

Schülerexperiment Beugungsbild und Ortsbild

Aus dem Schulunterricht ist bekannt, dass das Licht gebeugt wird, wenn der Strahlengang (einer ebenen Welle) senkrecht zur Ausbreitungsrichtung begrenzt wird. Wenn die Beugungsobjekte wie z.B. ein Spalt, ein Draht oder eine Lochblende dabei etwa die Größenordnung einer Wellenlänge haben, ihre Größe also im Mikrometerbereich liegt, dann treten sehr charakteristische Beugungs- bzw. Interferenzbilder auf. Dies lassen sich z.B. mit Hilfe der Technik des Zeigerdiagramms berechnen.

Im Versuch sollen sie nun den Zusammenhang zwischen einem Objekt und seinem Beugungsbild wesentlich genauer kennen lernen. Dabei werden gleichzeitig die Grenzen der optischen Auflösung und die Bedingungen für den Übergang zwischen der Wellenoptik und der geometrischen Optik deutlich.

In der Wellenoptik wird die Ausbreitungsrichtung des Lichts durch den Wellenvektor $\mathbf{k} = 2\pi/\lambda \mathbf{e}_k$ beschrieben, wobei \mathbf{e}_k der Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung ist. Er steht immer senkrecht auf den Wellenfronten und stellt damit in der geometrischen Optik die Richtung der Lichtstrahlen dar.

Der Aufbau wird im Anhang gezeigt und erklärt.

Beugung an einer Kante:

Betrachten wir wie in Abb. 1 den Einfall einer ebenen Welle auf eine Kante, dann wird das Licht an dieser Kante gebeugt. Nach Huygens geht von jedem Punkt der Wellenfront eine Kugelwelle aus. Solange die Welle unendlich ausgedehnt ist kompensieren sich an jedem Punkt alle Komponenten der Wellenvektoren die senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung stehen, die Richtung des Wellenvektors ändert sich also nicht. An der Kante funktioniert das plötzlich nicht mehr, da sich jetzt die \mathbf{k} -Komponenten der Teilwellen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung nicht mehr kompensieren. Wir werden daher auch Lichtintensität im Bereich des geometrischen Schattens messen.

Versuch 1: Wir machen das im Versuch sichtbar, indem wir das Ortsbild einer Kante (als Dia verfügbar) mit Hilfe einer Sammellinse auf die CCD-Kamera abbilden. Letztere hat den Vorteil, dass wir den Intensitätsverlauf in der Nähe der Kante sehr genau bis zu kleinen Intensitäten messen können. Hierzu Linse 1 verschieben bis das Bild scharf ist.

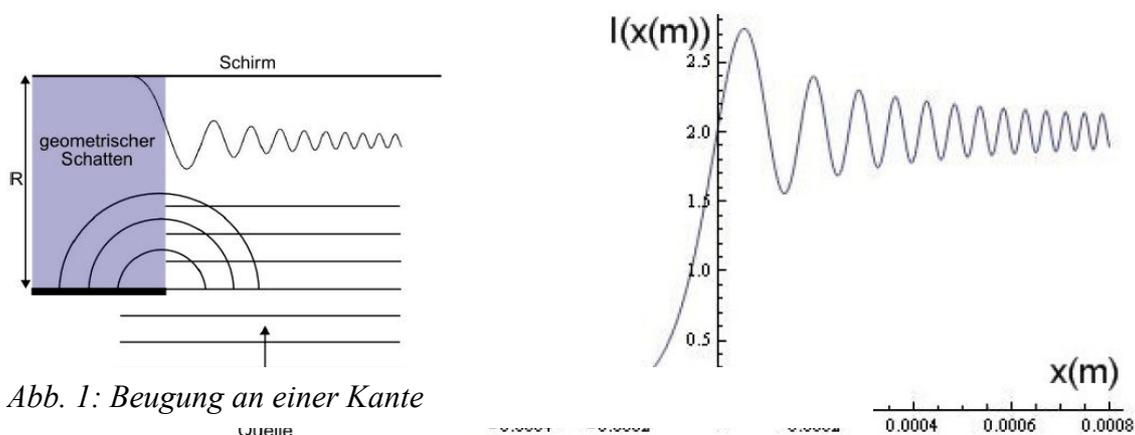


Abb. 1: Beugung an einer Kante

Wie in der Abb.1 skizziert, sehen wir bei der optischen Abbildung niemals eine scharfe geometrische Kante. Die Intensität nimmt bei einem Beobachtungsabstand von $R=90$ cm

bereits im Bereich der geometrisch beleuchteten Zone ab und fällt außerhalb der geometrischen Kante dann auf Null ab innerhalb eines Abstands von ca. 200 μm . Innerhalb des geometrisch beleuchteten Bereichs oszilliert die Intensität des Lichts nahe der Kante bei der Beleuchtung mit kohärentem Licht über einen Bereich von mehreren mm, was aber mit dem Auge kaum wahrnehmbar, mit der CCD-Kamera aber gut nachweisbar ist (Bei inkohärenter Beleuchtung ist dieser Oszillationseffekt fast Null und es bleibt nur die ,Unschärfe der Kante). Die geometrische Optik ist also bei der Abbildung einer Kante nur dann eine gute Näherung, wenn diese Unschärfe vernachlässigbar ist.

