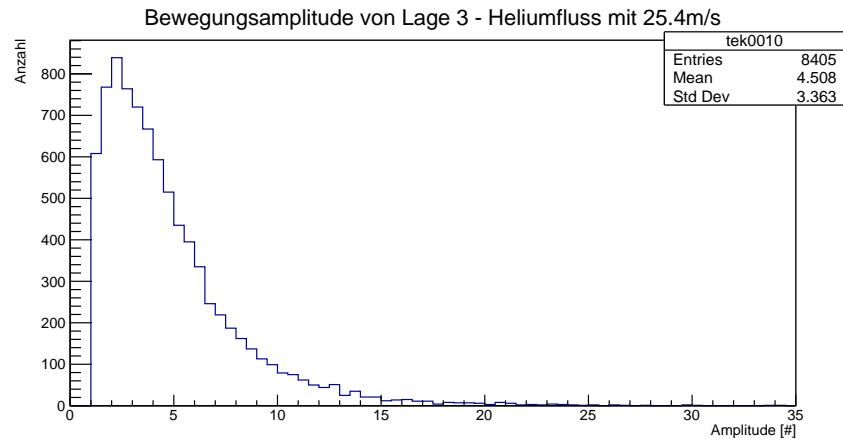


Abbildung 33: Histogramm der Amplitudenzählung bei einem Heliumfluss bei $(25.35 \pm 0.58) \frac{m}{s}$.

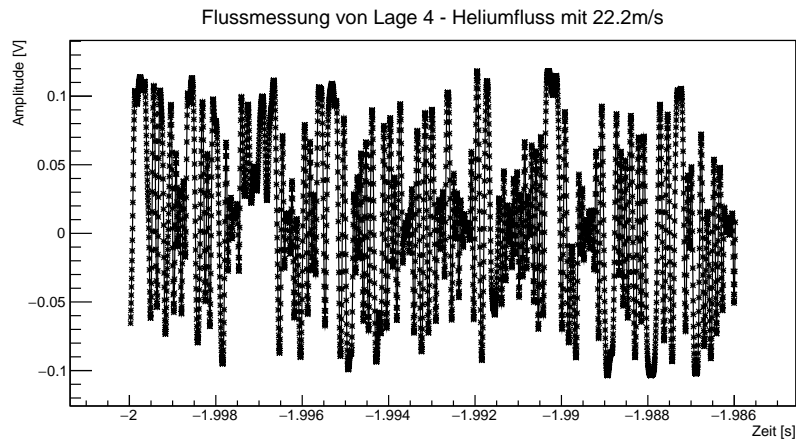


Abbildung 34: Intensitätsverlauf der Heliumflussmessung von Lage 4 bei einem Fluss von $(22.22 \pm 0.44) \frac{m}{s}$.

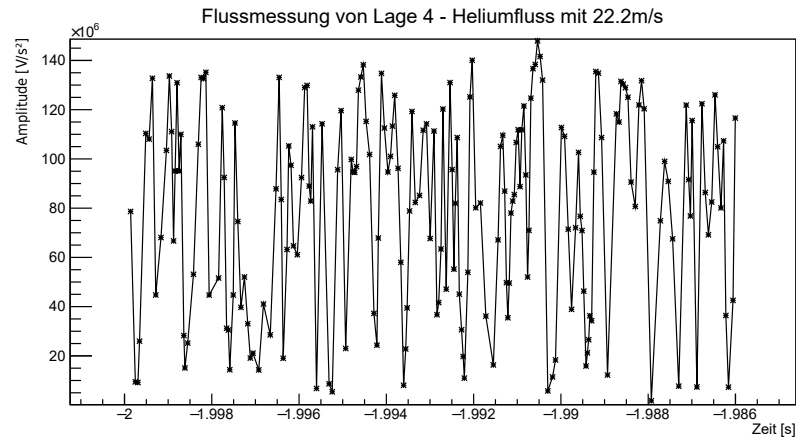


Abbildung 35: Verlauf des Betrages der zweiten Ableitung an den Nullstellen der ersten Ableitung der Heliumflussmessung von Lage 4 bei einem Fluss von $(22.22 \pm 0.44) \frac{m}{s}$.

