

**Fakultät für Physik und Astronomie
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg**

Bachelorarbeit im Studiengang Physik
vorgelegt von

Michael Winn

geboren in Saarbrücken

2010

Der Einfluss der Eigenvolumenkorrektur auf das thermische Modell zur Untersuchung von Schwerionenkollisionen

Die Bachelorarbeit wurde von Michael Winn ausgeführt am

Physikalischen Institut der Universität Heidelberg

unter der Betreuung von

Frau Prof. Dr. Johanna Stachel

Kurzfassung

Das bewährte thermische Modell zur Berechnung von Teilchenanzahlen und -verhältnissen in hochenergetischen Schwerionenkollisionen wurde in dieser Arbeit hinsichtlich des Einflusses des Parameters Eigenvolumen der Hadronen auf die thermodynamischen Größen untersucht. Die Berechnungen wurden alle für eine Wahl der Systemparameter Temperatur T und baryochemisches Potential μ_B durchgeführt, die man für die Kollisionen von Bleikernen am Large Hadron Collider (LHC) der europäischen Organisation für Kernforschung (CERN) erwartet. Es konnte eine starke Abhängigkeit der thermodynamischen Größen Druck P , Energiedichte ε und Entropiedichte s vom gewählten Eigenvolumen der Hadronen festgestellt werden. Vor allem das aus Messungen nicht genau bekannte Eigenvolumen der Mesonen hat sehr großen Einfluss. Die Veränderung durch das Eigenvolumen vergrößert sich mit steigender Temperatur.

Es waren außerdem Vergleiche mit Ergebnissen der Gitter-QCD möglich. Es ergibt sich eine gute Übereinstimmung des statistischen Modells mit den Gitterberechnungen für den Fall der Spuranomalie des Energie-Impuls-Tensors, allerdings weichen die Ergebnisse für die thermodynamischen Größen P , ε und s voneinander stark ab.

Abstract

The established thermal model for the calculation of particle ratios and yields in high energy heavy-ion collisions was reviewed in this thesis with regard to the influence of the hadronic eigenvolume parameter on the thermodynamic quantities. All calculations were carried out for an appropriate choice of the system parameters temperature T and baryochemical potential μ_B for lead-lead collisions at the Large Hadron Collider (LHC) of the European Organization for Nuclear Research (CERN).

A strong dependency of the thermodynamic quantities pressure P , energy density ε and entropy density s on the hadronic eigenvolume was found. The not well-known mesonic eigenvolume has most notably an essential impact. The influence of the eigenvolume increases with rising temperature.

Furthermore, it was possible to perform a comparison with the results of lattice QCD. The data for the trace anomaly of the energy momentum tensor show an agreement, while the thermodynamic quantities P , ε and s deviate strongly.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Grundlagen	3
2.1	Die starke Wechselwirkung	3
2.2	Schwerionenkollisionen und das Phasendiagramm	5
2.3	Grundlagen der statistischen Mechanik	8
3	Thermische Modelle von Schwerionenkollisionen	13
3.1	Anwendbarkeit der statistischen Mechanik auf Schwerionenkollisionen	13
3.2	Hadronen als ideales Quantengas	14
3.3	Eigenvolumenkorrektur	16
4	Methodik und Ergebnisse	19
4.1	Umsetzung des Modells	19
4.2	Bisherige Ergebnisse	20
4.3	Die Wahl der Parameter μ_B und T	22
4.4	Der Einfluss des Eigenvolumens	23
4.4.1	Variation der Teilchenradien bei gegebener Temperatur	23
4.4.2	Veränderungen in Abhängigkeit der Temperatur	28
4.4.3	Vergleich mit aktuellen Ergebnissen der Gitter-QCD	32
5	Fazit	38

1 Einführung

Der gerade angelaufene neue Beschleuniger ‘Large Hadron Collider‘ (LHC) am Europäischen Kernforschungszentrum (CERN) stößt das Tor zu einer bisher unerreichten Energieskala in der Teilchenphysik auf: Die maximal erreichbare Schwerpunktennergie von 14 TeV für Proton-Proton-Kollisionen übersteigt die bisher höchste in einem Beschleuniger erreichte Schwerpunktennergie von 1.96 TeV bei Proton-Antiproton-Kollisionen¹ um ein Vielfaches. Primäres Ziel dieser enormen technologischen Anstrengung ist bei Proton-Proton-Kollisionen vor allem die Suche nach dem Higgsboson, dem letzten elementaren Teilchen des Standardmodells der Teilchenphysik, das bisher aufgrund seiner prognostizierten großen Masse nicht erzeugt werden konnte. Es soll das Wechselwirkungsteilchen sein, das mit dem Feld verknüpft ist, welches den elementaren Teilchen ihre Massen verleiht. Die theoretischen Grundsteine des Standardmodells bezüglich der vereinigten Theorie der schwachen und der elektromagnetischen Wechselwirkung wurden bereits durch S. L. Glashow, A. Salam und S. Weinberg² zwischen 1960 und 1967 gelegt, während die starke Wechselwirkung, die die Kräfte des Standardmodells komplettiert, ihre derzeitige theoretische Beschreibung Anfang der 70er-Jahre erhielt. Auch weitere Tests des Standardmodells und die mögliche Beobachtung von Phänomenen jenseits dieses Modells stehen im Fokus der Anstrengungen.

Neben der Kollision von Protonen ist am LHC allerdings auch der Zusammenprall von beschleunigten Bleikernen vorgesehen: Einer der vier Großdetektoren ist der speziell für diesen Zweck konzipierte ALICE-Detektor³. Der Zusammenprall von sehr stark beschleunigten Schwerionen soll in einen neuen Phasenzustand der Materie münden: dem Quark-Gluon-Plasma. In diesem Zustand können sich die bei gewöhnlichen Bedingungen in Hadronen gebundenen und nicht einzeln beobachtbaren Quarks sowie die Wechselwirkungsteilchen der hier dominierenden starken Wechselwirkung, die Gluonen, in einem größeren Volumen frei bewegen. Es wird vermutet, dass das Universum kurze Zeit nach dem Urknall ebenfalls in diesem Materiezustand vorlag. Bereits bei geringeren Schwerpunktennergien der kollidierenden Schwerionen bis hin zu 200 GeV pro Nukleonenpaar⁴ wurden Hinweise für einen neuen Materiezustand gefunden. Die Experimente am LHC mit einer Kollisionsenergie von 5.5 TeV pro Nukleonenpaar werden gewährleisten, dass die für die Entstehung des Quark-Gluon-Plasmas vermuteten erforderlichen Rahmenbedingungen großer Energiedichte und ausreichender Zeitdauer dieses Zustandes zur Ausbildung des benötigten Gleichgewichtes deutlich überschritten werden [1]. Eine zentrale Rolle in der phänomenologischen Beschreibung von Schwerionenkollisionen spielt das sogenannte thermische Modell. Es beschreibt mit erstaunlicher Genauigkeit die Teilchenproduktion in Schwerionenkollisionen von 2 GeV bis zu dem größten bisher erreichten Wert von 200 GeV Schwerpunktennergie pro kollidierendem Nukleonenpaar. Dieses Modell basiert auf der statistischen Mechanik und nutzt die Erhaltungssätze für Baryonenzahl, Ladung, Strangeness und Charm, um ein relativistisches Gas aller auftretenden Hadronen zu beschreiben, das kurze Zeit

¹Am Tevatron-Beschleuniger des Fermilabs.

²Nobelpreis für Physik 1979.

³ALICE: Akronym für ‘A Large Ion Collider Experiment‘.

⁴Am ‘Relativistic Heavy-Ion Collider‘ (RHIC) des Brookhaven National Laboratory (BNL).

nach dem vermuteten Phasenübergang vom Quark-Gluon-Plasma zurück in die gewöhnliche hadronische Materie vorliegt. Die entsprechenden Größen des Modells können zumindest bei sehr hohen Strahlenergien sogar als Näherung für die Parameter des Phasenübergangs angesehen werden [2], da der durch das Modell beschriebene und messbare Zustand, der sich in den detektierten Teilchenzahlen manifestiert, unmittelbar an der Phasengrenze liegt.

Die größte Variationsmöglichkeit des Modells besteht in der Festlegung des Eigenvolumens der auftretenden Teilchen, das wie bei einem klassischen Van-der-Waals-Gas zur Modellierung der Wechselwirkung der Teilchen untereinander verwendet wird. Diese Größe ist schwierig zu quantifizieren, da sie teilweise nur bedingt mit anderen experimentellen Werten für die räumliche Ausdehnung von Hadronen verglichen werden kann. Der Einfluss des Parameters auf die absoluten thermodynamischen Größen ist hingegen nicht zu vernachlässigen und seine Wahl verdient besondere Aufmerksamkeit.

In dieser Arbeit soll der Einfluss des Eigenvolumens auf die mit Hilfe des Modells berechneten thermodynamischen Größen quantitativ untersucht werden. Zunächst wird in den Grundlagen die starke Wechselwirkung in Hinblick auf den erwarteten Phasenübergang, der Bezug der Schwerionenkollisionen zum Phasenübergang sowie die für das Modell benötigte statistische Mechanik erläutert. In Abschnitt 3 folgt eine genaue Beschreibung des Modells mit besonderem Augenmerk auf das zu untersuchende Eigenvolumen. Der Analyseteil 4 beginnt zunächst mit der Beschreibung der Modellumsetzung und der Betrachtung einiger bisheriger Ergebnisse mit Bezug auf experimentelle Daten. Des Weiteren wird die Parameterwahl, die für maximale Strahlenergien am LHC erwartet wird und auf die sich die folgenden Ergebnisse beziehen, genauer begründet. Diese Parameterwahl ermöglicht es zudem, im letzten Abschnitt zur Analyse der gewonnenen Modelldaten — nach der genauen Untersuchung der Abhängigkeit der betrachteten thermodynamischen Größen vom Eigenvolumen und der Temperaturabhängigkeit der Eigenvolumenvariation — einen Vergleich mit Ergebnissen der Gitterquantenchromodynamik (LQCD) zu unternehmen. Dieser ist erst bei höheren Strahlenergien möglich, da die Berechnungen der LQCD vor allem für eine verschwindende Baryonenzahl des betrachteten Gesamtsystems ausgereift sind. Diese Annahme gleicher Anzahl an Baryonen und Antibaryonen im hadronischen Zustand ist mit steigender Kollisionsenergie bei Schwerionenkollisionen immer besser erfüllt, da die Quantenzahlen der eingehenden Teilchen mit steigender Schwerpunktenergie immer weniger die Anzahlen der aus dem Kollisionszentrum stammenden Teilchen beeinflussen.

2 Grundlagen

2.1 Die starke Wechselwirkung

Die starke Wechselwirkung, die neben der elektromagnetischen, der schwachen und der gravitativen eine der vier beobachteten Naturkräfte ist, dominiert die auftretenden Vorgänge auf der uns hier interessierenden subatomaren Ebene bei sehr hohen Energiedichten aufgrund ihrer viel größeren Stärke bei Weitem.

Die uns bekannte Welt der stark wechselwirkenden Teilchen, den Hadronen, besteht aus farbneutralen Quark-Antiquark-Paaren, den Mesonen, und den Quark-Tripletts, den Baryonen. Farbneutral bedeutet, dass sie nach außen keine Farbladung, die Ladung der starken Wechselwirkung, aufweisen. Es gibt im Gegensatz zur nur positiv oder negativ vorliegenden elektrischen Ladung insgesamt 3 verschiedene Farbladungen und deren entsprechenden Antifarben. Die starke Wechselwirkung besitzt des Weiteren zwei besondere Eigenschaften: asymptotische Freiheit ('asymptotic freedom') und 'Confinement'.

'Asymptotic freedom' beschreibt die Tatsache, dass bei hohen Energien oder hohem Impulstransfer bzw. kleinen Abständen die Quarks sich wie (quasi)freie Teilchen verhalten [3]. Dies wurde in Streuexperimenten von Leptonen (z. B. Elektronen oder Neutrinos) mit Protonen oder Neutronen beobachtet, bei denen die Quarks zum ersten Mal als reale, punkartige Teilchen innerhalb der Nukleonen erkannt werden konnten. 'Asymptotic freedom' ist erfolgreich in die Theorie der starken Wechselwirkung integriert⁵.

Die Tatsache, dass man die Konstituenten von Mesonen und Baryonen, die Quarks, nicht isoliert beobachten kann, bezeichnet man als 'Confinement', welches nach wie vor nicht vollständig verstanden ist [5]. Die starke Wechselwirkung verhindert bei großen Abständen bzw. bei kleinen Impulsüberträgen oder Energien die Existenz freier Quarks. Versucht man in Hochenergiestreuversuchen zwei (oder drei) Quarks voneinander zu trennen, so wächst die Feldenergie der starken Kraft derartig an, dass aus dem Vakuum neue Quarks entstehen, so dass zwar die Quarks nun getrennt sind, allerdings jedes für sich wieder in einem farbneutralen Hadron vorliegt.

Die Quantenfeldtheorie der starken Wechselwirkung, die Quantenchromodynamik (QCD), sagt jedoch bei hohen Temperaturen und/oder hohem baryochemischen Potential⁶ μ_B Zustände voraus, die sich von der hadronischen Phase unterscheiden [6]. Abbildung 1 zeigt eine aktuelle Skizzierung des Phasendiagramms, aus der bereits ersichtlich wird, welche großen Unsicherheiten bezüglich des prinzipiellen Verlaufs der Phasengrenzen noch bestehen.

Neben verschiedenen vermuteten farbsupraleitenden Phasen⁷ bei hohem baryochemischen Potential sowie vergleichsweise geringen Temperaturen soll das sogenannte Quark-Gluon-Plasma (QGP) bei hohen Temperaturen entstehen. Die Materie soll nach derzeitigen Überlegungen auch kurz nach dem Urknall in dieser Phase vorgelegen haben.

⁵Nobelpreis für Physik 2004: David J. Gross, H. David Politzer und Frank Wilczek [4].

⁶Das baryochemische Potential ist anschaulich die Energieänderung, die beim Hinzufügen eines Baryons zum System aufgewendet werden muss.

⁷Diese sollen evt. in Neutronensternen auftreten (siehe [6, 7]).

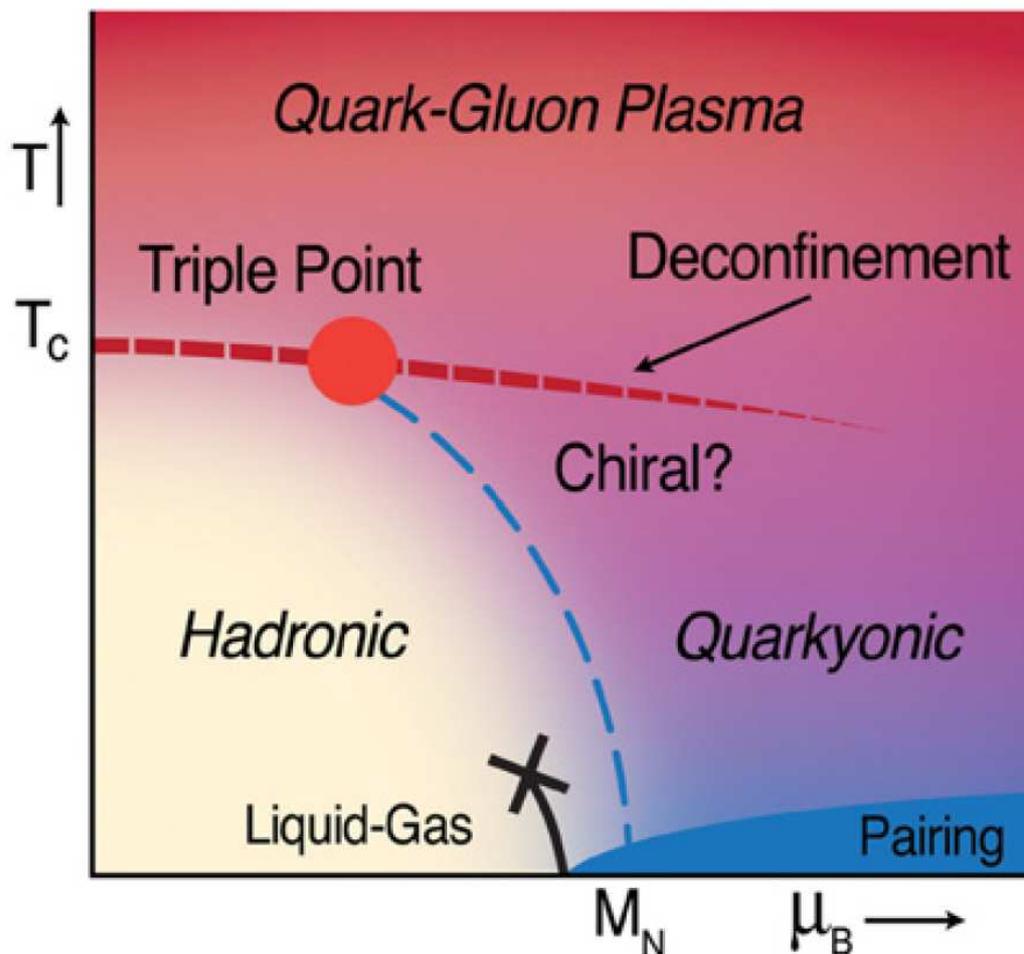


Abbildung 1: Vermutetes Phasendiagramm stark wechselwirkender Materie [8]: ‘Hadronic‘ bezeichnet die normale hadronische Phase, ‘Pairing‘ steht hier für die Bildung von Cooperpaaren in den farbsupraleitenden Phasen, ‘Quarkyonic‘ für die kontrovers diskutierte ‘Quarkyonic Matter‘, deren Eigenschaften bezüglich des chiralen Symmetriebruchs noch ungeklärt sind. Für hohe Temperaturen ist das Quark-Gluon-Plasma (QGP) eingezeichnet. Mit $M_N \approx 1 \text{ GeV}/c^2$ ist die Masse der Nukleonen eingetragen. Diese entspricht ungefähr der Energie pro Baryon im Grundzustand, der sich bei $kT = 0 \text{ MeV}$ befindet, und damit dem baryochemischen Potential $\mu_{B,0}$ des Grundzustands (siehe Ref. [6]).

Das QGP zeichnet sich durch die Aufhebung des ‘Confinements‘ aus: Die in der hadronischen Phase nur gebunden in Mesonen und Baryonen auftretenden Quarks und die Wechselwirkungsteilchen der QCD, die Gluonen, die ebenfalls Farbladungen tragen und damit auch untereinander stark wechselwirken, bewegen sich in diesem frei. Außerdem zeichnet sich das Plasma durch eine Wiederherstellung der chiralen Symmetrie aus, die dazu führt, dass die Quarks im QGP ihre im Falle von Up- und Down-Quarks sehr kleinen ‘freien‘ Massen von einigen MeV/c^2 aufweisen.

