

2.3 Übergangswahrscheinlichkeit und Fermi's Goldene Regel

Übergangswahrscheinlichkeit/Zeit ω bestimmt den WQ eines Streuprozesses, bzw. die Lebensdauer eines Teilchenzustandes:

$$\omega = \frac{\dot{N}_s}{N_i \cdot N_t} = \frac{(n_i v_i \cdot N_t) \sigma}{n_i \cdot V \cdot N_t} = \frac{v_i \sigma}{V} \quad \left\{ \begin{array}{l} V = \text{Normierungsvolumen} \\ = 1, \text{ fällt aus} \\ \text{Rechnungen hinaus} \end{array} \right.$$

Übergangswahrscheinlichkeit/Zeit ergibt sich mittels Fermi's Goldener Regel



$$\omega_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |A_{fi}|^2 \rho(E_f)$$

$$A_{fi} = \langle f | H_{ww} | i \rangle$$

$$\rho(E_f) = \text{Zustandsdichte} = \frac{dN}{dE}(E_f)$$

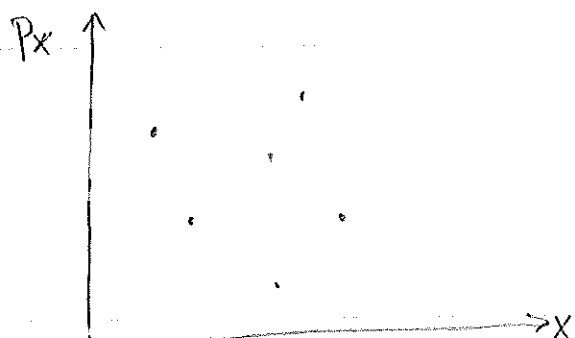
$$= \text{Zahl der Zustände in } [E_f, E_f + dE]$$

wird mittels Feynman-Regeln berechnet

a) Phasenraum und Zustandsdichte

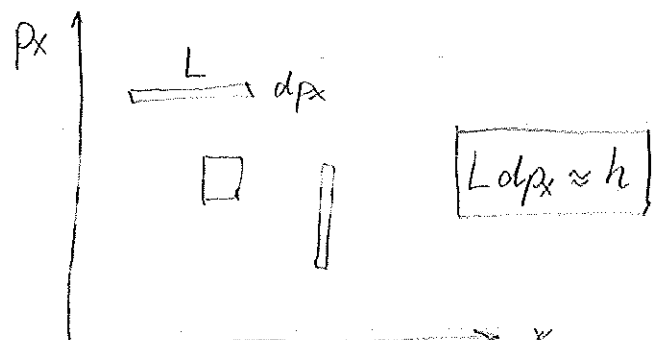
Um einen Teilchenzustand zu beschreiben muß Ort und Impuls des Teilchens bestimmt und angegeben werden. Im „ein-dimensionalen“ Impuls-Ortsraum (= Phasenraum): x, p_x

Klassische Mechanik



Teilchenzustände werden durch Phasenraumpkt. beschrieben

Quantenmechanik



Jenach Messung werden Zustände durch verschiedene Phasenraumzellen beschrieben: Form verschieden, Phasenraumvol. gleich.

Wieviele Zustände passen in ein Phasenraumvolumen Ldp ?

$$1\text{-dim.}: \quad dN^{1D} = \frac{Ldp}{h} \quad N^{1D} = \frac{L \cdot \int dp}{h}$$

$$3\text{-dim.}: \quad dN^{3D} = \frac{V \cdot d^3p}{h^3} \quad N^{3D} = \frac{V \cdot \int d^3p}{h^3} = \frac{V \cdot \int d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$$