6 Zusammenfassung

Für die Amplitudenbestimmung der Vibrationen des Mu3e-Detektors, wurden zwei Prototypen mit einem Michelson-Interferometer untersucht. Um die erzeugten Daten auszuwerten, wurde ein Algorithmus entwickelt und implementiert. Damit konnten sowohl Frequenzgänge, als auch flussinduzierte Vibrationen ausgewertet werden.

Die stärksten Resonanzen der Detektorprototypen finden sich zwischen 450 Hz und 600 Hz. Die höchste Amplitude bei flussinduzierten Vibrationen betrug $40 \mu\text{m}$ für das Modul der vierten und $20 \mu\text{m}$ für das Modul der dritten Lage. Dies kann als obere Abschätzung dienen. Die durchschnittliche Amplitude lag signifikant unter der Maximalen. Aufgrund der Konstruktion des experimentellen Aufbaus und der Verfassung der beiden Prototypen, ist das Ergebnis des Moduls der dritten realistischer. Das Modul ist an einem kompletten Endring befestigt, wie er auch im späteren Experiment verwendet werden soll, hat keine Bruchstellen und als Spiegel dient eine aufgedampfte Schicht aus Gold-Palladium, welche das Gweicht nicht merklich verändert. Im Gegensatz dazu ist das Modul der vierten Lage nur an einem kleinen Endstück befestigt, weist Beschädigungen auf und es wurde ein 0.3 mm dicker Spiegel angebracht.

Es wurde nur jeweils ein einzelnes Modul getestet und kein vollständiger Ring, da die Produktion dessen zu viel Zeit in Anspruch genommen hätte. Die Auswirkungen der globalen Kühlung wurden ebenfalls nicht untersucht. Somit sind weitere Experimente notwendig, um die Vibrationen im Ganzen zu untersuchen. Es ist jedoch wahrscheinlich, dass die Vibrationen zu keinem großen Problem führen, da die Amplitude der dritten Lage bei allen Flüssen im Schnitt unter $4 \mu\text{m}$ lag.

Der entwickelte Algorithmus ist in der Lage, Bewegungen ab einer Länge von vier Maxima mit einer Genauigkeit von etwa einem Maxima effektiv zu finden und zu zählen, solange keine zu starke Amplitudenmodulation vorliegt. Kleinere Amplituden sind fehleranfälliger und es können keine Bewegungen mit weniger als 1.2 Maxima gefunden werden. Mit dem hier verwendeten Laser der Wellenlänge $\lambda = 635 \text{ nm}$ entspricht dies einer Messgenauigkeit von aufgerundet $0.7 \mu\text{m}$ bei einer Mindestauslenkung von $2.5 \mu\text{m}$.

7 Ausblick

Zur weiteren Untersuchung der Vibrationen sollte die Messung an einem vollständigen Prototypen mit sowohl lokaler als auch globaler Kühlung durchgeführt werden, um sicherzugehen, dass die Vibrationen tatsächlich keinen merklichen Einfluss auf die Impulsauflösung haben.

Um die Verlässlichkeit der Messung zu verbessern, solle auch der Algorithmus weiter optimiert werden. Dazu könnte eine programminterne Optimierung der Parameter zum Auffinden der Endpunkte eingebaut werden. Das zeitliche Akzeptanzniveau C_{Zeit} kann von der Anzahl der Schwingungen der momentan zu zählenden Bewegung abhängig gemacht werden. Den Wert, den die zweite Ableitung unterschreiten muss (parametrisiert durch C_{Amp}), damit ein Endpunkt gewertet wird, könnte durch die Betrachtung der vorherigen Endpunkte gesetzt werden. Der Parameter der Schwelle $C_{Schwelle}$, die nach einem Nulldurchgang überschritten werden muss, um Rauschzählungen zu vermeiden, könnte über das Signal-Rausch-Verhältnis bestimmt werden.