Anstrengungen, genaue quantitative Vorhersagen über das Phasendiagramm und die genaue Art des Phasenübergangs aus der QCD zu gewinnen, gestalten sich als schwierig, da die Feldgleichungen der QCD-Lagrangedichte nicht in den vier Dimensionen des Minkowski-Raumes analytisch lösbar sind. Des Weiteren ist der in der Quantenelektrodynamik — der Quantenfeldtheorie der elektromagnetischen Wechselwirkung — so erfolgreiche perturbative Ansatz nur bei hochenergetischen Vorgängen in der QCD anwendbar, da die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung nur im Fall großer Impulsüberträge bzw. innerhalb von Prozessen von kleiner Zeitspanne kleiner eins ist [3], so dass eine Entwicklung in der Kopplungskonstanten nur in diesen Fällen ein gewisses Konvergenzverhalten zeigt. Für abnehmende Impulsüberträge bzw. zunehmende Zeitspannen nimmt der Wert der Kopplungskonstante immer weiter zu, so dass in aller Regel keine konvergierende Entwicklung erwartet werden kann.

Die am weitesten vorangetriebene nicht-perturbative Herangehensweise stellt die Gitterquantenchromodynamik (LQCD) dar, die eine Diskretisierung der vierdimensionalen Raumzeit vornimmt. Im Grenzfall verschwindender Gitterabstände konvergieren diese Ergebnisse zu den gesuchten, analytisch nicht zugänglichen Werten. Die LQCD ist die natürliche Referenz, um das hier später vorzustellende Modell auf Kompatibilität mit der QCD zu überprüfen.

Trotz der nur bedingt quantitativen Vorhersagen der Theorie wird erwartet, dass der Phasenübergang zum QGP experimentell in Schwerionenkollisionen erreichbar ist, so dass das Experiment vor allem in Zukunft am LHC die Chance bietet, diese spannende neue Phase der Materie tatsächlich zu erkunden.

2.2 Schwerionenkollisionen und das Phasendiagramm

Die Kollision von ultrarelativistisch beschleunigten Kernen erzeugt einen Zustand sehr dichter, heißer Materie, der sich insbesondere durch seine große Energiedichte auszeichnet. Im Gegensatz zur Nukleon-Nukleon-Streuung entsteht hierbei kurzzeitig ein neuer Zustand der Materie: Die Teilchenproduktion wird durch Mehrfachstreuungen dominiert, die ein thermodynamisches Gleichgewicht der Teilchen untereinander hervorrufen. Dieser ist zentraler Gegenstand der Forschungsaktivitäten auf dem Gebiet der Schwerionenphysik. Der von der Theorie vorhergesagte Phasenübergang ausgehend von der normalen hadronischen Materie hin zum QGP scheint sich durch experimentelle Ergebnisse zu erhärten [9]. Ob tatsächlich eine neue Phase bei experimentell kontrolliert ablaufenden Bedingungen in Teilchenbeschleunigern erzeugt wurde bzw. erzeugt werden kann, wird sich wohl erst durch weitere Datenanalysen der RHIC-Experimente am Brookhaven National Laboratory (BNL) und durch zukünftige Ergebnisse der LHC-Experimente⁸ mit endgültiger Sicherheit beantworten lassen.

Im Rahmen einer Schwerionenkollision kann das QGP nur sehr kurzzeitig Bestand haben, da der sogenannte Feuerball aus heißer Materie sich aufgrund des thermodynamischen Druckes (erzeugt durch die Streuungsprozesse) schnell ausdehnt und abkühlt. Beim Übergang in die hadronische Phase, die sich bei der nun gesunkenen Temperatur vollzieht, bricht die chirale Symmetrie, falls zuvor das QGP vorgelegen hat. Dies führt dazu, dass die Up- und Down-Quarks ih-

⁸RHIC und LHC: Akronyme für ‘Relativistic Heavy Ion Collider‘ und ‘Large Hadron Collider‘.

re Konstituentenmasse von circa $300 \text{ MeV}/c^2$ annehmen und die s-Quarks eine Masse von $450 \text{ MeV}/c^2$ aufweisen⁹. Bei diesem Phasenübergang gruppieren sich also die Quarks wieder zu den farbneutralen Hadronen.

Die Vielzahl an entstehenden unterschiedlichen Teilchen führt unmittelbar nach dem mutmaßlichen Phasenübergang noch inelastische Stöße untereinander aus, bei denen Teilchensortenumwandlungen auftreten und instabile Teilchen zerfallen. Jedoch kühlt der Materieball weiter ab, so dass nach kurzer Zeit nur noch elastische Stöße stattfinden, die unter Erhaltung der beteiligten Hadronensorten für Impuls- und Energieüberträge sorgen. Die Impulsspektren der auftretenden Hadronen werden folglich auch jetzt noch maßgeblich beeinflusst. Diesen Übergang von inelastischen zu elastischen Streuprozessen bezeichnet man als chemischen ‘freeze-out‘.

Für die etablierte Annahme, dass die Temperatur T_{ch} des chemischen ‘freeze-outs‘ nur knapp unterhalb der kritischen Temperatur T_c des Phasenübergangs zum QGP liegt, spricht vor allem, dass ein chemisches Gleichgewicht nach heutigem Erkenntnisstand nur plausibel durch hadronische Vielteilchen-Streuprozesse erklärt werden kann. Diese Wechselwirkungen dominieren aufgrund der stark abfallenden Teilchendichte auf der hadronischen Seite des Phasenübergangs nur in der Nähe von T_c . Des Weiteren lässt sich der Erfolg des später beschriebenen thermischen Modells, welcher zunächst das Vorhandensein eines chemischen Gleichgewichtes impliziert, auf Grundlage von Hadronen kaum mit $T_{ch} > T_c$ vereinbaren [2]. Diese Überlegungen sollten zumindest für hohe Strahlenergien (RHIC, LHC) mit einer Genauigkeit $kT_c - kT_{ch}$ von einigen MeV zutreffen. Die Temperaturen für den chemischen ‘freeze-out‘ T_{ch} stimmen in diesem hochenergetischen Bereich auch weitgehend mit den Ergebnissen der LQCD für die kritische Temperatur des Phasenübergangs T_c überein (siehe Abbildung 2)¹⁰.

Setzt sich die Abkühlung weiter fort, so dass die vom Teilchen frei zurückgelegte Weglänge weiter anwächst, kommt es schließlich zum kinetischen ‘freeze-out‘: Es finden keine Impulsüberträge mehr statt, die Teilchen unterliegen nur noch der gegenseitigen Coulomb-Wechselwirkung und können nun schließlich vom Detektor erfasst werden. Ob tatsächlich das thermische Gleichgewicht länger vorliegt als das chemische, ist jedoch nicht abschließend geklärt [11].

Die Idee einer ‘Quarkyonic Matter‘-Phase im Phasendiagramm, die auch in Abbildung 1 zu sehen ist, resultiert vor allem aus der bei höheren μ_B -Werten (dies entspricht niedrigeren Strahlenergien als beim RHIC oder beim LHC) herrschenden Diskrepanz zwischen der aus der LQCD ermittelten Phasengrenze und aus den aus experimentellen Daten bestimmten Lagen der chemischen ‘freeze-outs‘ (siehe Abbildung 2). Allerdings sind die Berechnungen der LQCD bei höheren μ_B -Werten noch mit sehr großen Fehlern behaftet. Derzeit sind zwei mögliche Erklärungen in der Diskussion: einerseits die Einführung einer weiteren neuen Phase zwischen dem ‘Deconfinement‘-Phasenübergang und dem chemischen ‘freeze-out‘

⁹Das Konzept von Quarkmassen ist etwas problematisch, da der Großteil der Hadronenmassen nicht aus den nur indirekt messbaren Massen von hypothetischen freien Quarks ($m_{up} = 1.5 - 3.3 \text{ MeV}/c^2$, $m_{down} = 3.5 - 6.0 \text{ MeV}/c^2$, $m_{strange} = 104_{-34}^{+26} \text{ MeV}/c^2$ [10]), sondern überwiegend aus der Feldenergie der starken Wechselwirkung resultiert, die bei der Konstituentenmasse hinzugenommen wird.

¹⁰Hohe Strahlenergien führen zu geringen baryochemischen Potentialen μ_B , bei denen LQCD und thermisches Modell ähnliche Temperaturwerte erhalten.

der Hadronen [8], andererseits die Korrektur der LQCD-Ergebnisse in Richtung der experimentellen Resultate durch die Verwendung kleinerer Gitterabstände und realistischerer Quarkmassen. Fortschritte werden auf diesem Gebiet durch das geplante ‘Compressed Baryonic Matter’-Experiment an der ‘Facility for Antiproton and Ion Research’ (FAIR) bei der GSI in Darmstadt sowie durch verbesserte Gittersimulationen erwartet.

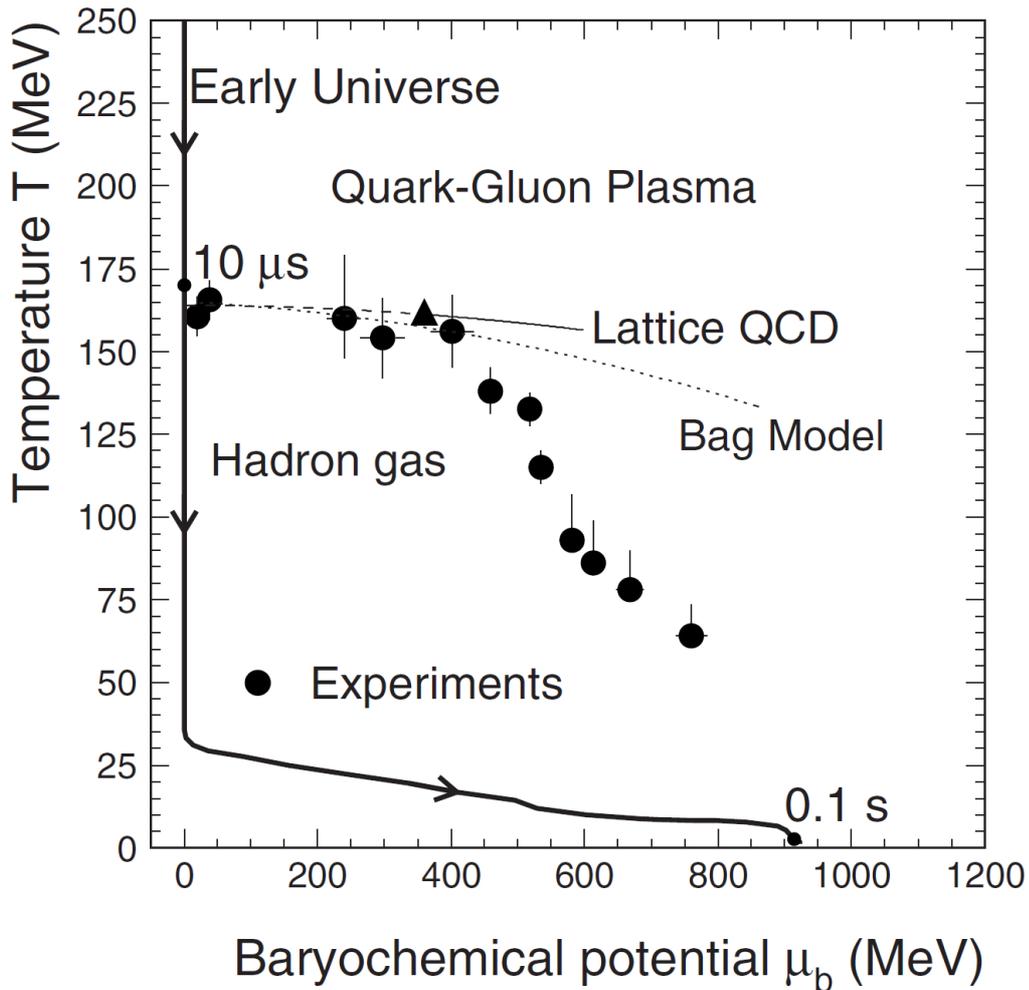


Abbildung 2: Phasendiagramm stark wechselwirkender Materie (siehe [7]): Es sind die Punkte des chemischen ‘freeze-outs’, die mit Hilfe des thermischen Modells bei verschiedenen Kollisionsenergien ermittelt wurden, eingetragen und der derzeitige Stand des Phasengrenzverlaufs zwischen hadronischer Phase und QGP mit Hilfe von LQCD (hier: Lattice QCD) und dem Bag-Modell (einem weiteren theoretischen Modell) nachzeitigem Stand der Berechnungen eingetragen. Außerdem findet sich auf dem Schaubild die vermutete Trajektorie des frühen Universums. Die Temperatur wird in Einheiten von kT angegeben.

Um die Einführung in die Physik der Schwerionenkollisionen und deren Zusammenhang mit der Erkundung des QGP abzurunden, sollen hier kurz die am stärksten diskutierten Hinweise auf das Erscheinen des QGP aufgezählt werden, die durch die RHIC-Experimente gestützt werden und durch die LHC-Experimente weiter untersucht werden sollen [9]:

- Hydrodynamik von idealen relativistischen Flüssigkeiten: quantitative Beschreibung der Impulsspektren und der Azimutalkorrelationen, welche eine sehr schnelle Einstellung eines thermisches Gleichgewicht ($t < 1\text{fm}/c$) sowie Energiedichten weit über den berechneten kritischen Werten für das Erreichen des QGP implizieren (bei RHIC-Experimenten siehe Ref. [12])
- Jet-Quenching: Unterdrückung der Produktion von Hadronen mit hohen Transversalimpulsen bei Schwerionenkollisionen im Vergleich zu Proton-Proton-Kollisionen verursacht durch vermutete Wechselwirkung des Jets mit dem QGP (siehe z. B. Ref. [13, 14])
- Quarkonia: Unterdrückung von $J/\psi(c\bar{c})$ -Produktion bei SPS (CERN) - und RHIC-Energien bzw. voraussichtlich erhöhte Produktion bei höheren Energien (LHC) als Hinweis von ‘Deconfinement’, Interpretation neuerer RHIC-Daten noch nicht abschließend geklärt (siehe Ref. [7, 15, 16])
- Thermisches Modell: die Temperatur T_{ch} des chemischen ‘freeze-outs’ als Annäherung für die kritische Temperatur T_c [2]

Widmen wir uns nun den Grundlagen des thermischen Modells.

2.3 Grundlagen der statistischen Mechanik

Es erweist sich aufgrund der enorm hohen Teilchenzahlen bei einer Schwerionenkollision als schwierig, präzise quantitative Aussagen über den zum Zeitpunkt des Aufeinanderprallens vorliegenden Mikrozustand zu treffen: Es werden schon etwa 2000 Teilchen bei Bleikernkollisionen am SPS-Beschleuniger ¹¹ (CERN) detektiert [17]. Obwohl es sich bei einer Schwerionenkollision auch mit einigen tausend beteiligten Teilchen schwerlich um ein makroskopisches System handelt — normalerweise betrachtet man in der statistischen Mechanik Systeme mit Teilchenzahlen im Größenordnungsbereich der Avogadrozahl von 10^{23} — scheint eine Beschreibung als ein Ensemble von Mikrozuständen, die mit einem Makrozustand mit makroskopischen Observablen identifiziert werden, für viele Anwendungen sinnvoll. Diese Vorgehensweise zeigt sich nicht nur bei Schwerionenkollisionen, sondern auch bei Kollisionen von Leptonen oder Hadronen, z. B. bei Proton-Antiproton-Kollisionen, zur Beschreibung hadronischer Endzustände als sehr erfolgreich. Zur Rechtfertigung dieser Betrachtungsweise bei Schwerionenkollisionen später mehr. Die statistische Mechanik, die uns die Mittel für solch eine Behandlung bietet, folgt grundsätzlich bei der Konstruktion der Gleichgewichtszustände zwei Prinzipien [18]:

¹¹Schwerpunktenergie pro Nukleonenpaar erreicht bei SPS-Beschleuniger bis zu 17.3 GeV. Bei maximaler Leistung am LHC ist diese Kenngröße um einen Faktor 300 höher.

- Verträglichkeit mit der vorhandenen Erkenntnis
- Maximierung der fehlenden Information, die proportional zur Entropie des Systems ist.

Bei der Maximierung der Entropie im Rahmen der Konstruktion des Ensembles müssen die Nebenbedingungen, die durch die Kenntnis von Informationen über das System gegeben sind, berücksichtigt werden. Die vorliegende Kenntnis der makroskopischen Größen kann dabei entweder exakt oder nur im statistischen Mittelwert vorliegen. Liegt die physikalische Observable nur als Mittelwert vor, so werden Lagrange-Multiplikatoren verwendet, die mit physikalischen Größen identifiziert werden können.

Daher unterscheidet man zwischen drei verschiedenen Gleichgewichtsensembles: dem mikrokanonischen, dem kanonischen und dem großkanonischen Ensemble.

Bei der mikrokanonischen Gesamtheit sind das Volumen V , die Teilchenzahl N und die Energie E des Systems exakt bekannt und bezeichnen die Parameter des Systems.

Ein Makrozustand, der als kanonisches Ensemble beschrieben wird, weist ein genau bekanntes Volumen V sowie eine exakt bekannte Teilchenzahl N auf. Die Energie ist allerdings nur im statistischen Mittel bekannt, das System kann folglich Energie mit der Umgebung austauschen. Es wird hier nun für die Energie ein Lagrange-Multiplikator β eingeführt, der wie folgt mit der absoluten Temperatur T verknüpft ist: $\beta = \frac{1}{kT}$, wobei k die Boltzmannkonstante bezeichnet. Das System kann durch die Parameter V , N und T beschrieben werden.

Das großkanonische Ensemble verfügt nur über exakte Kenntnis des Volumens V . Die Energie E und die Teilchenzahl N liegen nur als Mittelwert vor, so dass das System sowohl Energie als auch Teilchen mit der Umgebung austauschen kann. Für die Teilchenzahl wird ein weiterer Lagrange-Multiplikator $\beta \cdot \mu$ benötigt, wobei μ das chemische Potential bezeichnet. Das chemische Potential μ entspricht anschaulich der Energiemenge, die notwendig ist, um dem System ein weiteres Teilchen zuzuführen. Die großkanonische Gesamtheit kann folglich durch V , μ und T gekennzeichnet werden.

Im Folgenden wird letzteres Ensemble zur Beschreibung der Teilchenproduktion in Schwerionenkollisionen weiter Verwendung finden. Allerdings wird hier nicht die Teilchenzahl als statistisch gemittelt bekannte Größe angenommen, sondern die Erhaltungsgrößen Baryonenzahl, Strangeness, Charm und elektrische Ladung, um der überwiegend starken Wechselwirkung der Teilchen untereinander Rechnung zu tragen: Die Teilchenzahlen der einzelnen Hadronen sind in diesem relativistischen Gas nicht erhalten, sie steigen mit zunehmender Temperatur. Möglich wird diese Betrachtung als großkanonisches Ensemble durch die ausreichend große Zahl der Teilchen, die Ladungen der entsprechenden Erhaltungssätze aufweisen. Man kann in diesem Fall die gemessenen Daten auch über mehrere Ereignisse mitteln, um sie dann mit dem Modell zu vergleichen. Dies steht im Gegensatz zu Kollisionen von einzelnen Hadronen, bei denen der Gebrauch der kanonischen Gesamtheit mit strikter Erhaltung der Größen Baryonenzahl, Strangeness, Charm und elektrische Ladung und die Betrachtung einzelner Ereignisse angebracht ist (hierzu ausführlicher in Ref. [1]).