$\underbrace{h = \frac{h}{2\pi}}_{\uparrow}$

benötigt wird aber die Zustandsdichte

$V = \text{Normierung vol.}; \text{ s.o.}$

1-Teilchen-Zustandsdichte (3D):

$$E = E_1$$

$$N_1^{3D} = \frac{V \int d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \quad ; \quad g_1 = \frac{dN_1^{3D}}{dE} = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d}{dE_1} \int d^3p_1$$

$$= \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d}{dE_1} \int p_1^2 dp_1 d\Omega_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{wg. } E_1^2 = p_1^2 c^2 + m^2 c^4 \\ \rightarrow \frac{d}{dE_1} = \frac{E_1}{p_1 c^2} \cdot \frac{d}{dp} \end{array} \right\} \rightarrow = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{E_1 p_1}{c^2} \int d\Omega_1$$

2-Teilchenzustandsdichte *)

weg. Korrelation $\nearrow p_2$ im CHS
 \cong "1-Teilchen" $\nwarrow p_1$

$$\text{aber } E = E_1 + E_2$$

$$g_2 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{d}{dE} \int d^3p_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Integration} \\ \text{über } \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \\ \text{deckt alles ab.} \end{array} \right.$$

$$= \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \cdot p_2 \int d\Omega_2$$

n-Teilchenzustandsdichte:

$$g_n = \frac{V^{n-1}}{(2\pi\hbar)^{3(n-1)}} \cdot \frac{d}{dE} \left(\int d^3p_2 \dots d^3p_{n-1} \right)$$

Bemerkung:

Der hier angegebene Phasenraumfaktor ist nicht lorentzinvariant

(d^3p ändert sich unter Lorentztrf.), Ein invariantes Maß hingegen

ist $\frac{d^3p}{2E}$ - welches in Lorentz-Invarianten Phasenraum (LIPS) verwendet wird

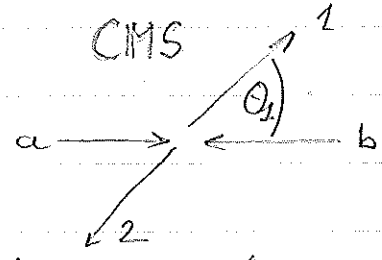
*) Siehe auch Fraufeld & Kenley, S. 280 ff.

(s. PDG)

b) Wirkungsquerschnitt

$$\underbrace{a + b}_i \longrightarrow \underbrace{1 + 2}_f$$

$$\sigma = \frac{\omega_{fi}}{v_i}$$



← ignore Normierungsvolumen,
 v_i = Geschwindigkeit $a \rightarrow b$

$$\omega_{fi} = \int \frac{2\pi}{h} |A_{fi}|^2 \underbrace{\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{c^2} \cdot \frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2}}_{\text{Phasenraum}} p_2 d\Omega_2$$

- (1) hochrelativistisch: $v_i = c$
- (2) vernachlässigbare Massen auch im Endzustand: $m_i \ll E_i/c^2$
- (3) CM-System: $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ $\beta_i, \beta_f \approx 1$

Flußfaktor muß relativ zu fixed-target Konfig. komputiert werden (Nachmann S. 1977)

$$\begin{cases} E_1 + E_2 = 2p_2 c \\ E_1 \cdot E_2 = p_2^2 c^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d\sigma &= 2 \times \frac{2\pi}{h} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{c^3} \cdot \frac{c p_1^2}{2p_2 c} \cdot p_2 \cdot |A_{fi}|^2 d\Omega_2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{\hbar^4 c^4} \right) (p_2^2 c^2) \cdot |A_{fi}|^2 d\Omega_2 \quad \left. \begin{array}{l} p_1^2 c^2 = E_1^2 \\ \text{für endl. Geschw.} \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{(\hbar^4 c^4)} \cdot \frac{p_2^2 c^2}{\beta_i \beta_f} \cdot |A_{fi}|^2 d\Omega_2 \end{aligned}$$

Bemerkung

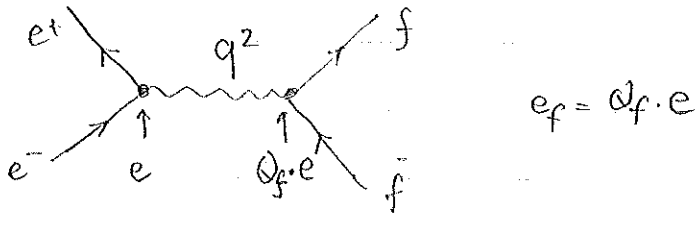
Berechnet man statt $\prod_i d^3 p_i$ das Lorentz-invariante Maß $\prod_i \frac{d^3 p_i}{2E_i}$ ändert sich die Normierung etc.
 Man erhält am Ende:

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} \left(\frac{1}{\hbar^4 c^4} \right) \frac{1}{(E_a + E_b)^2} \int |A_{fi}|^2 d\Omega_2$$

(s. auch PD6)

2.4 e^+e^- - Annihilation

$e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ mit $f\bar{f} = (e^+e^-), \mu^+\mu^-, \tau^+\tau^-, q\bar{q}$

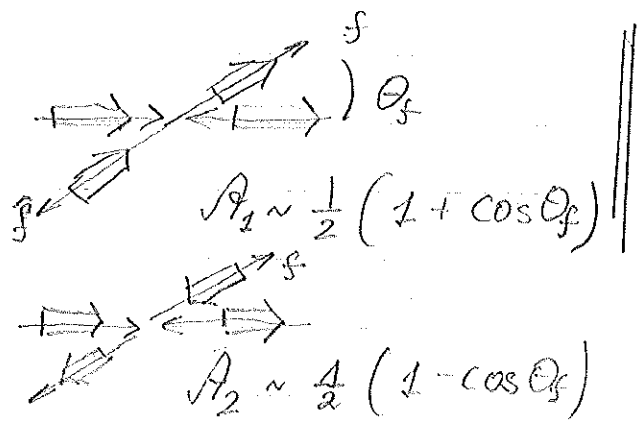
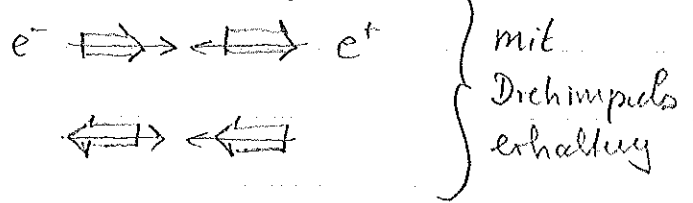


$A_{fi} \sim e \frac{1}{q^2} e_f \sim \frac{4\pi\alpha}{q^2} \cdot Q_f \left(\frac{\hbar c}{c^2}\right)^3$ } Faktor berücksichtigt Dimensionen

(im folgenden $Q_f = 1$) $q^2 = E_{CMS}^2$

Die angegebene Amplitude ignoriert Photon Spin=1 und Fermion Spin=1/2

Erlaubte Konfigurationen: \rightarrow



siehe auch Fig 2.2

Addition der einzelnen Spin-Amplituden $A_i \rightarrow |A_{fi}|^2$
+ Mittelung über Anfangskonfiguration

$|A_{fi}|^2 = \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta_f) \frac{(4\pi\alpha)^2}{q^4} \left(\frac{\hbar c}{c^2}\right)^2$ } s. Fig. 2.2
 $= \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta_f) \frac{(4\pi\alpha)^2}{E_{CMS}^4} (\hbar c)^6$ ||

$p_+ c^2 = \frac{E_{CMS}^2}{4}$

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \cdot \frac{1}{(\hbar c)^4} \cdot \frac{E_{CMS}^2}{4} \cdot \frac{(4\pi\alpha)^2}{E_{CMS}^4} \cdot (\hbar c)^6 \cdot \frac{1}{4} (1 + \cos^2 \theta_f)$

$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4} \cdot \frac{1}{E_{CMS}^2} (1 + \cos^2 \theta_f)^2 (\hbar c)^2$ ||

siehe auch Bied Fig 2.3:

$\sigma_{tot} = \frac{4\pi\alpha^2}{3} \frac{1}{E_{CMS}^2} (\hbar c)^2 = \frac{87nb}{E_{CMS}^2 [GeV^2]}$ ||

$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$