Eine Verbesserung der Effektivität bei kleinen Schwingungen ist besonders für flussinduzierte Daten sinnvoll. Dies kann durch Optimierung des Algorithmus oder durch Verwendung eines höherfrequenten Lasers (z.B. UV- oder Röntgen-Strahlung) erreicht werden.

Es wäre ebenfalls praktisch den Algorithmus derart zu erweitern, dass auch die Amplitude von Teilschwingungen gemessen werden kann, um somit genauere Ergebnisse zu erhalten.

Um die Effizienz des Algorithmus bei flussinduzierten Daten zu überprüfen, können Simulationen durchgeführt werden. Zu den bisherigen Simulationen können des Weiteren noch Rauschen, Amplitudenmodulation und Untergrund hinzugefügt werden, um realitätsnähere Ergebnisse zu erhalten.

8 Appendix: Tabellen und Grafiken

8.1 Fehler bei Überlagerung von zwei Signalen

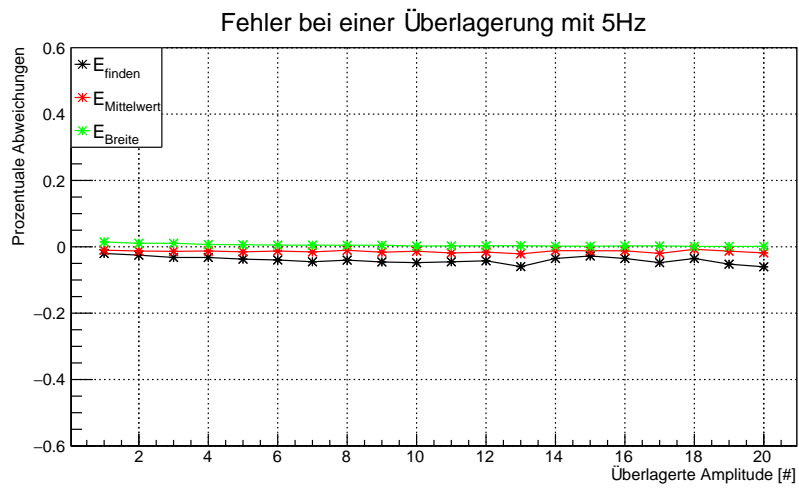


Abbildung 36: Fehler bei einer Überlagerung mit 5 Hz.

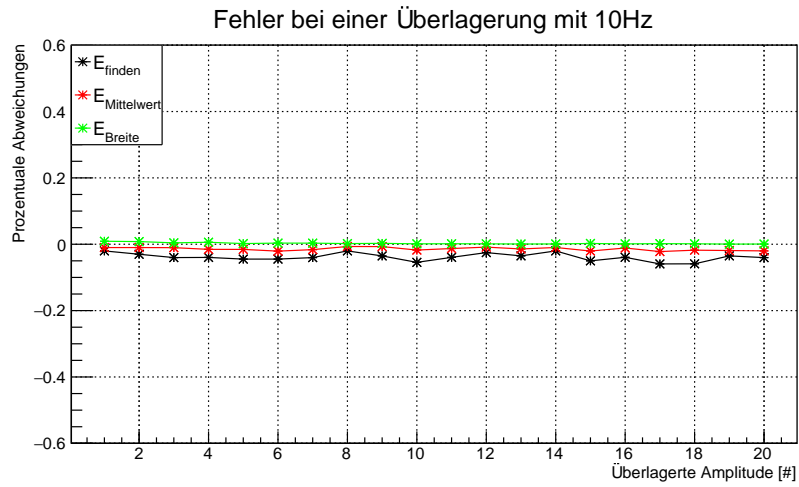


Abbildung 37: Fehler bei einer Überlagerung mit 10 Hz.