Die Zustandssumme Z_{GK} des großkanonischen Ensembles für den Fall eines idea-

len relativistischen Quantengases hat folgende Form¹²:

$$Z_{GK} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} Z_K(T, N, V) \quad (1)$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} Sp[e^{-\beta H}] = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\substack{\{m_j\} \\ \sum_j m_j = N}} e^{-\beta(E(\{m_j\}) - \mu N)} \quad (2)$$

$$= \sum_{\{m_j\}} e^{-\beta \sum_j (\epsilon_j - \mu) m_j} = \prod_j \sum_{m_j} e^{-\beta(\epsilon_j - \mu) m_j} \quad (3)$$

$$= \begin{cases} \prod_j \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}} & \text{für Bosonen} \\ \prod_j (1 + e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}) & \text{für Fermionen} \end{cases} \quad (4)$$

Zur Erläuterung:

- Z_K : Zustandssumme des entsprechenden kanonischen Ensembles
- T, N, V : Temperatur, Gesamtteilchenzahl, Volumen
- $\beta = \frac{1}{kT}$
- μ : chemisches Potential
- H : Hamiltonoperator des Systems
- m_j : Besetzungszahl des j -ten Zustandes (0,1 für Fermionen, 0,1,2,... für Bosonen möglich)
- $\{m_j\}$: eine zulässige Besetzungszahlkombination
- $\sum_{\substack{\{m_j\} \\ \sum_j m_j = N}}$: Summe über alle zulässigen Besetzungszahlkombinationen bei festem N
- $E(\{m_j\})$: Gesamtenergie des Systems mit den Besetzungen $\{m_j\}$
- $\sum_{\{m_j\}}$: Summe über alle zulässigen Besetzungszahlkombinationen für alle N , d.h. ohne Einschränkung unabhängig für alle m_j , da $N = 0, 1, \dots, \infty$

¹²Der im folgenden benutzte Begriff (Gesamt-)Teilchenzahl ist aufgrund des relativistischen Charakters des Gases etwas inkonsistent, da im betrachteten Gas die Quantenzahlen erhalten sind und nicht die Teilchenzahlen. Allerdings ist er gültig, wenn man in einem Gas nur Teilchen (z. B. Neutronen) mit einer für alle Teilchen gleichen im statistischen Mittel erhaltenen Quantenzahl (im Fall der Neutronen z. B. die Baryonenzahl) betrachtet. Man kann dann die Teilchenzahl mit der absoluten Quantenzahl (im Beispiel die Baryonenzahl) gleichsetzen. In diesem Falle entspricht das μ aus den folgenden Gleichungen dem baryochemischen Potential μ_B (siehe für den Fall verschiedener relevanter, erhaltener Quantenzahlen in Gleichung 17).

- $\epsilon_j = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$: Energie des j -ten Zustandes mit Impuls p und Masse m (der j -te Zustand ist neben p und m durch seinen Spin gekennzeichnet, es kann also eine Entartung vorliegen)

Im Weiteren beschränken wir uns zunächst auf ein Gas einer bestimmten Teilchensorte i , so dass alle Zustände eine gemeinsame Spinentartung g_i , Masse m_i und ein für die Teilchensorte zunächst spezifisches chemisches Potential μ_i aufweisen. Betrachten wir nun das gesamte Volumen V und nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass es sich um einen Würfel der Kantenlänge L handelt. Es folgt aus der Quantelung der Impulswerte, dass jedem diskreten p -Wert im Impulsraum ein Volumen Δ zugeordnet werden kann: $\Delta = (2\pi\hbar/L)^3$. Für den Grenzfall großer V kann folgender Grenzübergang für den Logarithmus der Zustandssumme gemacht werden, wobei die positiven Vorzeichen für Fermionen und die negativen für Bosonen anzuwenden sind:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \ln Z_{GK_i} = \lim_{V \rightarrow \infty} \sum_j \pm \ln (1 \pm e^{-\beta(\epsilon_j - \mu_i)}) \quad (5)$$

$$= \lim_{V \rightarrow \infty} g_i \sum_p \pm \ln (1 \pm e^{-\beta(\epsilon(p) - \mu_i)}) \quad (6)$$

$$= \lim_{V \rightarrow \infty} g_i \frac{1}{\Delta} \sum_p \pm \Delta \ln (1 \pm e^{-\beta(\epsilon(p) - \mu_i)}) \quad (7)$$

$$= \pm g_i \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \ln (1 \pm e^{-\beta(\epsilon(p) - \mu_i)}) \quad (8)$$

$$= \pm g_i \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty dp p^2 \ln (1 \pm e^{-\beta(\epsilon(p) - \mu_i)}) \quad (9)$$

Nun können mit Hilfe des Gibbs-Potentials

$$J(T, \mu, V) = -\frac{1}{\beta} \ln Z_{GK} = E - TS - \mu N = -PV \quad (10)$$

die thermodynamischen Größen Druck P und Entropie S sowie die Teilchenzahl N und die Energie E allgemein berechnet werden, wobei es sich hier um thermodynamische Erwartungswerte handelt. Also existiert eine nicht verschwindende Wahrscheinlichkeit, dass der tatsächliche Wert vom hier gegebenen Wert abweicht, allerdings ist für makroskopische Systeme diese Unschärfe vernachlässigbar:

$$P = - \left(\frac{\partial J}{\partial V} \right)_{T, \mu = \text{const}} = \frac{1}{\beta V} \ln Z_{GK} \quad (11)$$

$$S = - \left(\frac{\partial J}{\partial T} \right)_{V, \mu = \text{const}} \quad (12)$$

$$N = - \left(\frac{\partial J}{\partial \mu} \right)_{V, T = \text{const}} \quad (13)$$

$$E = \left(\frac{\partial (J\beta)}{\partial \beta} \right)_{\beta \cdot \mu = \text{const}} \quad (14)$$

So ergibt sich schließlich für unseren Fall einer Teilchensorte i z. B. die Teilchendichte n_i :

$$n_i = \frac{g_i}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{\beta(\epsilon(p)-\mu_i)} \pm 1} \quad (15)$$

Hierzu siehe auch ausführlicher in Ref. [19].

3 Thermische Modelle von Schwerionenkollisionen

3.1 Anwendbarkeit der statistischen Mechanik auf Schwerionenkollisionen

Bereits seit Längerem wird der Formalismus der statistischen Mechanik erfolgreich auf Schwerionenkollisionen angewendet. Zunächst muss allerdings hinreichend begründet werden, inwieweit die Voraussetzungen für diese Vorgehensweise gegeben sind: Liegt ein ausreichendes thermisches und chemisches Gleichgewicht vor?

Thermisches Gleichgewicht wird durch starke elastische Stöße gewährleistet, bei denen Impuls und Energie übertragen werden können. Ein solch equilibriertes System lässt sich durch eine Temperatur kennzeichnen. Die totalen Hadron-Hadron-Wirkungsquerschnitte stellen dabei die maßgeblichen Größen dar.

Inelastische Stöße, bei denen Teilchenumwandlungen und Teilchenerzeugung möglich sind, sorgen für chemisches Gleichgewicht. Dieses stellt sich nach häufiger vertretener Auffassung langsamer ein als das thermische Gleichgewicht. Ist ein System mehrerer Teilchensorten in einem solchen Gleichgewicht, so lässt es sich durch ein gemeinsames chemisches Potential charakterisieren. Andernfalls wird für jede Teilchenart ein eigenes chemisches Potential benötigt.

In dem nach der Kollision entstandenen Teilchencocktail kann von vorne herein nur ein lokales Gleichgewicht vorhanden sein, da das Fehlen einer räumlichen Eingrenzung — der Materieball dehnt sich nach dem Zusammenstoß ohne äußere Zwänge aus — bereits ein globales Gleichgewicht ausschließt.

Zunächst betrachten wir nun die Schwerionenkollision im Hinblick auf die genannten Gleichgewichte genauer: Gehen wir von einer Teilchendichte im Anfangszustand der Kollision von etwa $5 - 10 \text{ fm}^{-3}$ und von einer konservativen Schätzung für die hadronischen Wirkungsquerschnitte von $1 - 2 \text{ mb}$ aus, so ergibt sich eine mittlere freie Weglänge der Teilchen von $\leq 1 \text{ fm}$ [11], welche nur etwa drei Mal so groß ist wie der hard-core-Radius des Protons von etwa 0.3 fm aus Nukleon-Nukleon-Streuxperimenten [20] und deutlich kleiner als die Größe eines Atomkerns von $2R_A \geq 10 \text{ fm}$. Folglich kann davon ausgegangen werden, dass sehr viele Stöße zwischen den Teilchen stattfinden und direkt nach der Kollision sowohl ein lokales thermisches als auch chemisches Gleichgewicht zumindest in der zentralen Kollisionsregion vorliegt. Die Häufigkeit von sekundären Teilchenkollisionen gibt uns also die Möglichkeit, im Kontext solcher Experimente sinnvoll von thermodynamischen Größen wie Temperatur und Druck zu sprechen.

Die Zeitskalen betreffend liegen verschiedene theoretische Modelle noch weit auseinander. Einerseits wird weitverbreitet angenommen, dass für bestimmte Anwendungen der relativistischen Hydrodynamik ein thermisches Gleichgewicht nach spätestens $1 \text{ fm}/c$ nach der Kollision erreicht sein muss und diese hydrodynamischen Modelle sind auch zumindest teilweise quantitativ in der Lage, die Messdaten zu beschreiben. Andererseits gibt es auch theoretische Modelle, die eine Zeitskala von $2 - 4 \text{ fm}/c$ bis zum thermischen Gleichgewicht hervorbringen [11]. Zum RHIC-Experiment bei maximaler Schwerpunktenergie pro kollidierendem Nukleonpaar von 200 GeV seien hier einige vermutete Zeitspannen aus [11]

aufgeführt, um eine Vorstellung vom betrachteten System zu erlangen: Ausgehend vom Zeitpunkt der Kollision soll das QGP im Zentrum der Anordnung eine Lebensdauer von etwa $5 \text{ fm}/c$ (in Ref. [21] wird eine Zeitspanne von $3.5 \text{ fm}/c$ genannt) bei einer Übergangstemperatur von $160 - 170 \text{ MeV}$ haben, welche zugleich ungefähr dem Ende des chemischen Gleichgewichtes entspricht, wenn man der in Ref. [2] gegebenen Argumentation folgt. Das Ende des thermischen Gleichgewichtes, das man für das RHIC-Experiment mit einer Temperatur von $kT = 100 - 140 \text{ MeV}$ (siehe [11,21]) veranschlagt, trifft erst nach ungefähr $12 - 25 \text{ fm}/c$ im Kollisionszentrum ein, wenn man die Berechnungen aus [11] zu Grunde legt. Allerdings ist die Annahme unterschiedlicher Zeitpunkte für das Ende von chemischem und thermischem Gleichgewicht nicht vollständig unumstritten [11].

Trotz dieser teilweise bestehenden Unklarheiten können die experimentellen Daten erstaunlich gut durch thermische Modelle beschrieben werden [1, 17, 22, 23]. Ermöglicht wird die Übereinstimmung durch das Phänomen des ‘freeze-outs’: Der außen liegende kältere Bereich des Feuerball kühlt zeitlich vor dem innen liegenden heißen Bereich aus, so dass das ganze System ungefähr bei der gleichen Temperatur ausfriert. Hierbei muss man sich immer vor Augen halten, dass alle thermischen Modelle keine Zeitentwicklung beinhalten, sondern den in den verschiedenen Regionen des Feuerballs zu unterschiedlichen Zeitpunkten vorhandenen Zustand des chemischen ‘freeze-outs’ festhalten.

Im Gegensatz zu einer Beschreibung des QGP im Rahmen der statistischen Mechanik, bei der jede Quarksorte getrennt voneinander erhalten ist (zunächst up, down, strange) und so für jede Quarksorte ein separates chemisches Potential benötigt wird, werden im Hadronengas andere Erhaltungsgrößen für die gemeinsamen chemischen Potentiale herangezogen: Baryonenzahl, elektrische Ladung bzw. die dritte Komponente des Isospins, Strangeness und Charm. Strangeness und Charm sind zwar nur unter Vernachlässigung von schwachen Zerfällen vollständig erhalten, allerdings dauern diese länger als die Zeitspanne zwischen Kollision und ‘freeze-out’. Es werden daher für die hier durchgeführten Berechnungen nur die vor Auftreten schwacher Prozesse vorliegenden Eigenzustände der starken Wechselwirkung gezählt. Mögliche Zerfälle dieser Zustände nach dem chemischen ‘freeze-out’ werden separat berechnet.

So können mit Hilfe des thermischen Modells Vorhersagen über experimentell messbare Teilchenanzahlen und -verhältnisse ohne genaue Kenntnisse der sehr komplizierten zeitlichen Entwicklung des Systems getroffen werden. Außerdem können die gewonnenen Parameter T und μ_B genutzt werden, um den Moment des chemischen ‘freeze-outs’ im Phasendiagramm zu verzeichnen und Rückschlüsse zu ziehen, ob sich der Materieball zuvor in der QGP-Phase befunden hat oder nicht, wenn man von Phasengrenzen ausgeht, die aus anderen Überlegungen gewonnen wurden.

3.2 Hadronen als ideales Quantengas

Die zunächst naheliegendste und einfachste Modellierung des Feuerballs von enorm vielen Teilchen, die sich im chemischen und thermischen Gleichgewicht befinden, stellt die Annahme eines relativistischen idealen Quantengases dar. Dieses Gas besteht aus vielen verschiedenen Hadronensorten, deren jeweiligen spezifi-

schen Größen mit Hilfe der bereits aufgeführten Formeln (beginnend mit (11)) berechnet werden können. Im Folgenden wird die gängige Einheitenkonvention $\hbar = c = k = 1$ verwendet.

So ergibt sich für Teilchen-, Energie-, Entropiedichte und Partialdruck für jede Teilchensorte i , wobei sich die oberen Vorzeichen auf Fermionen und die unteren auf Bosonen beziehen:

$$\begin{pmatrix} n_i \\ \varepsilon_i \\ s_i \\ P_i \end{pmatrix} = \frac{g_i}{2\pi^2} \begin{pmatrix} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{(E_i(p)-\mu_i)/T} \pm 1} \\ \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{(E_i(p)-\mu_i)/T} \pm 1} E_i(p) \\ \pm \int_0^\infty dp p^2 \left(\ln(1 \pm e^{-(E_i(p)-\mu_i)/T}) \pm \frac{E_i(p) - \mu_i}{T(e^{(E_i(p)-\mu_i)/T} \pm 1)} \right) \\ \pm \int_0^\infty dp p^2 \ln(1 \pm e^{-(E_i(p)-\mu_i)/T}) \end{pmatrix} \quad (16)$$

Mit folgenden Definitionen:

$$\mu_i = \mu_B B_i + \mu_S S_i + \mu_{I_3} I_{3_i} + \mu_C C_i \quad (17)$$

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \quad (18)$$

B_i , S_i , I_{3_i} und C_i bezeichnen die Quantenzahlen Baryonenzahl, Strangeness, dritte Isospinkomponente und Charm der betrachteten Teilchensorte i .

Dabei sind die Parameter V , μ_S , μ_C und μ_{I_3} bereits wie folgt vorgegeben:

- Das Volumen V ist durch die im Mittel erhaltene Baryonenzahl festgelegt, wobei N die Anzahl der Neutronen und Z die Anzahl der Protonen, die an der Kollision zu Beginn beteiligt sind, bezeichnen:

$$V \sum_i n_i B_i = Z + N \quad (19)$$

- Die chemischen Potentiale für Strangeness S und Charm C sind durch die Annahme gegeben, dass beide im Gesamtsystem im statistischen Mittel Null ergeben sollen:

$$\sum_i n_i (\mu_S) S_i = 0 \quad (20)$$

$$\sum_i n_i (\mu_C) C_i = 0 \quad (21)$$

- Das chemische Potential für die dritte Komponente des Isospins μ_{I_3} ist durch die Erhaltung der Nukleonenladung vorgegeben:

$$V \sum_i n_i (\mu_{I_3}) I_{3_i} = \frac{Z - N}{2} \quad (22)$$

Es verbleiben also neben den Systemparametern Z und N , die durch die Art der kollidierenden Ionen gegeben sind, als freie Parameter nur das baryochemische Potential μ_B und die Temperatur T . Die thermodynamischen Größen P_i , s_i , ε_i und n_i sind additiv, so dass sich z. B. die Gesamtenergiedichte aus der Addition der Beiträge der einzelnen Teilchensorten i ergibt.

3.3 Eigenvolumenkorrektur

Die enorm hohen Teilchendichten [24], die bei einer Berechnung mit Hilfe eines idealen Quantengases auftreten, und das Bestreben, die Wechselwirkung der Teilchen untereinander realistischer darzustellen, führten zu verschiedenen Ansätzen, ein Eigenvolumen der Teilchen in die Berechnungen einzuführen, vergleichbar einem klassischen Van-der-Waals-Gas. Hierbei werden die Potentiale der Teilchen untereinander mit einem hard-core-Potential modelliert: Die Hadronen treten also in dieser Näherung als Kugeln mit festem Radius auf, die elastische Stöße untereinander ausführen. Diese Arbeitshypothese wird gestützt durch Nukleon-Nukleon-Streuexperimente, die für geringe Abstände ein stark repulsives Verhalten der Nukleonen zeigen (siehe z.B. in Ref. [20,25]). Es wird hier die Eigenvolumenkorrektur nach Rischke, Gorenstein, Stöcker und Greiner angewendet [24,26], da ihr Ansatz im Gegensatz zu anderen Korrekturen eine thermodynamisch konsistente Vorgehensweise darstellt.

Bei der Berechnung des Eigenvolumens gehen wir analog zum klassischen Van-der-Waals-Gas vor (siehe z. B. in Ref. [27]): Bei jeder Kollision eines Hadronenpaares ist dem einen Hadron das Volumen des anderen Hadrons unzugänglich. Bei diesem Volumen handelt es sich um eine Kugel mit Radius $2R$, wenn R den Radius der Hadronen bezeichnet. Da ausgehend von einer Gesamtteilchenzahl N eine Zahl von $\frac{1}{2}N(N-1) \approx \frac{1}{2}N^2$ Teilchenpaaren vorhanden ist, beträgt das gesamte unzugängliche Volumen NV_0 , wobei V_0 das für ein Hadron unzugängliche Volumen und v_0 das Eigenvolumen eines Hadrons bezeichnet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}N^2 \frac{4}{3}\pi(2R)^3 &= 4N^2 \frac{4}{3}\pi R^3 = NV_0 = N^2 v_0 \\ \Rightarrow v_0 &= 4 \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

Zunächst wird die Volumenkorrektur im Hinblick auf eine bessere Übersichtlichkeit für ein Gas, das nur aus einer Hadronensorte i besteht, eingeführt. Bei allen weiteren Rechnungen sind die Größen X für den Fall des idealen Gases ohne besondere Kennzeichnung, während die das Eigenvolumen berücksichtigenden wie folgt hervorgehoben sind: X^{excl} .

Anstatt des unter (1) verwendeten Ausdrucks für die kanonische Zustandssumme $Z_{K,i}$ eines idealen Gases einer Teilchensorte i wird nun folgender Ausdruck $Z_{K,i}^{excl}$ verwendet, um dem Eigenvolumen der Hadronen Rechnung zu tragen:

$$Z_{K,i}^{excl}(T, N_i, V) = Z_{K,i}(T, N_i, V - v_{0,i}N_i)\Theta(V - v_{0,i}N_i) \quad (23)$$

Nun erhalten wir für die großkanonische Zustandssumme:

$$Z_{GK,i}^{excl}(T, \mu_i, V) = \sum_{N_i=0}^{\infty} e^{\mu_i N_i/T} Z_{K,i}(T, N_i, V - v_{0,i}N_i)\Theta(V - v_{0,i}N_i) \quad (24)$$

Bei der Berechnung der Zustandssumme stellt sich hauptsächlich die Abhängigkeit des zugänglichen Volumens $V - v_{0,i}N_i$ von der Teilchenzahl N_i als problematisch dar. Um dieses Problem zu umgehen, führen wir nun eine Laplace-Transformation von (24) durch:

$$\hat{Z}_{GK,i}^{excl} \equiv \int_0^\infty dV e^{-\xi V} Z_{GK,i}^{excl}(T, \mu_i, V) \quad (25)$$

$$= \sum_{N_i=0}^\infty \int_0^\infty dV e^{-\xi(V-v_{0,i}N_i)} e^{(\mu_i-v_{0,i}T\xi)N_i/T} Z_{K,i}^{excl}(T, N_i, V-v_{0,i}N_i) \Theta(V-v_{0,i}N_i) \quad (26)$$

Führen wir nun die Substitutionen $\hat{\mu}_i = \mu_i - v_{0,i}T\xi$ und $\hat{V}_i = V - v_{0,i}N_i$ in jedem Summanden der unendlichen Summe aus $Z_{GK,i}^{excl}$ durch:

$$\hat{Z}_{GK,i}^{excl} = \int_0^\infty d\hat{V}_i e^{-\xi\hat{V}_i} \sum_{N_i=0}^\infty e^{\hat{\mu}_i N_i/T} Z_{K,i}(T, N_i, \hat{V}_i) \quad (27)$$

$$= \int_0^\infty d\hat{V}_i Z_{GK,i}(T, \hat{\mu}_i, \hat{V}_i) e^{-\xi\hat{V}_i} \quad (28)$$

Im Grenzfall großer Volumina gilt, wie schon unter (11) für Z_{GK} und P gesehen

$$P^{excl}(T, \mu_i) = T \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_{GK,i}^{excl}(T, \mu_i, V)}{V}, \quad (29)$$

woraus folgt:

$$Z_{GK,i}^{excl}(T, \mu_i, V)_{V \rightarrow \infty} \sim \exp\left(\frac{P^{excl}(T, \mu_i)V}{T}\right) \quad (30)$$

Ausgehend von Gleichung (28) ist ersichtlich, dass das exponentielle Wachstum von $Z_{GK,i}^{excl}$ zu einer Divergenz des ganzen Ausdruckes $\hat{Z}_{GK,i}^{excl}$ für $\xi < P^{excl}/T$ führt: Das Integral über V divergiert an der oberen Grenze. Die am weitesten rechts liegende Singularität ξ^* gibt uns den Druck P^{excl} unter Einbeziehung des Eigenvolumens. Dies folgt aus einer allgemeinen mathematischen Eigenschaft der Laplace-Transformation, die das asymptotische Verhalten von $Z_{GK,i}^{excl}$ für $V \rightarrow \infty$ und die extreme rechte Singularität von $\hat{Z}_{GK,i}^{excl}$ in der Variablen ξ miteinander verknüpft:

$$P^{excl}(T, \mu_i) = T\xi^*(T, \mu_i) \quad (31)$$

Wobei für ξ^* gilt:

$$\xi^* = \lim_{\hat{V}_i \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_{GK,i}(T, \hat{\mu}_i, \hat{V}_i)}{\hat{V}_i} = P(T, \hat{\mu}_i)/T \quad (32)$$

Des Weiteren gilt nun für $\hat{\mu}_i$:

$$\hat{\mu}_i = \mu_i - v_{0,i}T\xi^* \quad (33)$$

Hieraus ergibt sich das für die späteren Berechnungen zentrale transzendente Gleichungspaar:

$$P^{excl}(T, \mu_i) = P(T, \hat{\mu}_i) \quad \hat{\mu}_i = \mu_i - v_{0,i} P^{excl}(T, \mu_i) \quad (34)$$

Mit diesen beiden Formeln kann der Druck nun iterativ durch aufeinanderfolgende wiederholte Berechnung der beiden Größen P^{excl} und $\hat{\mu}_i$ ermittelt werden. Die Rekursion wird fortgeführt, bis die Werte konvergieren. $P(T, \hat{\mu})$ ist der Druck des idealen Gases (Gleichung 16), wobei nun μ in der Formel durch $\hat{\mu}_i$ ersetzt wird. Die Herleitung erfolgt analog für den Fall eines Gases aus m Teilchensorten, wobei für die Zustandssumme Z_{GK} des gesamten Gases und für das zugängliche Volumen \hat{V} sowie für die Rekursionsformeln gilt:

$$\ln Z_{GK}^{excl}(T, V, \mu_1, \dots, \mu_m) = \sum_i \ln Z_{GK,i}^{excl}(T, V, \mu_i) \quad (35)$$

$$\hat{V} = V - \sum_i v_{0,i} N_i \quad (36)$$

$$P^{excl} = \sum_{i=1}^{i=m} P_i(T, \hat{\mu}_i) \quad \hat{\mu}_i = \mu_i - v_i P^{excl}(T, \mu_1, \dots, \mu_m) \quad (37)$$

Die Größen Teilchendichte n_i^{excl} , totale Entropiedichte s^{excl} und totale Energiedichte ε^{excl} können nun mit Hilfe der Gleichung (11) bzw. den folgenden und der Ausdrücke in (16) für $n_i(T, \mu)$, $s_i(T, \mu)$, $\varepsilon_i(T, \mu)$ berechnet werden:

$$n_i^{excl}(T, \mu_1, \dots, \mu_m) = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial J^{excl}}{\partial \mu_i} \right)_{T,V} = \left(\frac{\partial P^{excl}}{\partial \mu_i} \right)_T = \frac{n_i(T, \hat{\mu}_i)}{1 + \sum_i v_{0,i} n_i(T, \hat{\mu}_i)} \quad (38)$$

$$s^{excl}(T, \mu_1, \dots, \mu_m) = \left(\frac{\partial P^{excl}}{\partial T} \right)_{\mu_1, \dots, \mu_m} = \frac{\sum_i s_i(T, \hat{\mu}_i)}{1 + \sum_i v_{0,i} n_i(T, \hat{\mu}_i)} \quad (39)$$

$$\varepsilon^{excl}(T, \mu_1, \dots, \mu_m) = T s^{excl} - P^{excl} + \sum_i \mu_i n_i^{excl} = \frac{\sum_i \varepsilon_i(T, \hat{\mu}_i)}{1 + \sum_i v_{0,i} n_i(T, \hat{\mu}_i)} \quad (40)$$

Die Formeln weisen zunächst im Vergleich zum Fall des idealen Gases alle den gemeinsamen Korrekturfaktor $1/(1 + \sum_i v_{0,i} n_i(T, \hat{\mu}_i))$ auf. Die zweite Korrektur betrifft die Verwendung von $\hat{\mu}_i$ anstatt von μ_i in der Berechnung der einzelnen Größen. Die erste Korrektur kürzt sich bei der Betrachtung von Teilchenverhältnissen heraus, während die zweite Korrektur auch in diesem Fall zum Tragen kommt.

4 Methodik und Ergebnisse

4.1 Umsetzung des Modells

Bei der Berücksichtigung der Iterationsformel (37) und der verschiedenen Erhaltungssätze (19 - 22) wird im Programmcode folgende Schachtelung verwendet:

- die innerste Schleife iteriert zunächst die Formeln (37) und berechnet alle Teilchendichten sowie Strangeness, Charm und dritte Isospinkomponente
- die nächste Schleife gewährleistet Baryonenzahlerhaltung (19)
- die folgende Schleife stellt Charmerhaltung sicher (21)
- die darauffolgende sorgt für verschwindende Strangeness (20)
- die äußerste Schleife erfüllt die Ladungserhaltung (22)

Weichen die Werte für die Erhaltungssätze zu stark ab, so wird das entsprechende chemische Potential korrigiert und die Berechnung wird in der innersten Schleife von neuem begonnen. Zuletzt wird die Energie- und die Entropiedichte des Systems berechnet. Starke und experimentell relevante schwache Zerfälle für instabile Teilchen bis zum Erreichen von stabilen werden berücksichtigt.

Des Weiteren enthält das derzeitige Modell noch zwei weitere Modifikationen:

- Korrelation von μ_B und elektrischer Ladung bzw. Baryonenzahl: Um zu berücksichtigen, dass die Anzahl der am Feuerball beteiligten Nukleonen nicht der Gesamtzahl aus den beiden Kernen $N + Z$ entspricht, werden die in die Erhaltungssätze für Ladung (22) und Baryonenzahl (19) eingehenden Größen mit Hilfe von μ_B skaliert (N Neutronenzahl, Z Protonenzahl, $m_{Nukleon}$ Nukleonenmasse). Diese Korrektur soll modellieren, dass das Abstoppen der kollidierenden Atomkerne mit steigender Schwerpunktenergie der Kollision immer stärker abnimmt:

$$N_{skaliert} = N \cdot \frac{\mu_B}{m_{Nukleon}} \quad (41)$$

$$Z_{skaliert} = Z \cdot \frac{\mu_B}{m_{Nukleon}} \quad (42)$$

- Berücksichtigung der nicht scharfen Masse der Resonanzen mit Hilfe der Annahme einer Breit-Wigner Verteilung bei der Berechnung der einzelnen Teilchendichten n_i^{excl} (vgl. Gleichung (38) und (16), siehe auch in Ref. [23]):

$$n_i^{excl} = \frac{g_i}{2\pi} \frac{1}{N_{BW}} \frac{1}{1 + C_{vol}} \int_{M_0}^{\infty} dm \int_0^{\infty} \frac{\Gamma_i^2}{(m - m_i)^2 + \Gamma_i^2/4} \cdot \frac{p^2 dp}{e^{(\sqrt{p^2 + m^2} - \hat{\mu}_i)/T} \pm 1} \quad (43)$$

Hierbei steht m_i für die nominale Masse, Γ_i für die Breite der Resonanz, N_{BW} für die Normierung der Breit-Wigner-Verteilung, M_0 für die Energieschwelle der dominanten Zerfallskanäle und C_{vol} für $\sum_i v_{0,i} n_i(T, \hat{\mu}_i)$ aus der Eigenvolumenkorrektur.

Sowohl die erste als auch die zweite Korrektur fallen im hochenergetischen Bereich (RHIC und LHC) für die betrachteten thermodynamischen Größen nicht ins Gewicht. Einerseits geht die Baryonenzahl der eingehenden Nukleonen und deren Ladung nicht signifikant ein, da der gesamte Erhaltungssatz für die Ladung bereits bei $\sqrt{s_{NN}} = 40$ GeV (Schwerpunktenergie pro kollidierendes Nukleonenpaar) einen Einfluss auf die Teilchenanzahlen kleiner 10 % hat und bei höheren Energien (SPS, RHIC und LHC) vernachlässigt werden kann (siehe dazu [1]). Andererseits spielt die Berücksichtigung der nicht verschwindenden Breite der Resonanzen nur eine große Rolle, wenn diese darüber entscheidet, ob diese Zustände, die real teilweise angeregt werden, durch die Nichtverwendung der Korrektur gar nicht eingehen. Bei RHIC- und LHC-Energien ist dieser Effekt nicht ausschlaggebend.

Des Weiteren sollte noch erwähnt werden, dass bei hochenergetischen Kollisionen wie bei SPS und RHIC in der Regel das thermische Modell nur auf einen Ausschnitt der Messdaten bei ‘mid-rapidity’ und nicht auf die Messungen über den ganzen Phasenraum integriert angewendet wird (hierzu z.B. ausführlicher in Ref. [1]). Diese Region ist invariant gegenüber Lorentz-Boosts bei hohen Schwerpunktenergien. Man wählt diesen Datenausschnitt, da man an den Teilchen aus der dichten Kollisionsregion und nicht an den weiterfliegenden Kernen interessiert ist. Bei niedrigeren Schwerpunktenergien lässt sich keine saubere Unterscheidung zwischen den Daten bei ‘mid-rapidity’ — es ist kein boost-invariantes Plateau ausgebildet — und den übrigen vornehmen, so dass man für das Modell die Daten über den ganzen Phasenraum verwendet, falls diese verfügbar sind.

Die besondere Eigenschaft des vorliegenden Modells ist allerdings die Einbeziehung aller hadronischen Resonanzen (auch jener, deren Zerfallsverhalten nicht genau bekannt ist), die in der aktuellen Veröffentlichung der Particle Data Group [10] aufgeführt werden. In diesen Fällen wurde auf ein Verhalten analog zu den nächstliegenden Zuständen mit gleichen Quantenzahlen geschlossen. Es handelt sich insgesamt um folgende Anzahlen von Mesonen: 123 ohne Strangeness und 32 mit Strangeness, 40 mit Charm und 14 mit Bottom. Bezüglich Baryonen wurden 48 ohne Strangeness und 48 mit Strangeness, 32 mit Charm und 14 mit Bottom berücksichtigt. Außerdem wurden aus den genannten Baryonen und Mesonen zusammengesetzte Teilchen in das Modell integriert. Die damit einhergehende Unsicherheit kann als deutlich geringer als der aus der Nichtberücksichtigung der entsprechenden Resonanzen entstehende Fehler angenommen werden (zum verwendeten Spektrum ausführlicher in Ref. [28]).

4.2 Bisherige Ergebnisse

Das hier vorgestellte Modell ist sehr erfolgreich in der Reproduktion der gemessenen Teilchenzahlverhältnisse und Teilchenzahlen über einen sehr großen Schwerpunktenergiebereich pro Nukleonenpaar von 2 – 200 GeV für verschiedene Kollisionssysteme unterschiedlicher Versuche. Die bestechende Eigenschaft des Modells liegt in der Tatsache, dass neben den Eigenvolumina nur die Temperatur T und das baryochemische Potential μ_B freie Parameter darstellen und alle anderen Größen durch Erhaltungssätze ausgehend von den Systemparametern Ladung und Baryonenzahl bereits festgelegt sind.

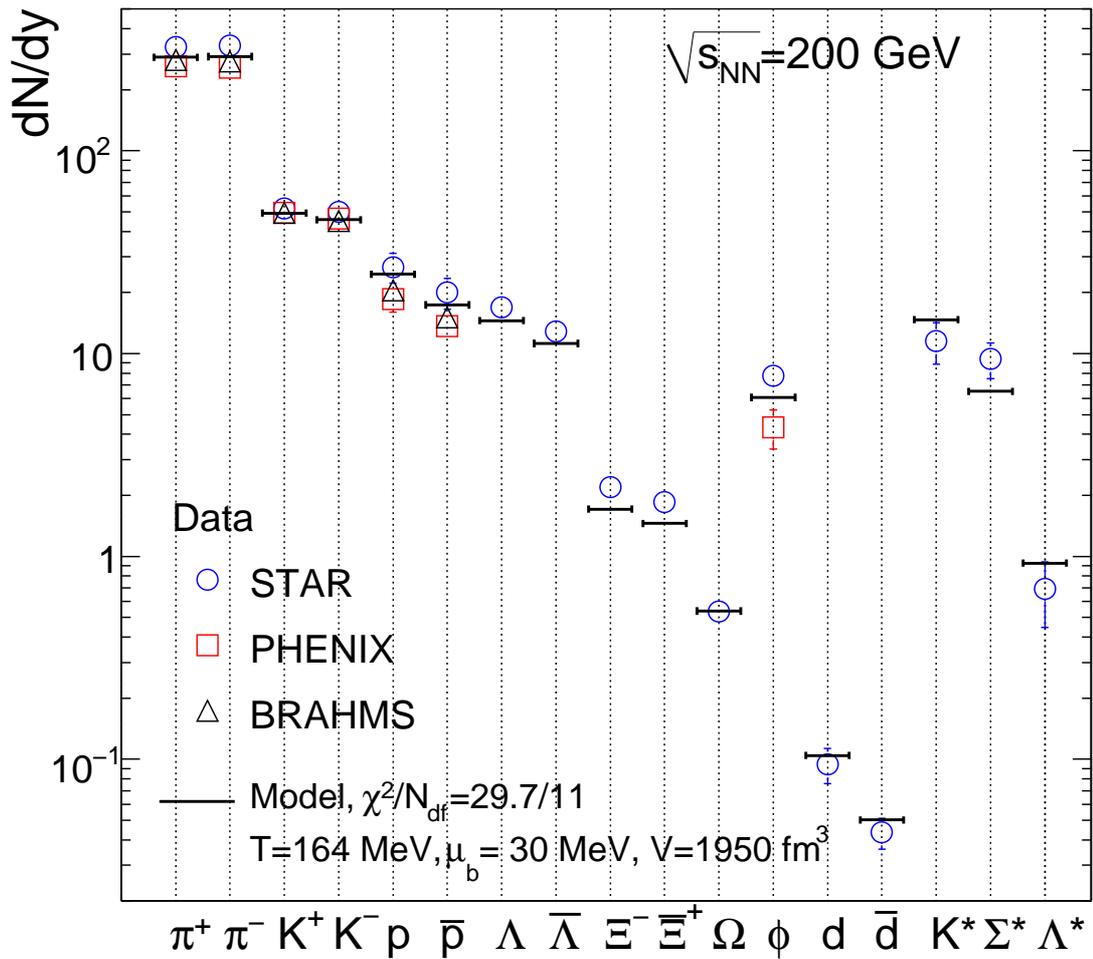


Abbildung 3: Experimentelle Teilchenanzahlen bei ‘mid-rapidity‘ des RHIC-Experimentes sowie durch Fitten erhaltene entsprechende Modell-daten [22, 28]: Der hohe reduzierte χ^2 -Wert kommt vor allem aus der Diskrepanz experimenteller Werte der verschiedenen Kollaborationen STAR, PHENIX und BRAMHS am RHIC.

Zur Veranschaulichung zeigt Abbildung 3 die ermittelten Teilchenanzahlen bei ‘mid-rapidity‘ für die höchste Energie des RHIC-Experimentes von 200 GeV, welche unter den bisher durchgeführten Experimenten der hier zu untersuchenden Energieskala des LHC am nächsten kommt.