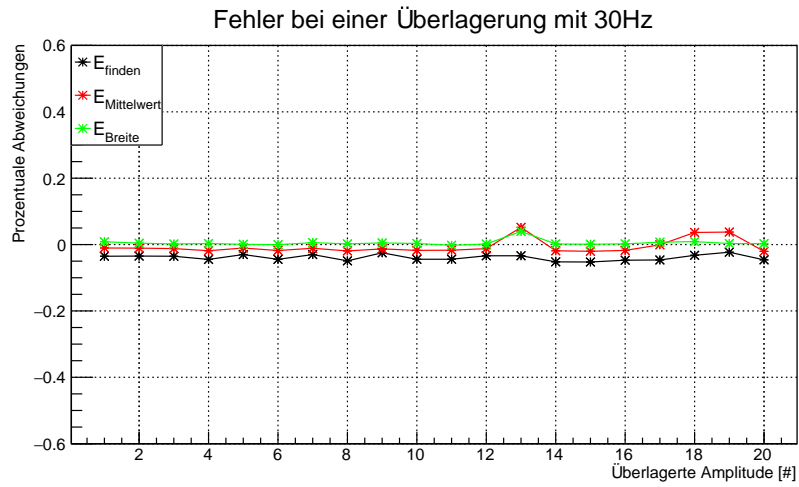


Abbildung 38: Fehler bei einer Überlagerung mit 30 Hz.

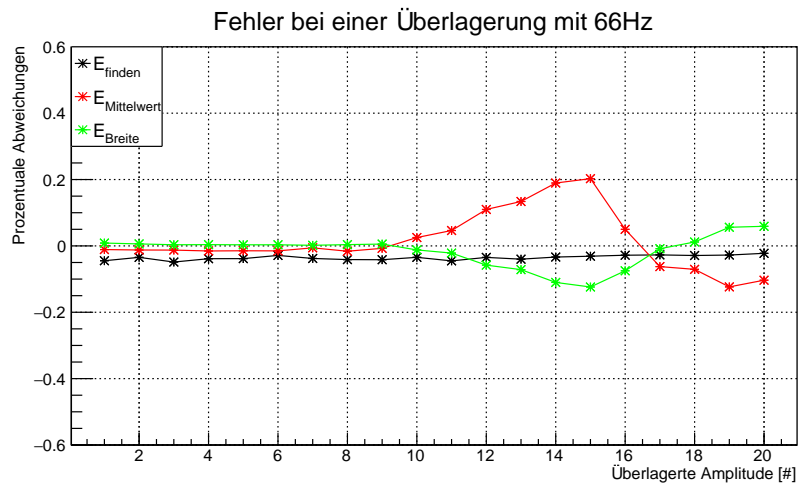


Abbildung 39: Fehler bei einer Überlagerung mit 66 Hz.

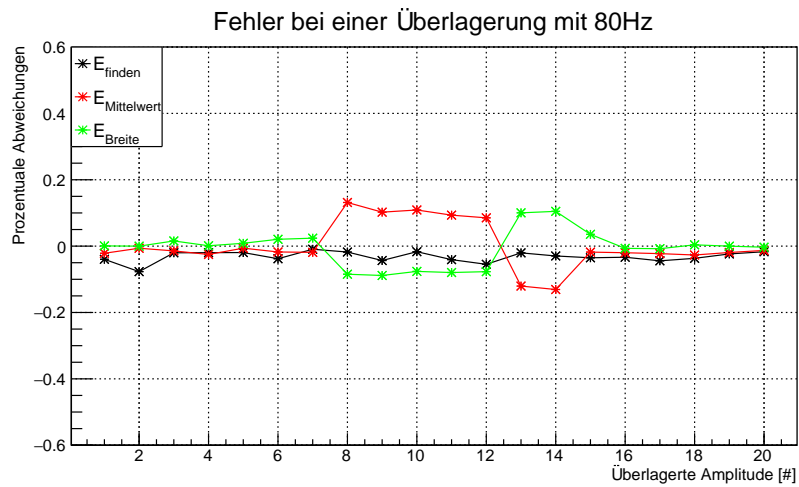


Abbildung 40: Fehler bei einer Überlagerung mit 80 Hz.