4.3 Die Wahl der Parameter μ_B und T

Die Wahl der freien Parameter μ_B und T des Modells sind für die weitere Untersuchung des Eigenvolumeneinflusses von großer Bedeutung. Es soll vor allem dreierlei gewährleistet werden:

- Kompatibilität mit bereits bekannten Ergebnissen
- Berechnung für LHC-Energien
- Vergleichbarkeit mit der Gitterquantenchromodynamik

Aufgrund der bisherigen Ergebnisse wurde folgende Parametrisierung für μ_B und T gewählt, wobei $\sqrt{s_{NN}}$ die Schwerpunktennergie pro kollidierendes Nukleonpaar bezeichnet (siehe hierzu ausführlicher in Ref. [22, 23]):

$$\mu_B[\text{MeV}] = \frac{1303 \text{ MeV}}{1 + 0.286 \text{ GeV}^{-1} \sqrt{s_{NN}}} \quad (44)$$

$$T[\text{MeV}] = T_{\text{lim}} \frac{1}{1 + \exp(2.60 - \ln(\sqrt{s_{NN}}[\text{GeV}])/0.45)} \quad (45)$$

Fittet man die Ergebnisse für das Wertepaar T, μ_B der SIS-, AGS-, SPS- und RHIC Experimente durch diese Kurven, so erhält man für T_{lim} einen Wert von 164 MeV. Die Fitkurven sind in Abbildung 4 zu sehen. Der Verlauf der Kurve unterstützt im Besonderen die Vermutung, dass in Schwerionenkollisionen ein Phasenübergang beobachtet werden kann, da die Temperatur des Hadronengases einen bestimmten kritischen Wert nicht überschreitet. Temperaturen oberhalb dieses kritischen Wertes könnten demnach nur in einer anderen Phase (wie dem QGP) vorliegen.

Zur Erläuterung seien hier die Schwerpunktennergien der genannten Schwerionen-Beschleuniger aufgeführt: Schwerionensynchrotron (SIS) an der GSI in Darmstadt mit $\sqrt{s_{NN}} \cong 2 \text{ GeV}$, Alternating Gradient Synchrotron (AGS) am BNL mit $\sqrt{s_{NN}} = 2.70 - 4.85 \text{ GeV}$, Super Proton Synchrotron (SPS) am CERN mit $\sqrt{s_{NN}} = 6.27 - 17.3 \text{ GeV}$ und Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) am BNL mit $\sqrt{s_{NN}} = 130 \text{ GeV}$ und 200 GeV .

Da bereits die Ergebnisse der RHIC-Experimente im Bereich der Grenztemperatur T_{lim} (siehe Abbildung 4) liegen, wurde für die Berechnungen bei LHC-Energien bei einer konstanten Temperatur immer $T = 164 \text{ MeV}$ angenommen. Setzt man in die Fitkurve den Wert der maximalen Schwerpunktennergie $\sqrt{s_{NN}} = 5.5 \text{ TeV}$ der Pb-Pb-Kollision am LHC ein, so erhält man $\mu_B = 0.8 \text{ MeV}$. Die folgenden Berechnungen wurden alle mit diesem Wert durchgeführt. Die in der Fitkurve zu beobachtende Abnahme des chemischen Potentials mit steigender Schwerpunktennergie ist physikalisch außerdem einleuchtend, da das baryochemische Potential zugleich als Maß für das Verhältnis von Baryonen- und Antibaryonen angesehen werden kann, wobei ein verschwindender Wert von μ_B für eine gleiche Anzahl beider Teilchensorten steht, so dass die Baryonenzahl des Systems Null ergibt. Ein Wert größer Null entspricht einer positiven Baryonenzahl des betrachteten Systems, da dann Energie aufgewendet werden muss, um dem System ein weiteres Baryon zuzuführen. Mit steigender Schwerpunktennergie nimmt der Einfluss der Baryonenzahl der an der Kollision beteiligten Nukleonen immer weiter ab. Dies

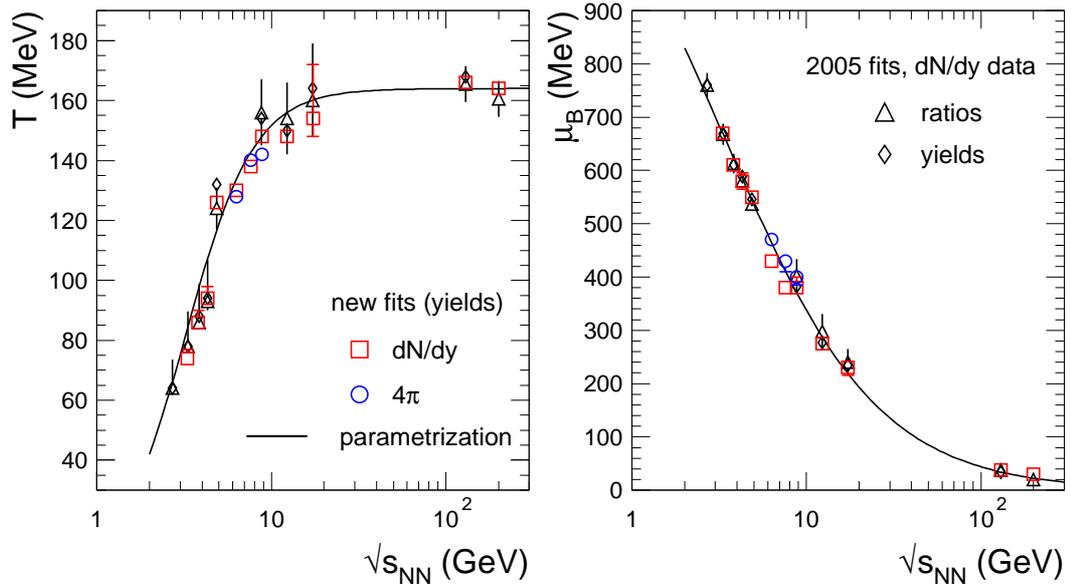


Abbildung 4: Energieabhängigkeit der Systemparameter Temperatur T und des baryochemischen Potentials μ_B mit den im Text vorgestellten Fitkurven [22]; Erläuterung: ‘yields‘ steht für aus experimentellen Teilchenanzahlmessungen gewonnene Ergebnisse, ‘ratios‘ für aus Teilchenverhältnissen gewonnene Werte, 4π für Fits an experimentelle Daten über den gesamte Phasenraum, dN/dy für Daten bei ‘mid-rapidity‘

liegt daran, dass die Teilchenzahlen aufgrund der höheren verfügbaren Energie insgesamt ansteigen und außerdem die Quantenzahlen der beteiligten Kerne immer weniger zum Hadronengas beitragen, da sie ab einer gewissen Energie bei der Kollision nicht mehr vollständig gestoppt werden, sondern gebremst weiter fliegen.

Insbesondere bietet diese Situation die Möglichkeit, Vergleiche bei fast gleicher Parameterwahl zwischen dem experimentell sehr erfolgreichen thermischen Modell und den Gitterberechnungen zu ziehen, da die meisten LQCD-Berechnungen für $\mu_B = 0$ MeV durchgeführt werden und die Experimente am LHC zum ersten Mal sehr niedrige Werte von μ_B im Experiment erwarten lassen.

4.4 Der Einfluss des Eigenvolumens

4.4.1 Variation der Teilchenradien bei gegebener Temperatur

Im Folgenden wurde der Einfluss der Eigenvolumenkorrektur auf die thermodynamischen Größen im thermischen Modell genauer untersucht. Es wurden hierbei die voraussichtlich bei den LHC-Experimenten zu erwartenden Werte für die ‘chemical freeze-out temperature‘ $T = 164$ MeV und das baryochemische Potential $\mu_B = 0.8$ MeV verwendet. In sämtlichen Abbildungen wurde das Modell für Radien von 0 fm bis 0.8 fm sowohl für Mesonen- als auch Baryonenradius in 0.1-fm-Schritten berechnet.

Alle Größen wurden im Folgenden separat gemäß (38,39,40) berechnet und zur

Kontrolle der verwendeten Rechnung wurde der Ausdruck $\varepsilon + P - Ts + \sum_i n_i \mu_i$ aufgetragen (siehe Abbildung 5). Dieser Wert sollte Null ergeben, wenn der erste Hauptsatz der Thermodynamik erfüllt ist. Diese Kontrollrechnung wurde durchgeführt, um die Modellergebnisse wie später auch in Abbildung 8b auf thermodynamische Konsistenz zu überprüfen.

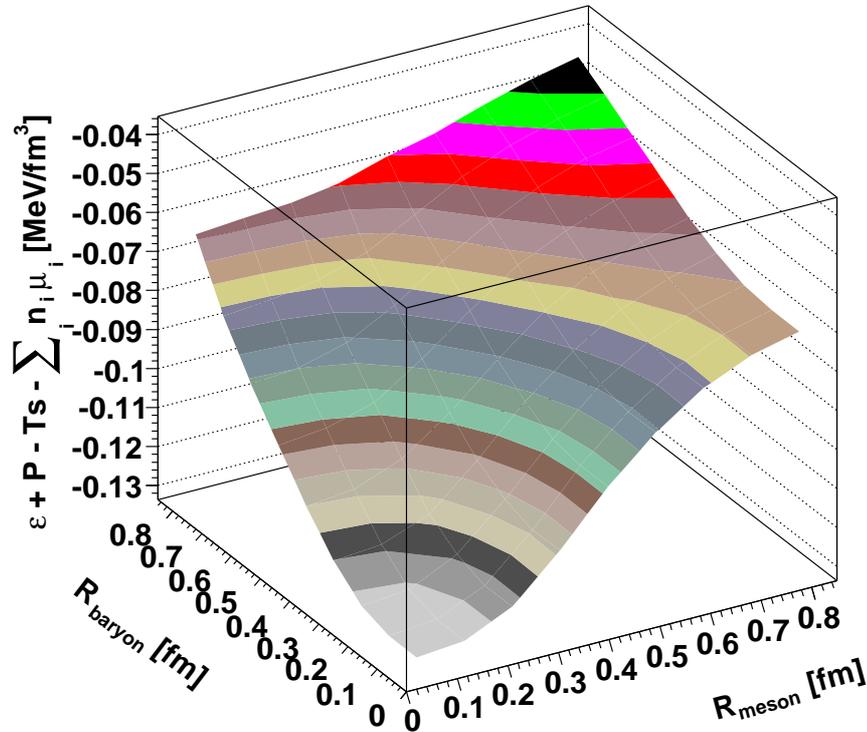


Abbildung 5: Bilanz des ersten Hauptsatz der Thermodynamik für $T = 164$ MeV für variierende Mesonenradien R_{meson} und Baryonenradien R_{baryon}

Die genaue Herkunft der systematischen Abweichung vom ersten Hauptsatz der Thermodynamik konnte nicht bestimmt werden, allerdings ist diese sehr gering. Die absolute Abweichung von Null beträgt 0.10 MeV/fm^3 bei folgender Parameterwahl: $T = 164 \text{ MeV}$, $\mu_B = 0.8 \text{ MeV}$ und Teilchenradien von 0.3 fm für Mesonen und Baryonen. Die Differenz aus der direkten Entropieberechnung und dem Entropiewert, den man unter der Annahme der Gültigkeit des ersten Hauptsatzes mit Hilfe der direkten Ermittlung der anderen Größen erhält, beträgt etwa 10^{-3} fm^{-3} . Dies entspricht einer relativen Abweichung von $2.4 \cdot 10^{-4}$. Die Abweichung vom Hauptsatz verringert sich mit steigenden Teilchenradien, jedoch ist die maximale Abweichung bei $T = 164 \text{ MeV}$ und $\mu_B = 0.8 \text{ MeV}$, die bei verschwindendem Eigenvolumen auftritt, lediglich 0.13 MeV/fm^3 . Die Temperaturabhängigkeit der Abweichung wird im nächsten Abschnitt besprochen. Die geringe Größe des beobachteten Fehlers deutet auf eine nicht physikalische, sondern numerische Problematik in der Berechnungsweise des Programms hin und bestätigt somit bezogen auf diese Gesetzmäßigkeit die thermodynamische Konsistenz der Eigenvolumenkorrektur nach Rischke, Gorenstein, Stöcker und Greiner.

Es muss darauf hingewiesen werden, dass sich die angegebenen Werte und alle Graphiken auf Berechnungen beziehen, die alle Teilchenmassen als scharf annehmen. Benutzt man die in Gleichung (43) eingeführte Berücksichtigung der Breite nur für die Berechnung der Teilchendichten (wie in Ref. [23]), so ergeben sich kaum veränderte Werte für die thermodynamischen Größen, jedoch wird der erste Hauptsatz stärker verletzt: Bei maximaler Temperatur von 190 MeV (die Abweichung nimmt stark mit steigender Temperatur zu) knapp weniger als 2 MeV/fm³. Dies ist immer noch eine einigermaßen kleine Zahl, wenn man sie mit den Unsicherheiten der thermodynamischen Größen, die durch die Variation des Eigenvolumens verursacht werden, vergleicht. Allerdings wird hier deutlich, dass eine solche Vorgehensweise bereits zu einer signifikanten thermodynamischen Inkonsistenz im Vergleich zu den zuvor erhaltenen Ergebnissen (Vernachlässigung der Teilchenbreiten) führt.

Die Berechnungen des Modells wurden zum ersten Mal unter Berücksichtigung der Teilchenbreite in allen thermodynamischen Größen ε, s, P und der Teilchendichten n vorgenommen. Hier zeichnet sich eine noch stärkere Abweichung vom ersten Hauptsatz ab als im Fall der verschwindenden Breiten, auch deutlich größer als mit dem in Ref. [23] eingeführten Verfahren. Für die maximale Temperatur von 190 MeV — auch hier nimmt die Abweichung mit steigender Temperatur zu — liegt die Abweichung bei knapp 10 MeV/fm³, für $T = 140$ MeV bei 1 MeV/fm³. Der Grund für diese starke Verletzung dieses fundamentalen thermodynamischen Zusammenhanges konnte bisher nicht geklärt werden. Zu erwähnen ist, dass die Rechenzeit maßgeblich durch diese Berücksichtigung der Teilchenbreiten beeinflusst wird: Das Programm ist etwa um einen Faktor 100 langsamer.

Aufgrund dieser nun schon problematischen Abweichungen von thermodynamischen Gesetzmäßigkeiten wird im Folgenden die Rechnung mit Vernachlässigung der Massenbreiten verwendet, da diese Berechnungen thermodynamisch in Bezug auf den untersuchten Zusammenhang konsistent sind und auch bisher für das Fitten an experimentellen Daten verwendet wurden. Die Berücksichtigung der Massenbreiten ausschließlich in den Teilchendichten, welche ebenfalls zum Fitten an experimentelle Daten verwendet wurde [22, 23, 28], führt zu Abweichungen der thermodynamischen Größen mit dem hier verwendeten Verfahren, die bei RHIC- und LHC-Energien vernachlässigbar sind, verglichen mit den Schwankungen verursacht durch die Eigenvolumenvariation.

Für die thermodynamischen Größen Energiedichte ε (siehe Abbildung 6a), Entropiedichte s (siehe Abbildung 6b) und Druck P kann man feststellen, dass sie weitaus stärker vom Mesonenradius R_{meson} als vom Baryonenradius R_{baryon} abhängen. Diese Tatsache lässt sich gut durch die weitaus höhere Dichte der Mesonen im Vergleich zu den Baryonen erklären (siehe Abbildungen 7b und 7a). Bei Standardradiuswerten von 0.3 fm für beide Hadronenarten ist die Mesonendichte bei $T = 164$ MeV mehr als um den Faktor drei größer als die Baryonendichte.

Die starke Abhängigkeit von den Mesonenradien ist natürlich aufgrund der kaum vorhandenen experimentellen Hinweise für die Abschätzung der Mesonenradien wenig erfreulich, da es sehr wenige direkte experimentelle Anhaltspunkte für das Streuverhalten der Mesonen untereinander oder mit Baryonen gibt. Für Baryonen kann wenigstens als grobe Abschätzung der gewonnene hard-core-Radius aus Nukleon-Nukleon-Streuexperimenten herangezogen werden (siehe z.B. [20])

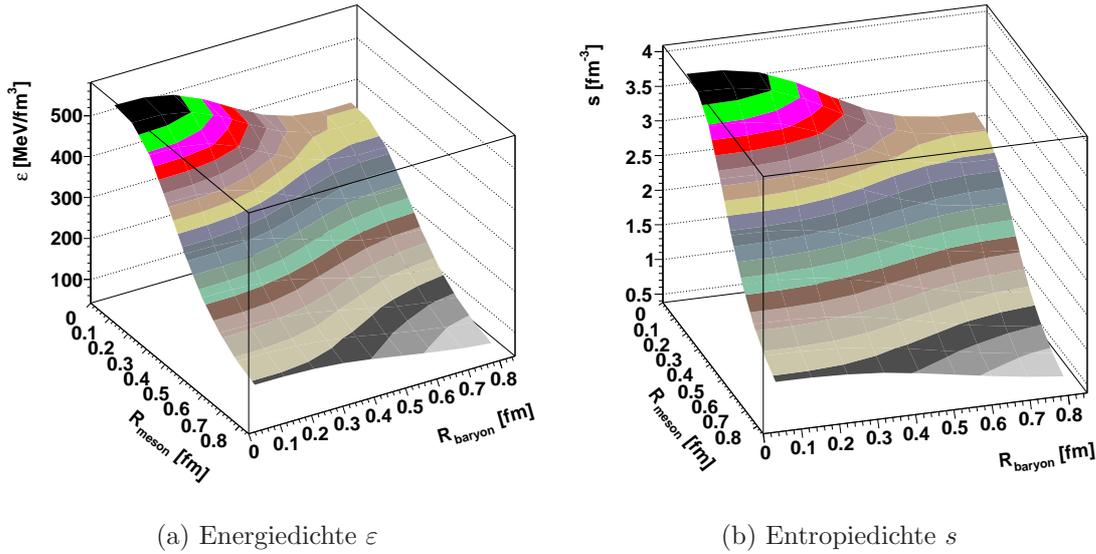


Abbildung 6: Energiedichte ε und Entropiedichte s bei $T = 164$ MeV für variierende Mesonenradien R_{meson} und Baryonenradien R_{baryon}

oder [25]), auch wenn in keinsten Weise klar ist, ob andere Baryonen zwangsläufig die gleiche Ausdehnung besitzen. Die Ladungsradien der Baryonen (gewonnen aus Streuung mit Leptonen) mit einer Größe von (0.877 ± 0.007) fm im Fall des Protons [10] erscheinen aufgrund der Dominanz der starken Wechselwirkung als bestimmender Faktor in Schwerionenkollisionen nur sehr bedingt aufschlussreich für unser Modell, da diese Radien nur eine Aussage über die Ausdehnung im Rahmen der elektromagnetischen Kräfte machen. Hinzu kommt, dass in früheren Vergleichen des Modells mit experimentell gemessenen Werten (siehe z.B. [17]) die Ergebnisse sich besser für Baryonenradien und Mesonenradien von ca. 0.3 fm fitten ließen. In Ermangelung besserer Kenntnis wurde in der Vergangenheit angenommen, dass der Mesonenhardcoreradius, der in den Stoßprozessen in unserem heißen Gas eine Rolle spielt, den Radius eines Baryons nicht übersteigt. Er wurde häufig aufgrund der Einfachheit und besserer Übereinstimmung mit dem Experiment gleich groß wie der Baryonenradius angenommen. Für die Ladungsausmaße der Mesonen (z. B. $R = (0.672 \pm 0.008)$ fm für geladene Pionen und $R = (0.560 \pm 0.031)$ fm für geladene Kaonen [10], ebenfalls aus Streuung mit Elektronen) gilt ähnliches wie für die der Baryonen. Die Ladungsradien-Werte sind wohl nicht gut geeignet für die hier benötigten Anwendungen.

Abschließend lässt sich feststellen, dass die Verkleinerung des Mesonenradius ausgehend von 0.8 fm bis hin zu 0 fm die Größen Energiedichte ε , Entropiedichte s und Druck P um etwa die Faktoren 3.8, 3.6 und 2.8 vergrößert. Die Zahlen beziehen sich auf verschwindendes Baryoneneigen Volumen. Bei maximalem Baryonenradius von 0.8 fm ergibt sich: 5.1, 4.5 und 3.2. Die Verkleinerung der Baryonenradien von 0.8 fm bis hin zu 0 fm bewirkt hingegen für die Größe Energiedichte (Entropiedichte, Druck) nur eine Vergrößerung um das 1.4 (1.4, 1.2)-fache bei verschwindenden Mesonenradien. Für maximale Mesonenradien ergeben sich die Faktoren 1.9, 1.7 und 1.2. Hierbei ähnelt sich das globale Verhalten aller genannten Größen sehr, die allesamt ihr Maximum bei verschwindendem Eigen Volumen erreichen und bei

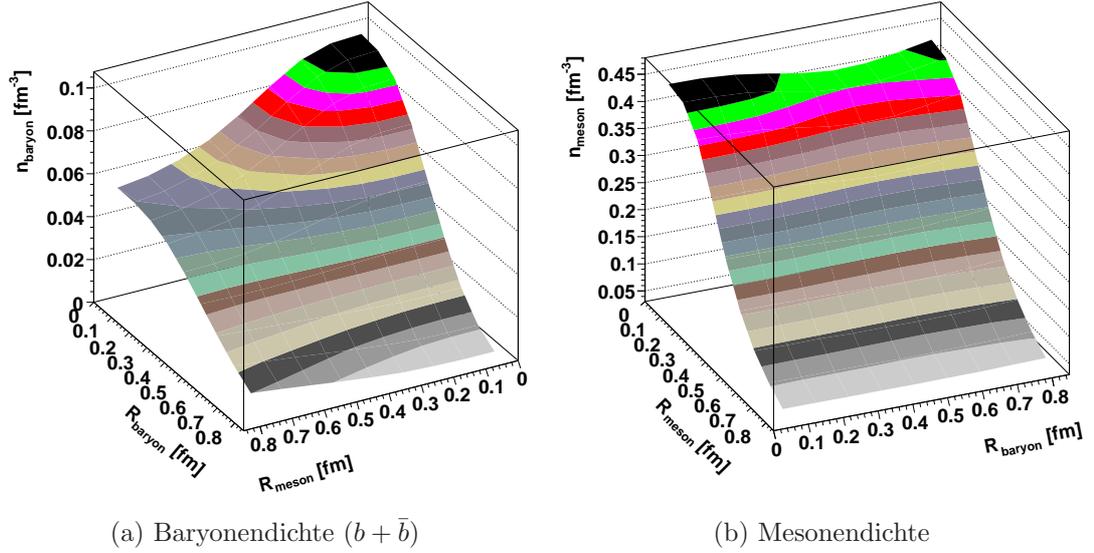


Abbildung 7: Baryondichte ($b + \bar{b}$) und Mesondichte für $T = 164$ MeV für variierende Mesonenradien R_{meson} und Baryonenradien R_{baryon}

Vergrößerung von Mesonen- als auch Baryonenradien kleiner werden (siehe Abbildungen 6a und 6b). Diese zumindest teilweise sehr starken Veränderungen durch die Einbeziehung des Eigenvolumens bezogen auf das mögliche Wertespektrum zeigen eindeutig, dass die Wahl der Volumenparameter keinesfalls unwichtig ist, um in diesem Modell die Größen P , ε und s zu berechnen.

Die Baryondichte zeigt wie zu erwarten eine stärkere Abhängigkeit vom Baryonenradius als vom Mesonenradius, wobei auch hier die maximale Dichte für verschwindendes Eigenvolumen und die minimale Dichte für maximales Eigenvolumen erreicht wird. Hingegen ist das Verhalten der Mesondichte schwieriger verständlich: Sie zeigt eine extrem starke Abhängigkeit vom Mesonenradius (ein Faktor 8 trennt die Extremwerte), was nicht weiter verwunderlich ist, jedoch zeigt der Baryonenradius so gut wie keinen Einfluss, und es tritt, wenn man den Mesonenradius konstant hält und dieser klein genug gewählt ist, ein lokales Minimum der Mesondichte zwischen $R_{baryon} = 0.5$ fm und $R_{baryon} = 0.6$ fm auf. Woher dieses Verhalten anschaulich stammt, konnte nicht geklärt werden.

Aufgrund der recht geringen Kenntnisse der Hadronenradien unter den gegebenen Bedingungen und der sehr guten Übereinstimmung der bisherigen Modellrechnungen ausgehend von 0.3 fm wird in der Folge die Untersuchung auf Teilchenradien von 0.3 fm beschränkt, wobei als Vergleich die Berechnungen ohne Eigenvolumen durchgeführt werden sowie als geringe Schwankung des Eigenvolumens auch die Kurven für 0.27 fm und 0.33 fm angegeben werden. Dies erweist sich insofern als sinnvoll, da diese Variation des Radius von 0.03 fm im Temperaturbereich des erwarteten Phasenübergangs bereits bei vielen Größen zu einem beachtlichen Fehlerbereich führt, jedoch noch so klein sind, dass die Schwankung der tatsächlich mit dem Experiment vergleichbaren Werte von Teilchenverhältnissen noch moderat ist (siehe Diskussion in Ref. [17] zu Mesonenradiuswahl von 0.25 bzw. 0.3 fm bei SPS-Daten).

4.4.2 Veränderungen in Abhängigkeit der Temperatur

Nun wurden die wichtigen thermodynamischen Größen für die im vorhergehenden Abschnitt begründete Wahl der Eigenvolumina ($R_{meson} = R_{baryon} = (0.3 \pm 0.03)$ fm) in Abhängigkeit des Modellparameters T im Bereich von 140 MeV bis 190 MeV in 2-MeV-Schritten aufgetragen. Zum Vergleich wurden ebenfalls die Werte für verschwindendes Eigenvolumen im gleichen Temperaturbereich berechnet.

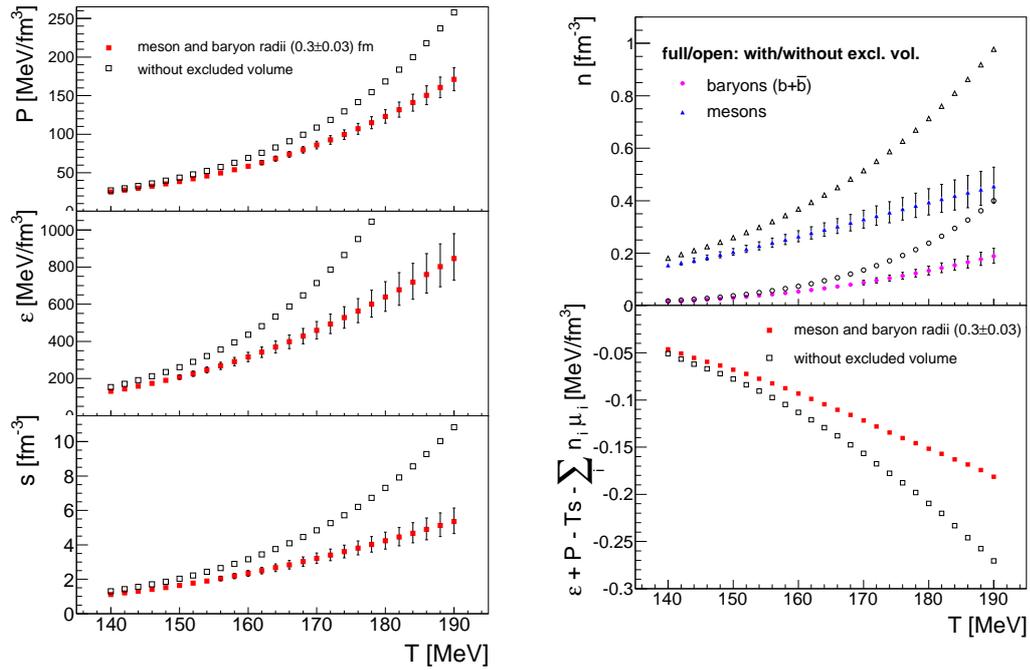
Das Temperaturintervall wurde so gewählt, dass der gesamte Temperaturbereich, der derzeit für Phasenübergänge von der hadronischen Phase hin zum QGP diskutiert wird, inbegriffen ist, sowie ein ausreichender Bereich, der unterhalb der experimentell erwarteten chemischen Ausfrieretemperatur $T_{ch} = 164$ MeV zur Verfügung steht (zur kritischen Temperatur ausführlicher im folgenden Abschnitt bzgl. Vergleich mit LQCD). Wie bereits in der Einführung erläutert, kann wohl davon ausgegangen werden, dass T_{ch} im Falle des betrachteten μ_B -Wertes unmittelbar unterhalb von T_c anzusiedeln ist (siehe hierzu in Ref. [2]). Darüber hinaus ist klar, dass der Bereich oberhalb der Übergangstemperatur T_c nicht mehr durch das Hadronen-Resonanz-Gas beschrieben werden kann, da dort die relevanten Freiheitsgrade Quarks und Gluonen und nicht mehr Hadronen sind, wenn man von einem QGP ausgeht.

Wie bereits zuvor bei konstanter Temperatur beobachtet, führt das Eigenvolumen zu einer Verkleinerung bei Druck P , Energiedichte ε , Entropiedichte s sowie der Teilchendichten n_{baryon}, n_{meson} im gesamten untersuchten Temperaturbereich (siehe Abbildung 8a und 8b). Alle betrachteten Größen nehmen mit steigender Temperatur T zu, und die relative Abweichung zwischen den Werten mit und ohne Eigenvolumenkorrektur vergrößert sich ebenfalls.

Thematisieren wir nochmals die Abweichung vom ersten Hauptsatz der Thermodynamik, insbesondere deren Temperaturabhängigkeit in Abbildung 8b: Es zeigt sich hier eine moderate, im Wesentlichen für den Fall der nicht verschwindenden Eigenvolumenkorrektur lineare Zunahme. Selbst bei maximaler Temperatur von 190 MeV und Teilchenradien von 0.3 fm ergibt sich eine mit 0.18 MeV/fm^3 immer noch sehr kleine Abweichung, auch der Wert für die Kurve ohne Eigenvolumen ist kleiner 0.3 MeV/fm^3 . Dies zeigt nochmals, dass die Berechnung der thermodynamischen Größen innerhalb des verwendeten Eigenvolumen-Modells konsistent ist. Der Fehler, der für das Eigenvolumen angenommen wurde, dominiert diese kleinen, rechnerisch bedingten Abweichungen bei Weitem.

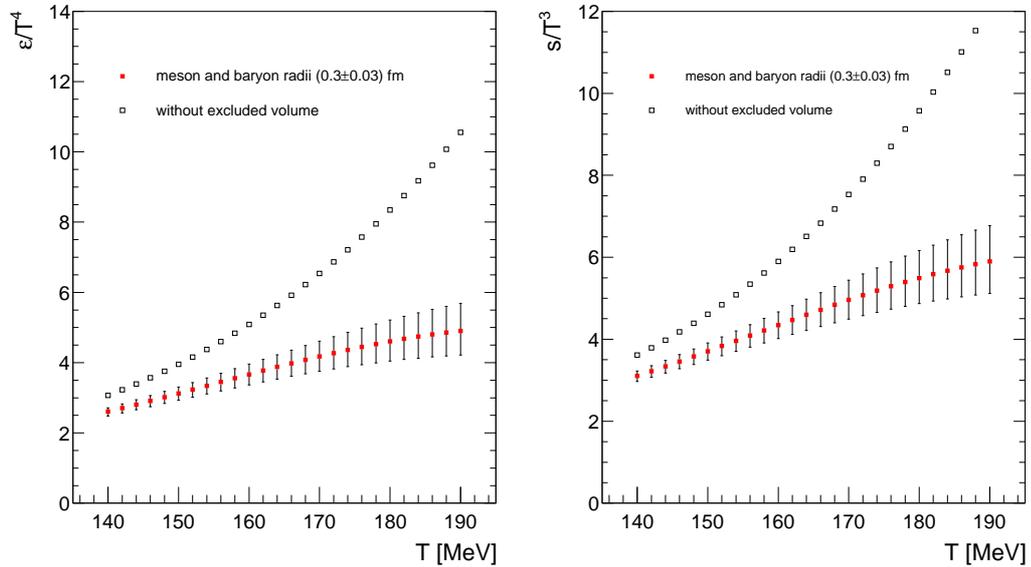
Betrachtet man Abbildung 8a genauer, so stellt man fest, dass der Druck P weniger stark von der Eigenvolumenkorrektur beeinflusst wird als die anderen Größen. So übersteigt der Druckwert ohne Eigenvolumen der Hadronen nur mit 12 % den Wert für Radien von 0.3 fm bei $T = 164$ MeV, während die entsprechenden Prozentzahlen für die Energiedichte ε 44 % und die Entropiedichte s 41 % betragen. Dies lässt sich gut durch die Berechnung der thermodynamischen Größen erklären: Der Wert für den Druck P resultiert aus den Iterationsformeln (37), während die anderen Größen noch neben der Tatsache, dass in deren Berechnung das modifizierte chemische Potential $\hat{\mu}$ wie beim Druck Anwendung findet, auch noch zusätzlich der gemeinsame Korrekturfaktor $1/(1 + \sum_i v_{0,i} n_i(T, \hat{\mu}_i))$ verwendet werden muss.

Die Mesonen- sowie die Baryonendichten steigen mit zunehmender Temperatur



(a) Druck P , Energiedichte ε , Entropiedichte s (b) n_{meson} , n_{baryon} sowie erster Hauptsatz

Abbildung 8: Druck P , Energiedichte ε Entropiedichte s , Mesonen- und Baryonendichte sowie Bilanz des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik aufgetragen gegen die Temperatur T



(a) Energiedichte ε

(b) Entropiedichte s

Abbildung 9: Energiedichte ε dividiert durch T^4 und Entropiedichte s dividiert durch T^3 aufgetragen gegen die Temperatur T

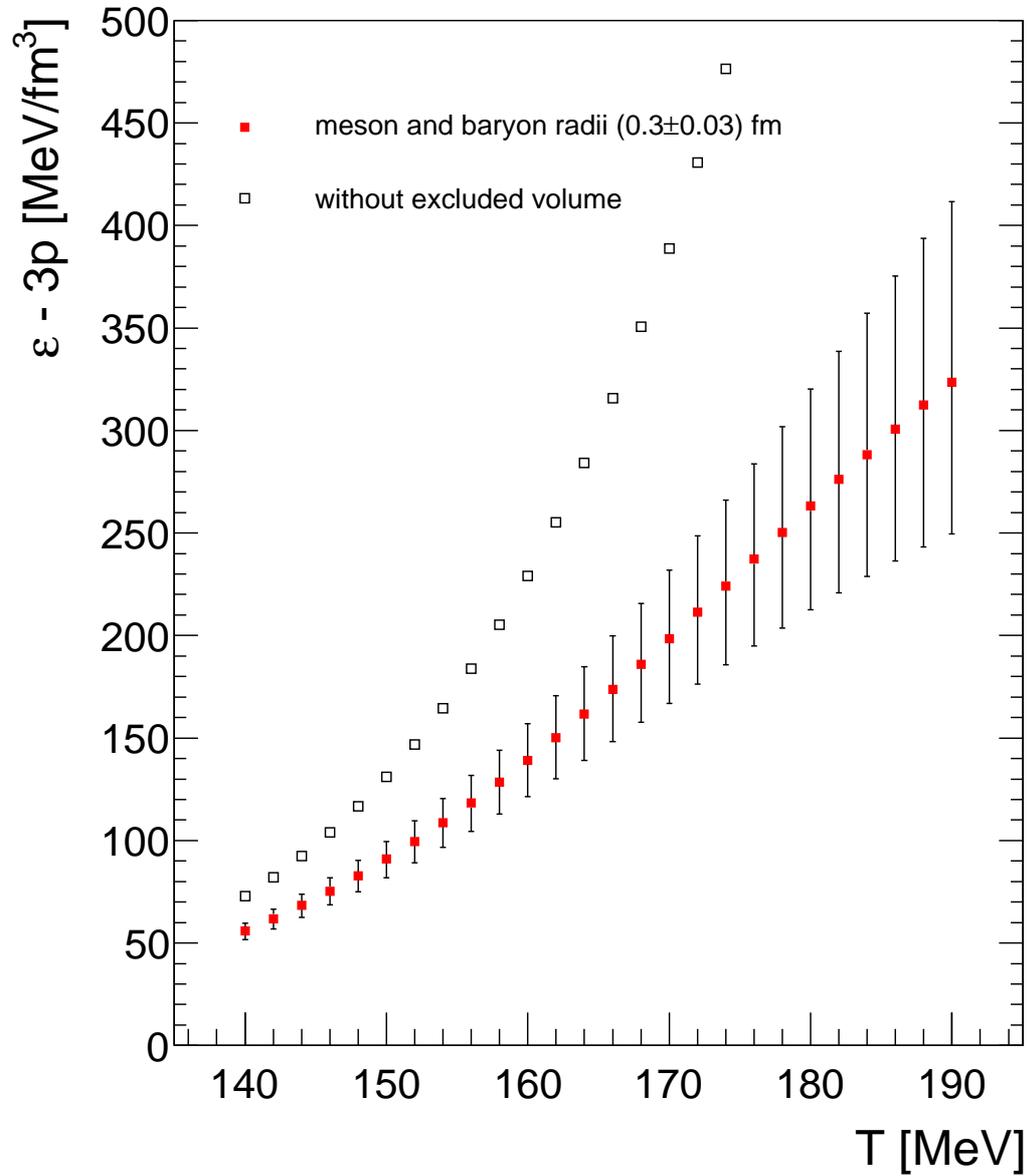


Abbildung 10: $\varepsilon - 3P$ ist gegen die Temperatur T aufgetragen. Dieser Ausdruck ergibt für ein ideales Gas masseloser Teilchen (z. B. Photonen) Null.

an, wobei hier deutlich wird, dass die Gesamtteilchenzahl im Hadronengas über den ganzen Temperaturbereich stark von den Mesonen dominiert wird (siehe Abbildung 8b), was bereits im vorhergehenden Abschnitt für eine Temperatur von $T = 164$ MeV beobachtet werden konnte.