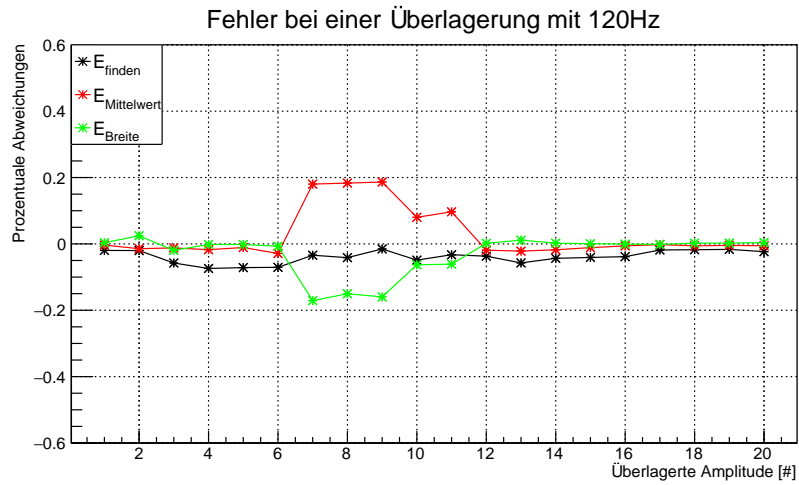


Abbildung 41: Fehler bei einer Überlagerung mit 120 Hz.

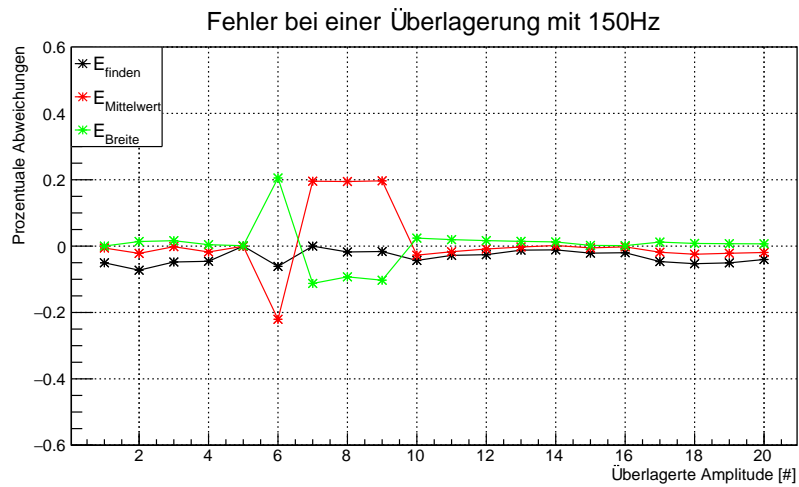


Abbildung 42: Fehler bei einer Überlagerung mit 150 Hz.

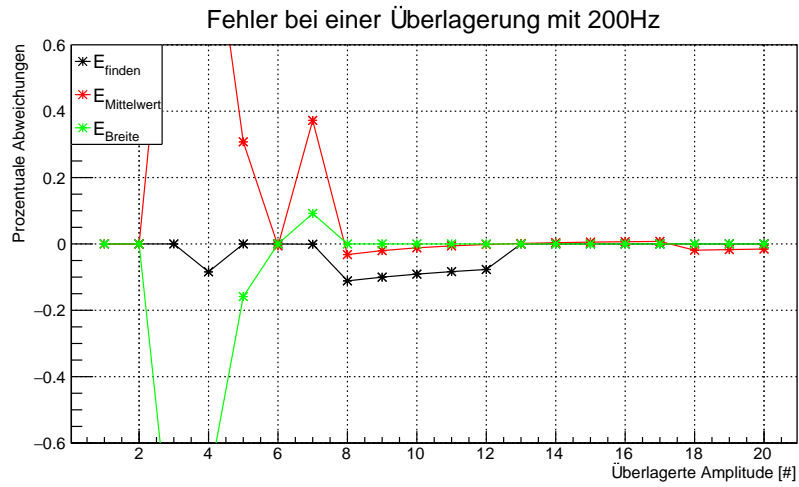


Abbildung 43: Fehler bei einer Überlagerung mit 200 Hz.

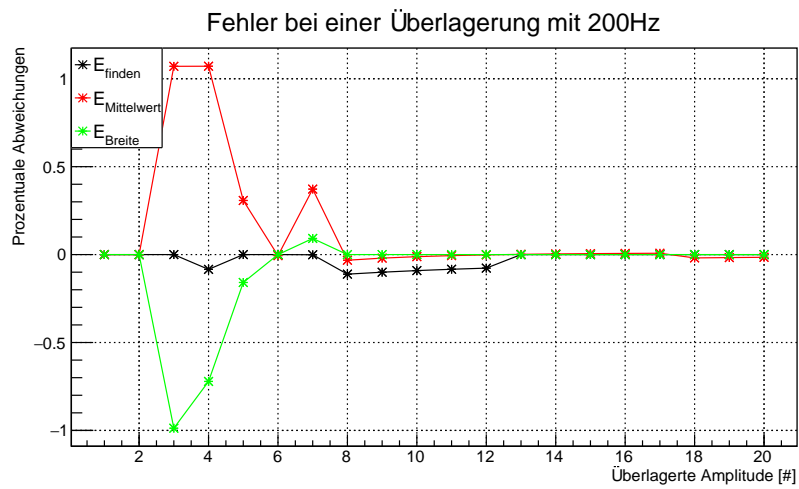


Abbildung 44: Fehler bei einer Überlagerung mit 200 Hz. Komplette Darstellung von Abbildung 43.

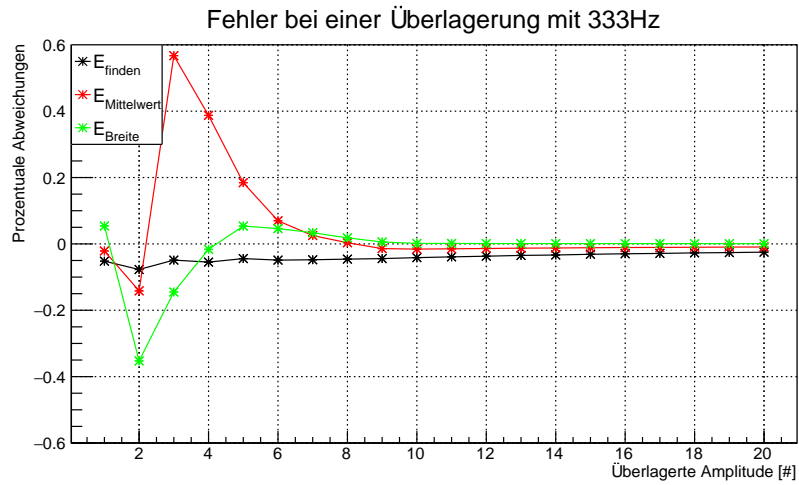


Abbildung 45: Fehler bei einer Überlagerung mit 333 Hz.

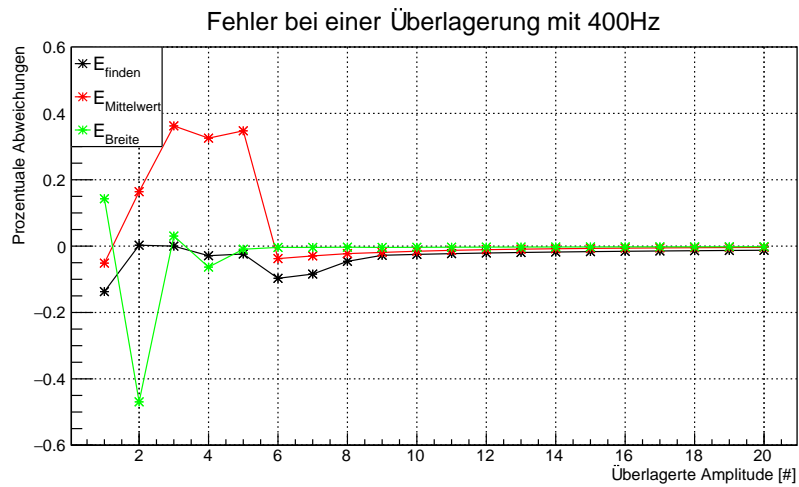


Abbildung 46: Fehler bei einer Überlagerung mit 400 Hz.