Des Weiteren wurde die Energiedichte ε dividiert durch T^4 und die Entropiedichte s dividiert durch T^3 gegen die Temperatur T aufgetragen (siehe Abbildung 9a bzw. 9b). Diese dimensionslosen Größen sind insofern interessant, da im Falle eines idealen (also ohne Wechselwirkung, folglich ohne Eigenvolumen) Gases aus masselosen Teilchen bzw. aus ultrarelativistischen Teilchen (Massebeitrag zur Energie vernachlässigbar) mit verschwindenden chemischen Potentialen folgendes gilt [21]:

$$\varepsilon = \frac{3g}{\pi^2} T^4 \quad (46)$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{T^4} \propto g \quad (47)$$

$$\text{Ebenso: } \frac{s}{T^3} \propto g \quad (48)$$

Die aufgetragenen Größen sind also im idealen Gas bei masselosen bzw. ultrarelativistischen Teilchen direkt proportional zur Anzahl der Freiheitsgrade g . Die einfachste Betrachtungsweise unseres Hadronengases wäre die alleinige Berücksichtigung von Pionen als leichteste Hadronen und die Vernachlässigung aller schwereren Teilchen, die aufgrund ihrer höheren Masse unterdrückt sind. Wäre dies der Fall und die Masse der Pionen wäre verschwindend klein (bzw. die Teilchen wären ultrarelativistisch), so würde für g der Faktor 3 für die Anzahl der verschiedenen Pionen eingehen. Findet nun der Phasenübergang zum QGP statt, so kommt es durch das ‘Deconfinement‘ zur deutlichen Vermehrung der Freiheitsgrade auf eine Zahl von 40. Dies resultiert aus unterschiedlichem Spin, Flavour und Colour der nun auftretenden Teilchen. Es werden aufgrund der Massenunterdrückung nur up- und down-Quarks sowie Gluonen berücksichtigt. Natürlich ist das System tatsächlich viel komplizierter, jedoch bleibt das Argument der Vermehrung von Freiheitsgraden, die zu einer Zunahme der genannten thermodynamischen Größen führen, zumindest qualitativ bestehen. Da das Hadronengasmodell mit Gültigkeit bis zum chemischen ‘freeze-out‘ den Phasenübergang selbst nicht abbilden kann, erscheint der flachere Kurvenverlauf des Gases mit Eigenvolumenkorrektur bis zur etwaigen Übergangstemperatur von ca. 160-170 MeV physikalisch sinnvoller. Eine genauere Betrachtung wird im letzten Abschnitt unter Hinzunahme der Gitterquantenchromodynamik als Vergleichsmodell unternommen.

Interessant ist außerdem folgende Beobachtung: Die Modellwerte mit Eigenvolumen nähern sich im Vergleich zum Hadronengas ohne Eigenvolumenkorrektur deutlich dem Fall eines idealen relativistischen Gases aus masselosen Teilchen, für das gilt $\varepsilon - 3P = 0$ (siehe Abbildung 10). Rechnerisch ist dieses Verhalten des Modells aufgrund des bereits erläuterten größeren Einflusses der Eigenvolumenkorrektur auf die Energiedichte ε als auf den Druck P direkt ersichtlich: Der Druck wird im Gegensatz zur Energiedichte ε nicht noch durch den Faktor $1/(1 + \sum_i v_{0,i} n_i(T, \hat{\mu}_i))$ zusätzlich verkleinert. Inwieweit dieses Ergebnis physikalisch zu interpretieren ist, bleibt eine offene und interessante Frage.

4.4.3 Vergleich mit aktuellen Ergebnissen der Gitter-QCD

Im Folgenden wird das thermische Modell mit aktuellen Ergebnissen der Gitterquantenchromodynamik (LQCD) verglichen. Zugrunde gelegt wurden die aktuellen Veröffentlichungen der HotQCD-Kollaboration [29, 30] und vorläufige, noch nicht veröffentlichte Ergebnisse dieser Gruppe. Alle verwendeten Daten der LQCD stammen aus Berechnungen mit zwei leichten Quarks gleicher Masse, den Entsprechungen der leichten Up- und Down-Quarks, und einem schweren Quark, das physikalisch dem s-Quark entsprechen soll. Diese Vorgehensweise mit Vernachlässigung der noch schwereren Quarks ist vor allem durch die sehr großen benötigten Rechenkapazitäten bedingt und durch das deutlich seltenere Auftreten dieser Flavours aufgrund ihrer hohen Quarkmassen gerechtfertigt. Die Daten, mit denen verglichen wird, wurden alle für verschwindendes baryochemisches Potential μ_B berechnet, da die Einbeziehung von nicht verschwindendem μ_B sehr viel größere Probleme auf dem Gitter bereitet und noch bei Weitem nicht so zuverlässig ist wie im Fall von $\mu_B = 0$ MeV. Der Unterschied der Werte des thermischen Modells zwischen $\mu_B = 0$ MeV und $\mu_B = 0.8$ MeV können vernachlässigt werden: Die relative Abweichung bei $T = 164$ MeV und Standardeigenvolumen ($R_{meson} = R_{baryon} = 0.3$ fm) beträgt (Wert für $\mu_B = 0.8$ MeV als Referenz) für den Druck 0.12 %, für die Energiedichte 0.08 % und für die Entropiedichte 0.04 %. Aus praktischen Gründen kann im verwendeten Programmcode $\mu_B = 0$ MeV nicht gewählt werden, hier wurde ein Wert von 10^{-40} MeV eingegeben. Folglich ist ein Vergleich der LQCD-Daten und der Daten des thermischen Modells für $\mu_B = 0.8$ MeV durchaus gerechtfertigt.

Bevor nun die detaillierte Analyse der LQCD-Daten unternommen werden kann, sollte darauf hingewiesen werden, dass derzeit durchaus noch keine Einigkeit innerhalb der verschiedenen LQCD-Arbeitsgruppen über die berechnete Lage der kritischen Temperatur T_c des Phasenübergangs zum QGP besteht und somit auch alle thermodynamischen Größen in den verschiedenen Berechnungen auf dem Gitter vor allem im Bereich des Phasenübergangs nicht miteinander übereinstimmen. Die HotQCD-Kollaboration erwartet eine kritische Temperatur von ca. 185 MeV [30], während die Budapest-Wuppertal Gruppe einen Bereich von 146 – 170 MeV je nach betrachteter Größe ansetzt. Die Möglichkeit mehrerer unterschiedlicher kritischer Temperaturen hängt damit zusammen, dass es sich in den LQCD-Rechnungen um einen Crossover-Phasenübergang handelt. Verursacht werden diese Abweichungen vor allem durch mutmaßliche Fehler resultierend aus der Diskretisierung, da die verschiedenen verwendeten Wirkungen¹³ unterschiedlich im Grenzwert gegen die geforderten Eigenschaften für verschwindende Gitterabstände konvergieren.

Insbesondere sollte erwähnt werden, dass verschiedene Temperaturwerte T in der LQCD durch die Variation der Gitterabstände a mit Hilfe des folgenden Zusammenhanges erreicht werden: $T = 1/(N_\tau a)$, wobei N_τ die Anzahl der Gitterpunkte in der Zeitdimension bezeichnet. Es ist sofort ersichtlich, dass N_τ möglichst groß gewählt sein sollte. Vor allem erklärt sich hieraus, dass die Diskretisierungsfehler für kleiner werdende Temperaturen aufgrund des größeren Gitterabstandes im-

¹³HotQCD: p4fat- und astaq-Wirkung; Wuppertal-Budapest Gruppe: ‘stout staggered fermion action’.

mer größer werden. Für genügend große Werte von N_τ sollten die verschiedenen Diskretisierungen der Wirkung jedenfalls die gleichen Ergebnisse hervorbringen, wenn die entsprechenden Diskretisierungsverfahren physikalisch korrekt sind. Die aktuellsten verfügbaren Rechnungen wurden mit $N_\tau = 8$ (HotQCD, [29, 30]) und $N_\tau = 12$ (Budapest-Wuppertal, [31]) durchgeführt. In einem Plot sind zudem vorläufige Ergebnisse der HotQCD-Gruppe für $N_\tau = 12$ eingetragen. Es konnten für fast alle vergleichbaren Größen auch Werte für „physikalische“ Quarkmassen verwendet werden, d.h. das Verhältnis m_s/m_q zwischen den Massen von Up- und Down-Quark m_q und s-Quark m_s entspricht 20. Die mit diesen Parametern reproduzierten Mesonenmassen weichen nicht mehr stark von den physikalischen ab (siehe [30, 31]). In der Vergangenheit war dieses Verhältnis größer und die Skalierung wurde so gewählt, dass die s-Quarkmasse der physikalischen entsprach. Die Fixierung der physikalischen Skala (LQCD ist zunächst selbst dimensionslos) scheint kein signifikanter Grund für die verschiedenen Ergebnisse der beiden Gruppen zu sein (siehe [31]). Die erwähnten neuesten vorläufigen Ergebnisse der HotQCD-Kollaboration für $N_\tau = 12$ suggerieren eine weitere Annäherung der vermuteten kritischen Temperatur an die Werte der Wuppertal-Bielefeld-Gruppe. Ob sich dies durch die endgültigen Daten bestätigt, bleibt abzuwarten. Die verwendeten Daten der HotQCD-Kollaboration für die Spuranomalie, Druck, Energiedichte und Entropiedichte waren für die jeweiligen Größen die neuesten verfügbaren Daten aus Veröffentlichungen. Im Schaubild zur Spuranomalie sind zusätzlich vorläufige, noch nicht veröffentlichte Punkte der HotQCD-Gruppe enthalten.

Zunächst betrachten wir nun den Ausdruck $\Theta_{\mu\mu}/T^4 = (\varepsilon - 3P)/T^4 = T \frac{d}{dT}(P/T^4)$, der der Spuranomalie des Energie-Impuls-Tensors $\Theta_{\mu\nu}$ entspricht und innerhalb der LQCD benutzt wird, um daraus die physikalischen Größen Energiedichte ε , Druck P und Entropiedichte s herzuleiten. Im Falle des thermischen Modells wird diese Größe mit Hilfe von ε und P berechnet. In den verwendeten Publikationen konnte kein Hinweis auf die genaue Herkunft der verwendeten Fehlerbereiche gefunden werden.

Es zeigt sich im Rahmen der Fehlergrenzen beider Modellierungen, dass die Daten der HotQCD-Kollaboration für physikalische Quarkmassen aus [30] im relevanten Temperaturbereich von 140 MeV bis 170 MeV mit den Ergebnissen für das mit Eigenvolumenkorrektur versehene Hadronengas übereinstimmen, während die Werte für das Hadronengas ohne Eigenvolumen die der LQCD bei Weitem übersteigen. In Veröffentlichungen der HotQCD-Kollaboration wurde häufiger ein Vergleich ihrer Daten mit Hadronengasen ohne Eigenvolumen und mit einem Spektrum bis zu einem bestimmten zusätzlich eingeführten Schwellmassenwert der Teilchen (‘mass-cut’) vorgenommen. Je geringer der ‘mass-cut’ gewählt wurde, umso flacher verläuft die Kurve in diesen Fällen und erlaubt so den ‘mass-cut’ derart zu wählen, dass das ideale Hadronengas im Niedrigtemperaturbereich die LQCD-Punkte besser reproduziert. Die nun in der aktuellen Veröffentlichung [30] zu sehenden Kurven mit ‘mass-cut’ von 2.5 GeV verhalten sich im Wesentlichen ähnlich wie die hier gezeigte Kurve für das Gas ohne Eigenvolumen, allerdings entsprechend weniger schnell ansteigend, was aufgrund des Unterschiedes im verwendeten Spektrum durchaus plausibel ist. Allerdings befindet sich diese Hadronengaskurve der HotQCD-Kollaboration noch signifikant über den Werten aus der LQCD. Neben den vor allem auch im Niedrigtemperaturbereich immer noch

schwierig zu quantifizierenden Diskretisierungsfehlern der LQCD-Berechnungen unterhalb von 250 MeV auch für $N_\tau = 8$ würde das vernachlässigte Eigenvolumen der Resonanzen eine natürliche Erklärung für die noch bestehende Abweichung bieten. Folglich wäre die hier gegebene Beschreibung des Hadronengases bereits einigermaßen im Einklang mit den LQCD-Ergebnissen. Es bleibt in diesem Kontext auf jeden Fall abzuwarten, inwieweit ein größerer N_τ -Wert die Daten weiter verändert. Die bereits eingezeichneten Punkte für $N_\tau = 12$ suggerieren, dass sich die Werte der LQCD im Niedrigtemperaturbereich erhöhen, der Anstieg, der die Übergangstemperatur anzeigt, früher stattfindet, und die Kurve nun im Vergleich zum Hadronengas mit Eigenvolumen sogar deutlich zu hoch liegt. Allerdings kann wohl aufgrund der großen Fehlerbereiche und der Vorläufigkeit der Ergebnisse noch kaum eine sinnvolle Interpretation durchgeführt werden.

Stimmt die Spuranomalie innerhalb der Fehlergrößen noch erstaunlich gut überein, so muss man feststellen, dass dies für die thermodynamischen Größen Druck P , Energiedichte ε und Entropiedichte s in keinsten Weise zutrifft, wie in den Abbildungen 12, 13a und 13b zu sehen ist. Die Übereinstimmung bei der Spuranomalie könnte durchaus nur durch Effekte, die sowohl den Druck als auch die Energiedichte betreffen, zu Stande gekommen sein, die sich subtraktiv wenigstens teilweise auslöschen. Es zeigt sich hier vor allem für den Druck, die Entropiedichte und in geringerem Maße für die Energiedichte, dass keine Übereinstimmung im Temperaturbereich bis zum chemischen ‘freeze-out‘ von ca. 164 MeV zu erkennen ist. Auch eine einfache Verschiebung in der Temperatur, die im Wesentlichen die hier benutzten Ergebnisse der HotQCD-Kollaboration von den Resultaten der Wuppertal-Budapest-Gruppe unterscheidet, könnte nur schwerlich einen ähnlichen Kurvenverlauf der beiden Modelle im Temperaturbereich bis zum ‘freeze-out‘ erzeugen. Dies liegt an der Tatsache, dass das Hadronen-Resonanzgas mit Eigenvolumen bei allen Größen im betrachteten Temperaturbereich bereits bei höheren Werten einsetzt und auch die Steigungen beider Modelle nur schwierig in Einklang zu bringen sind. Es bleibt abzuwarten, was neuere Ergebnisse für größere N_τ -Werte ergeben.

Bezüglich der Berechnungen ohne Berücksichtigung des Eigenvolumen lässt sich feststellen, dass der absolute Abstand zu den LQCD-Werten im Anfangsbereich der Kurven bei 140 MeV noch größer ausfällt. Der Kurvenverlauf (insbesondere Steigung und Krümmung) entspricht jedoch im Gegensatz zu den Eigenvolumenresultaten recht gut den Ergebnissen aus der LQCD. Dazu lässt sich zunächst bemerken, dass der rapide Anstieg im Bereich des Phasenübergangs, den man bei den LQCD-Daten beobachtet, vor allem mit der Befreiung von Quark-Freiheitsgraden (siehe 46), dem ‘Deconfinement‘, erklärt wird. Der Phasenübergang selbst ist allerdings nicht mit den Mitteln eines einfachen Hadronenresonanzgases darstellbar, so dass der starke Anstieg der hier aufgetragenen Größen im Falle punktförmiger Teilchen wohl als unphysikalisch zu betrachten ist. Nimmt man zudem an, dass das verwendete, auf Messungen basierende Hadronenmassenspektrum ρ noch unvollständig ist und das Spektrum sich wie bereits von Hagedorn angenommen [32] für große Masse exponentiell verhält ($\rho \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f(m)e^{m/T_0}$), was durch bisherige Messungen auch ungefähr reproduziert wurde, so divergieren die Ausdrücke für Energiedichte ε , Entropiedichte s und Druck P für die Hagedorn Temperatur T_0 , wenn man die Teilchen als punktförmig annimmt. Dieses Verhalten wäre auf

keinen Fall mit dem in der LQCD erwarteten Crossover-Phasenübergang zu vereinbaren.

Insgesamt gesehen weichen das hier verwendete thermische Modell und die Ergebnisse aus der LQCD noch wesentlich voneinander ab. Ob die beiden Modelle kompatibel sind, wird sich bei Berechnungen für größere N_τ -Werte der LQCD erst noch zeigen müssen.

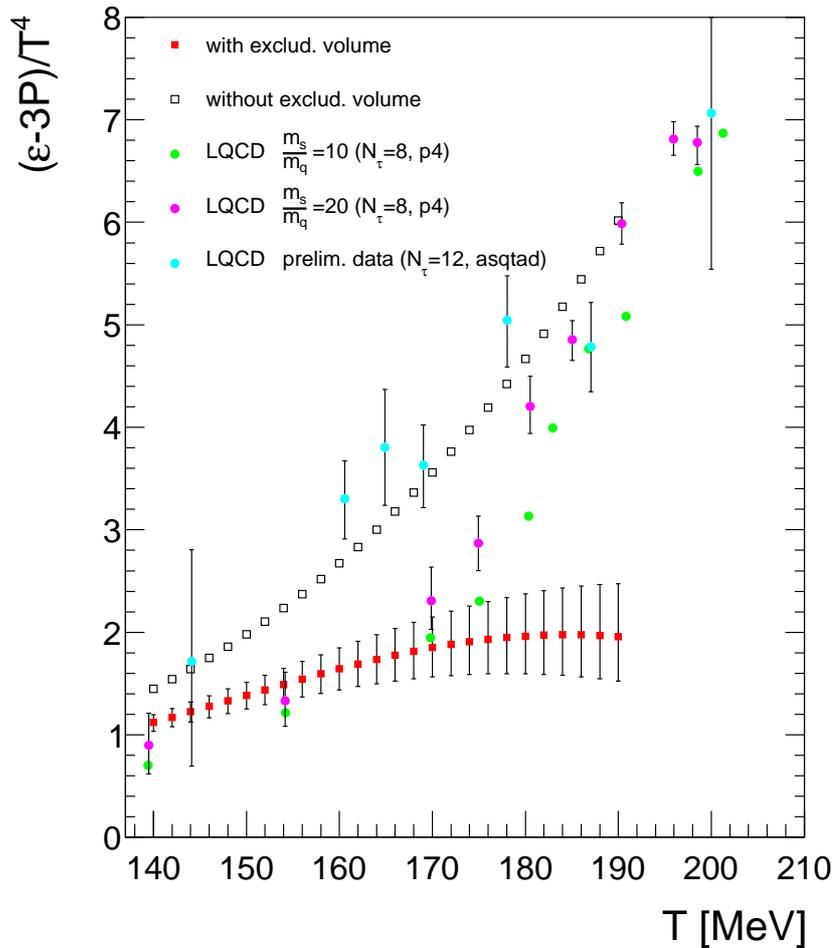


Abbildung 11: Spuranomalie des Energie-Impuls-Tensors $(\varepsilon - 3P)/T^4$ aufgetragen gegen die Temperatur T : Vergleich des thermischen Modells mit Gitterquantenchromodynamik (LQCD) für physikalische Massen für Up- und Down-Quarks sowie ältere Werte für doppelt so große Massen für Up- und Down-Quark [29, 30] (in beiden Fällen berechnet mit Hilfe einer p4fat3-Wirkung, $N_\tau = 8$); eingetragen sind auch vorläufige, noch nicht veröffentlichte Ergebnisse der HotQCD-Kollaboration berechnet mit einer asqtad-Wirkung mit $N_\tau = 12$)