Abbildungsverzeichnis

1	μ -Zerfälle in drei Elektronen	5
2	Schematischer Aufbau des Muße-Detektors	7
3	Querschnitt und Prototyp eines Detektormoduls	7
4	Draufsicht auf den Versuchsaufbau	9
5	Detektormodulprototyp der vierten Lage	10
6	Detektormodulprototyp der dritten Lage	10
7	Darstellung einer starken Amplitudenmodulation	13
8	Vergleich zwischen Original und angepassten Messdaten	14
9	Simuliertes Intensitätssignal mit 12 Maxima	15
10	Modulbewegung und Intensitätsverlauf mit $f = 100$ Hz und $A_0 = 0.8 \mu\text{m}$	17
11	Modulbewegung und Intensitätsverlauf mit $f = 100$ Hz und $A_0 = 1.9 \mu\text{m}$	17
12	Modulbewegung und Intensitätsverlauf mit $f = 100$ Hz und $A_0 = 3.8 \mu\text{m}$	17
13	Darstellung von $C_{Schwelle}$	21
14	Verlauf der ersten Ableitung der Intensität	23
15	Darstellung von C_{Amp}	24
16	Signal, erste und zweite Ableitung	25
17	Zählung der Amplituden bei einer Glättung über 13 Punkte	30
18	Ergebnis von Zählungen kleiner Amplituden	31
19	Entstehung eines neues Extrema-Paars	32
20	Zählung der Amplituden bei einer Glättung über 25 Punkte	33
21	Überlagerung von zehn Maxima bei 100 Hz mit acht Maxima bei 333 Hz	36
22	Überlagerung von zehn Maxima bei 100 Hz mit zehn Maxima bei 66 Hz	36
23	Darstellung eines Drifts	37
24	Darstellung eines Sprungs	37
25	Fehler bei einer Überlagerung mit 120 Hz	38
26	Schlecht zu zählendes Signal	40
27	Ungefilterter Frequenzgang der dritten Detektorlage.	41
28	Frequenzgefilterter Frequenzgang der dritten Detektorlage.	42
29	Interferenzsignal bei einer Anregung von 290 Hz - Lage 3.	43
30	Ungefilterter Frequenzgang der vierten Detektorlage.	44
31	Frequenzgefilterter Frequenzgang der vierten Detektorlage.	44
32	Ergebnisse der Helium-Flussmessung von Lage 3 (oben) und Lage 4 (unten) [4].	46
33	Histogramm der Amplituden-zählung bei einem Heliumfluss bei $(25.35 \pm 0.58) \frac{\text{m}}{\text{s}}$	47
34	Intensitätsverlauf einer Heliumflussmessung	48
35	Verlauf der zweiten Ableitung einer Heliumflussmessung	48
36	Fehler bei einer Überlagerung mit 5 Hz.	51
37	Fehler bei einer Überlagerung mit 10 Hz.	52

38	Fehler bei einer Überlagerung mit 30 Hz.	52
39	Fehler bei einer Überlagerung mit 66 Hz.	53
40	Fehler bei einer Überlagerung mit 80 Hz.	53
41	Fehler bei einer Überlagerung mit 120 Hz.	54
42	Fehler bei einer Überlagerung mit 150 Hz.	54
43	Fehler bei einer Überlagerung mit 200 Hz.	55
44	Fehler bei einer Überlagerung mit 200 Hz - Komplet	55
45	Fehler bei einer Überlagerung mit 333 Hz.	56
46	Fehler bei einer Überlagerung mit 400 Hz.	56

Tabellenverzeichnis

1	Parameter der Simulation mit einer Frequenz	29
2	Glättungseinstellungen	29
3	Maximal messbare Amplituden bei verschiedenen Datenraten und Glättungsbreiten	34
4	Parameter der Simulationen bei Überlagerung von zwei Frequenzen	35
5	Frequenzbereiche für die Überlagerung von drei Schwingungen . .	39
6	Amplitudenwerte für die Überlagerung von drei Schwingungen . .	39
7	Parameter der Auswertung der Messdaten	40

Literatur

- [1] Y. Fukuda et al., [Super-Kamiokande Kollaboration], „Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos“, Phys. Rev. Lett. 81, 1562156, 1998, (arXiv:hep-ex/9807003).
- [2] H. E. Haber und G. L. Kane, „The Search for the Supersymmetry: Probing Physics Beyond the Standard Model“, Phys. Rept., 117 75, 1985.
- [3] N. Berger et al., [Mu3e Kollaboration], „Research Proposal for an Experiment to Search for the Decay $\mu \rightarrow eee$ “, 2013, arXiv:1301.6113 [physics.ins-det].
- [4] L. Henkelmann, „Optical Measurements of Vibration and Deformation of the Mu3e Silicon Pixel Detector“, Bachelorarbeit, Universität Heidelberg, 2015.
- [5] U. Bellgardt et al., [SINDRUM Kollaboration], „Search for the Decay $\mu^+ \rightarrow e^+e^+e^-$ “, Nucl.Phys. B299 1, 1988.
- [6] M. Kiehn, „Track Fitting with Broken Lines for the MU3E Experiment“, Diplomarbeit, Universität Heidelberg, 2012.
- [7] Y. Ng, „Finite Element Analysis of the Cooling System for the Mu3e Experiment“, Masterarbeit, Ernst-Abbe-Hochschule Jena, 2015.
- [8] A. Herkert, „Gaseous Helium Cooling of a Thin Silicon Pixel Detector for the Mu3e Experiment“, Masterarbeit, Universität Heidelberg, 2015.
- [9] A. Savitzky, M.J.E. Golay, „Smoothing and Differentiation of Data by Simplified Least Squares Procedures“, Anal. Chem., 1964, 36(8), S. 1627-1639.
- [10] J. Steiner, Y. Termonia, J. Deltour, „Comments on Smoothing and Differentiation of Data by Simplified Least Squares Procedures“, Anal. Chem., 1972, 44(11), S. 1906-1909

Danksagungen

Hiermit möchte ich mich herzlich bei Herrn Prof. Dr. Schöning, für die Möglichkeit, die Arbeit unter seiner Aufsicht anzufertigen, und seine Betreuung währenddessen bedanken. Ebenso möchte ich Herrn Priv.-Doz. Dr. Maarten DeKieviet für die Zweitkorrektur danken.

Außerdem möchte ich mich noch bei meiner Arbeitsgruppe für die regelmäßige und aufmerksame Hilfe im Rahmen dieser Arbeit bedanken. Sei es bei Fragen zum experimentellen Aufbau, zur Implementierung des Algorithmus oder beim Gegenlesen der Arbeit. Besonderen Dank gilt dabei Dr. Dirk Wiedner, welche jederzeit verfügbar war um Hilfestellungen zu geben.

Des Weiteren möchte ich noch Herrn Dr. Jens Wagner für seine freundliche Hilfe danken. Für die vielen Einzelteile, die er uns geliehen und die experimentellen Tricks, die er uns erklärt hat.

Natürlich möchte ich mich auch bei meinem Kollegen Sam für die Hilfestellungen bei Gedankengängen, sowie der Beteiligung beim Aufbau des Experiments danken.

Ebenfalls größten Dank an meinen Kollegen Lars Henkelmann, der mit mir das Experiment durchgeführt hat. Ohne ihn wäre es nicht möglich gewesen. Dabei möchte ich ihm besonders für seine Geduld mit mir danken.

Zu guter Letzt möchte ich mich noch bei meiner Familie bedanken, die mich während der Arbeit auf unterschiedlichste Weise unterstützt hat, und meiner Kommilitonin Antonia für das sorgfältige Gegenlesen.

Erklärung zur Bachelorarbeit

Hiermit erkläre ich, dass ich die Bachelorarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken als solche kenntlich gemacht habe.

Die Arbeit habe ich bisher keinem anderen Prüfungsamt in gleicher oder vergleichbarer Form vorgelegt. Sie wurde bisher nicht veröffentlicht.

Heidelberg, den 30.09.2015

.....