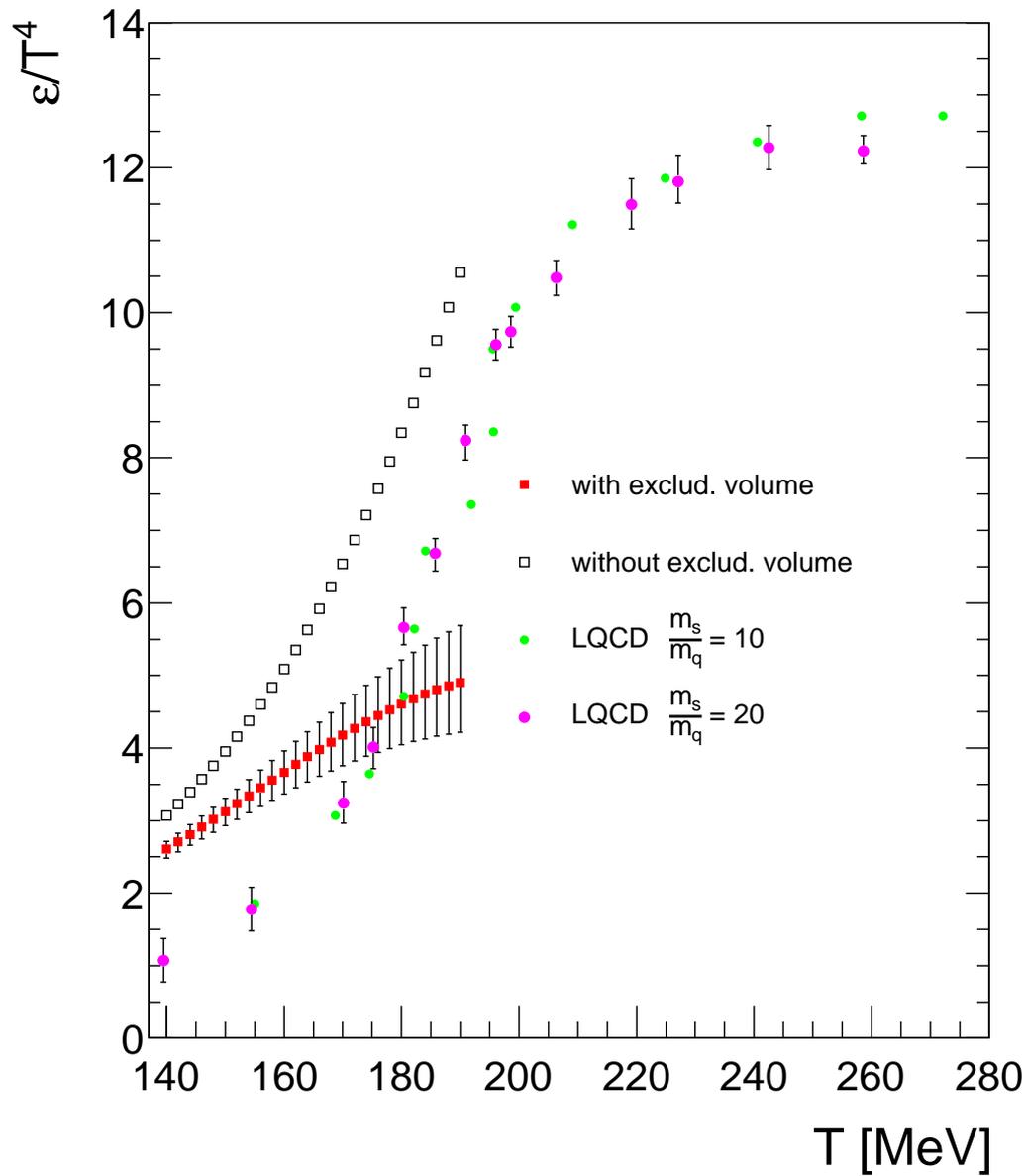


Abbildung 12: Energiedichte dividiert durch T^4 aufgetragen gegen die Temperatur T : Vergleich des thermischen Modells mit Gitterquantenchromodynamik (LQCD) für physikalische Massen für Up- und Down-Quarks sowie ältere Werte für doppelt so große Massen für Up- und Down-Quark (in beiden Fällen berechnet mit Hilfe einer p4fat3-Wirkung, $N_\tau = 8$) [29, 30]

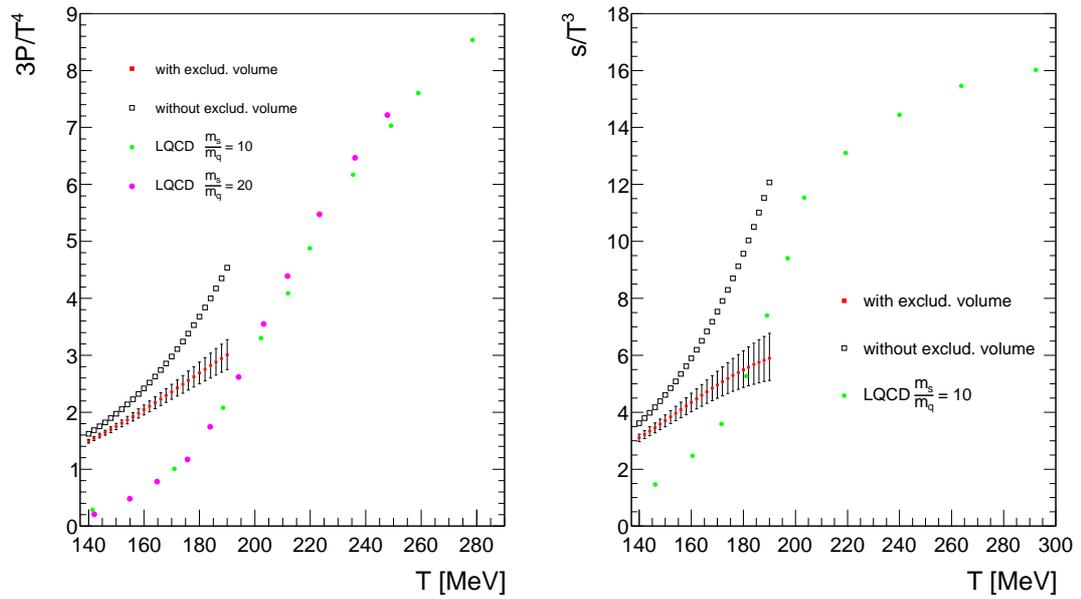
(a) $3P/T^4$ (b) s/T^3

Abbildung 13: Dreifacher Druck dividiert durch T^4 und Entropiedichte dividiert durch T^3 aufgetragen gegen die Temperatur T : Vergleich des thermischen Modells mit Gitterquantenchromodynamik (LQCD) für physikalische s -Quarkmasse und doppelte physikalische Masse für Up- und Down-Quarks sowie im Falle des Druckes auch für physikalische Up-, Down- und s -Quarkmassen (immer berechnet mit Hilfe einer p4fat3-Wirkung, $N_\tau = 8$) [29, 30]

5 Fazit

Das thermische Modell spielt eine zentrale Rolle in der phänomenologischen Beschreibung von Schwerionenkollisionen. Es besticht vor allem durch seine Einfachheit — es müssen ausgehend vom gegebenen Kollisionssystem nur die beiden Systemparameter Temperatur T und baryochemisches Potential μ_B variiert werden — und durch seinen großen Erfolg, experimentelle Daten der Hadronenproduktion von AGS- bis RHIC-Energien zu beschreiben [1, 22, 23, 28].

Die thermodynamischen Größen des Modells wurden im Rahmen dieser Arbeit genauer auf den Einfluss des gewählten Eigenvolumens der Hadronen untersucht. Hierbei wurde Bezug genommen auf zu erwartende Parameter für Schwerionenkollisionen bei LHC-Energien. Da die Gitterquantenchromodynamik bisher in erster Linie nur für verschwindendes baryochemisches Potential zuverlässige Vorhersagen trifft, erweist sich diese Wahl als gut geeignet, um Vergleiche zwischen thermischem Modell und Gitterberechnungen durchzuführen.

Im Hinblick auf das Eigenvolumen stellt sich vor allem heraus, dass die Wahl des Mesoneneigenvolumens einen deutlich schwerwiegenderen Einfluss auf die untersuchten Größen Druck P , Energiedichte ε und Entropiedichte s hat als das Baryoneneigenvolumen. Aufgrund der deutlich höheren Mesonendichten im Hadronengas erweist sich dieser Befund als schlüssig. Allerdings ist eine vernünftige Abschätzung der Radien von Mesonen schwierig, da ihre Eigenschaften bei Stößen untereinander und bei Stößen mit Baryonen weniger bekannt sind als die von Nukleonen, die als Anhaltspunkt für das Verhalten der Baryonen verwendet werden. Wie bereits erwähnt, bietet die experimentelle Situation am LHC nach dem RHIC-Experimenten eine noch bessere Chance, die Ergebnisse der bereits weit vorangetriebenen Gitterquantenchromodynamik bei verschwindendem baryochemischen Potential μ_B mit experimentellen Daten zu konfrontieren. Der Vergleich der Daten der HotQCD-Kollaboration [29, 30] mit dem bisher experimentell erfolgreichen thermischen Modell bei Parametern für LHC-Energien ergab bis auf die Spuranomalie des Energie-Impuls-Tensors weiterhin signifikante Differenzen wie bei früheren Vergleichen sowie bei Vergleichen mit Hadronengasmodellen ohne Eigenvolumen: Im Temperaturbereich bis etwa mindestens 175 MeV, das heißt im Wesentlichen unterhalb der kritischen Temperatur T_c für den Phasenübergang (je nach Modell ungefähr 160 – 190 MeV) zum Quark-Gluon-Plasma, bis zu der die Beschreibung mit Hilfe eines Hadronengases adäquat erscheint, sind die Werte aller thermodynamischen Größen Druck P , Energiedichte ε und Entropiedichte s im Fall des Hadronengases deutlich größer als die Berechnungen der Gitterquantenchromodynamik. Der Kurvenverlauf zeigt teilweise auch bei diesen niedrigen Temperaturen große Unterschiede. Der große Unterschied der Verläufe mit und ohne Eigenvolumen zeigt außerdem den ausschlaggebenden Einfluss des Eigenvolumens und die Wichtigkeit einer adäquaten Wahl des Parameters Eigenvolumen. Es bleibt in diesem Kontext offen, ob diese Unverträglichkeiten zwischen Gitterberechnungen und Hadronengasmodell sich durch Erhöhung der zeitlichen Gitterschritte verringern lassen werden, da die Diskretisierungsfehler der Werte aus den Gittersimulationen gerade im sensiblen Temperaturbereich als sehr hoch eingeschätzt werden. Außerdem muss das thermische Modell bei der zukünftigen Analyse der Daten der LHC-Detektoren erst noch unter Beweis stellen, dass es

auch bei diesen Energien die gemessenen Teilchenanzahlen gut beschreiben kann. Abschließend lässt sich feststellen, dass das Eigenvolumen einen großen Einfluss auf die thermodynamischen Größen im Hadronen-Resonanz-Gas hat. Abgesehen von Nukleon-Nukleon-Streuexperimenten als Anhaltspunkt wurde der Radius der Hadronen von 0.3 fm allerdings nur aufgrund guter Übereinstimmung des Modells bei entsprechender Parameterwahl mit den gemessenen Werten gewählt. Der weitere Vergleich unter Berücksichtigung eines Fehlerbereiches für die Hadronenradien von $\pm 10\%$ mit den Ergebnissen aus der Gitterquantenchromodynamik zeigt signifikante Abweichungen bei den thermodynamischen Größen Druck, Energiedichte und Entropiedichte, jedoch eine Übereinstimmung bei der Spuranomalie.

Literatur

- [1] P. Braun-Munzinger, K. Redlich, J. Stachel. Particle Production in Heavy Ion Collisions. *Invited review for Quark Gluon Plasma 3*, 2003. arXiv:nucl-th/0304013v1.
- [2] P. Braun-Munzinger, J. Stachel, C. Wetterich. Chemical Freeze-out and the QCD Phase Transition Temperature. *Physics Letters B*, 596:61–69, 2004. arXiv:nucl-th/0311005v2.
- [3] S. Bethke. Experimental Tests of Asymptotic Freedom. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 58:351–386, 2006. arXiv:hep-ex/0606035v2.
- [4] F. Wilczek. Asymptotic Freedom: From Paradox to Paradigm. *Reviews of Modern Physics*, 77:857–870, 2005. arXiv:hep-ph/0502113v2.
- [5] G. Sterman. Quantum Chromodynamics. *Encyclopedia of Mathematical Physics*, 2005. arXiv:hep-ph/0512344v1.
- [6] D. H. Rischke. The Quark-Gluon Plasma in Equilibrium. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 52:197–296, 2003. arXiv:nucl-th/0305030v2.
- [7] P. Braun-Munzinger und J. Wambach. Phase diagram of strongly interacting matter. *reviews of modern physics*, 81:1031–1050, 2009. doi: 10.1103/RevModPhys.81.1031.
- [8] A. Andronic et al. Hadron production in ultra-relativistic nuclear collisions: Quarkyonic matter and a triple point in the phase diagram of QCD. *Nuclear Physics A*, Volume 837:65–86, 2010. doi:10.1016/j.nuclphysa.2010.02.005.
- [9] J. Stachel. Has the Quark-Gluon Plasma been seen? *International Journal of Modern Physics A*, 21:1750–1763, 2005. arXiv:nucl-ex/0510077.
- [10] C. Amster et al.(Particle Data Group). Review of Particle Physics. *Physics Letters B*, 667:1–1340, 2008. <http://pdg.lbl.gov/>.
- [11] P. Huovinen and P.V. Ruuskanen. Hydrodynamic Models for Heavy Ion Collisions. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 56:163–206, 2006. arXiv:nucl-th/0605008v1, doi:10.1146/annurev.nucl.54.070103.181236.
- [12] J. Adams et al. (STAR Collaboration). Azimuthal anisotropy in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. *Physical Review C*, 72:014904, 2005. doi: 10.1103/PhysRevC.72.014904.
- [13] S. S. Adler et al. (PHENIX Collaboration). Midrapidity Neutral-Pion Production in Proton-Proton Collisions at $\sqrt{s} = 200$ GeV. *Physical Review Letters*, 91:241803, 2003. doi: 10.1103/PhysRevLett.91.241803.
- [14] S. S. Adler et al. (PHENIX Collaboration). Suppressed π^0 production at Large Transverse Momentum in Central Au+Au Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV. *Physical Review Letters*, 91:072301, 2003. doi: 10.1103/PhysRevLett.91.072301.

- [15] R. Granier de Cassagnac. Quarkonia Production in Cold and Hot Matters. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 35:104023, 2008. arXiv:0806.0046v3 [hep-ph].
- [16] A. Andronic et al. Statistical hadronization of charm: from FAIR to the LHC. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 35:104155, 2008. doi:10.1088/0954-3899/35/10/104155.
- [17] I. Heppe. Ein statistisches Modell für die Teilchenproduktion in hochenergetischen Schwerionenkollisionen. *Diplomarbeit*, Heidelberg, 1998.
- [18] H. Horner. *Statistische Physik*. Vorlesungsskript SS 2004.
- [19] F. Schwabl. *Statistische Mechanik*. Springer-Verlag, 3. edition, 2006.
- [20] T Hamada und I. D. Johnston. A potential model representation of two-nucleon data below 315 MeV. *Nuclear Physics*, 34:382–403, 1962.
- [21] Jean-Yves Ollitrault. Relativistic hydrodynamics for heavy-ion collisions. *European Journal of Physics*, 29:275–302, 2008. arXiv:0708.2433v2, doi: 10.1088/0143-0807/29/2/010.
- [22] A. Andronic, P. Braun-Munzinger, J. Stachel. Thermal Hadron Production in Relativistic Nuclear Collisions. *Acta Physica Polonica B*, 40:1005–1012, 2009. arXiv:0901.2909v2 [nucl-th].
- [23] A. Andronic, P. Braun-Munzinger, J. Stachel. Hadron production in central nucleus-nucleus collisions at chemical freeze-out. *Nuclear Physics A*, 772:167–199, 2006. arXiv:nucl-th/0511071v3.
- [24] G. D. Yen, M. I. Gorenstein, W. Greiner, S. N. Yang. Excluded volume hadron gas model for particle number ratios in A+A collisions. *Physical Review C*, 56:2210–2218, 1997. arXiv:nucl-th/9711062v1, doi: 10.1103/PhysRevC.56.2210.
- [25] A. Bohr und B. Mottelson. *Nuclear Structure*, volume 1. Benjamin, 1969.
- [26] D. H. Rischke, M.I. Gorenstein, H. Stöcker, W. Greiner. Excluded volume effect for the nuclear matter equation of state. *Zeitschrift für Physik C – Particles and Fields*, 51:485–489, 1990. doi: 10.1007/BF01548574.
- [27] F. Reif. *Fundamentals of statistical and thermal physics*. Mc Graw-Hill Book Company, 1965.
- [28] A. Andronic, P. Braun-Munzinger, J. Stachel. Thermal hadron production in relativistic nuclear collisions: the hadron mass spectrum, the horn, and the QCD phase transition. *Physics Letters B*, 673:142, 2009. arXiv:0812.1186v3, doi: 10.1016/j.physletb.2009.06.021.
- [29] A. Bazavov et al. Equation of state and QCD transition at finite temperature. *Physical Review D*, 80:014504, 2009. arXiv:0903.4379v1 [hep-lat], doi: 10.1103/PhysRevD.80.014504.

- [30] M. Cheng et al. Equation of State for physical quark masses. *Physical Review D*, 81:054504, 2010. arXiv:0911.2215v2 [hep-lat].
- [31] Y. Aoki et al. The QCD transition temperature: results with physical masses in the continuum limit II. *Journal of High Energy Physics*, JHEP06(2009)088, 2009. arXiv:0903.4155v1.
- [32] R. Hagedorn. How we got to QCD Matter from the Hadron Side by Trial and Error. *Invited talk at „Quark Matter 1984“, Fourth International Conference on Ultra-Relativistic Nucleus-Nucleus Collisions, Helsinki*, pages 53–76, 1984.

Danksagung

Zunächst möchte ich Frau Prof. Dr. Johanna Stachel für ihre Unterstützung und vor allem für die Möglichkeit, dieses interessante Thema bearbeiten zu dürfen, danken.

Besonderer Dank gilt meinem Betreuer Dr. Anton Andronic, der mir trotz der Entfernung der GSI in Darmstadt zum physikalischen Institut in Heidelberg bei Fragen und Unklarheiten physikalischer Art sowie bei Problemen beim Programmieren sehr unterstützend zur Seite stand.

Ich möchte außerdem Herrn Prof. Dr. Peter Glässel für das Korrekturlesen meiner Arbeit und seine herzliche Einführung am physikalischen Institut danken.

Des Weiteren danke ich Felix Reidt für seine Bemühungen, mir beim Programmieren in ROOT und C++ zu helfen.

Für das Korrekturlesen meiner Arbeit gilt mein Dank Kristijan Cule, Simon Mayer und Felix Reidt.

Ich möchte mich bei meinen Eltern ebenfalls für das Korrekturlesen, aber vor allem für die Ermöglichung meines Physikstudiums bedanken.

Erklärung:

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den 25. Mai 2010

Unterschrift: _____