Beugung am Spalt

Als Nächstem wenden wir uns der Beugung am Spalt zu, d.h. wir schieben eine 2. Kante an die erste heran. Solange der Spalt groß gegen die Wellenlänge ist, werden wir in der Ortsabbildung einen homogen ausgeleuchteten Spalt sehen, dessen beide Ränder unscharf sind. Interessanter wird es erst wieder, wenn die Spaltgröße in den Bereich der Wellenlänge kommt. Jetzt wird es interessant, parallel zum Ortsbild auch das Beugungsbild zu sehen. Dazu hat der Aufbau einen 50:50 Strahlteiler und eine 2. Linse, mit der wir das Beugungsbild scharf auf denselben Schirm abbilden können. Die Intensitätsverteilung im Beugungsbild des Spaltes dürfte aus der Schule ebenfalls bekannt sein. Sie hat die Form

$$I(x) = I_0 \frac{\sin^2 x}{x^2} = I_0 \frac{\sin^2(k_x d/2)}{(k_x d/2)^2} \quad \text{mit } k_x = 2\pi/\lambda \sin\alpha$$

und ist in Abb. 2 gezeigt. Neben dem Hauptmaximum in Vorwärtsrichtung ($\alpha=0$) zeigt es eine Folge von Nebenmaxima. Für das Nebenmaximum n-ter Ordnung gilt die Bedingung $d/2 \sin\alpha = n \lambda$ oder $k_x d/2 = n \pi$.

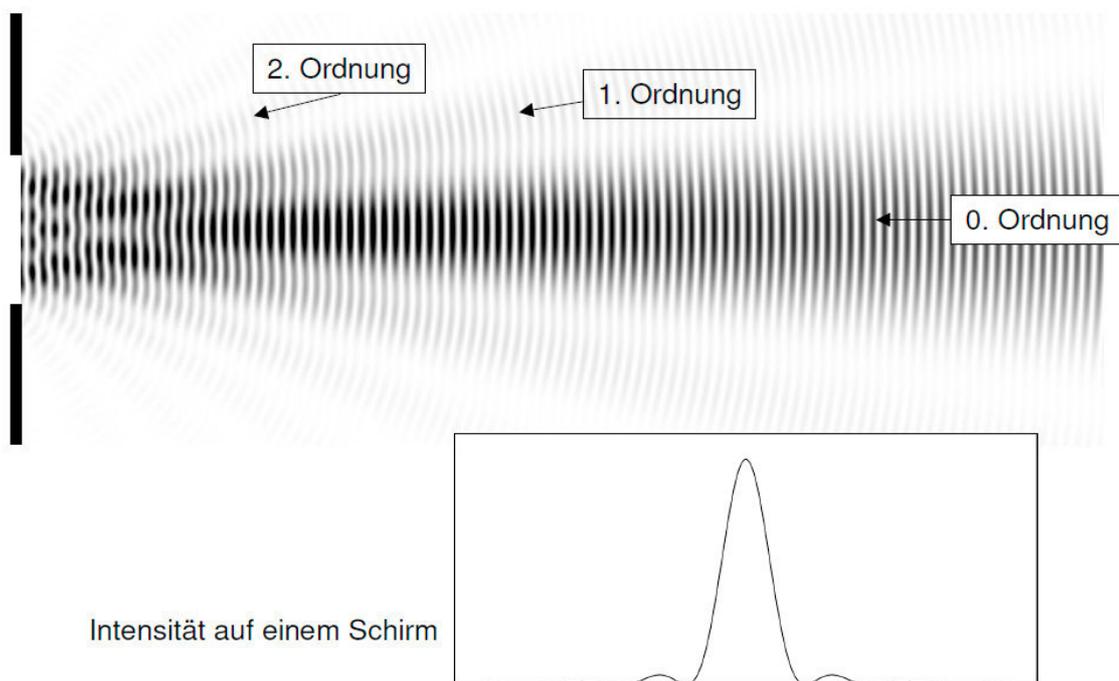


Abb. 2: Beugung am Spalt und Beugungsbild

Die Beugungswinkel werden also um so grösser, je kleiner der Spalt ist oder etwas eleganter ausgedrückt:

$$k_x \cdot d = \text{constant} \quad ; \quad \text{die Grösse von Ortsbild und Beugungsbild sind umgekehrt proportional}$$

→ Versuch 2:

Drehen sie den abgebildeten Spalt langsam zu und beobachten sie gleichzeitig das Ortsbild und das Beugungsbild. Wenn der Spalt zuge dreht wird, wird gleichzeitig das Beugungsbild immer breiter. Messen sie mit dem Lineal für einige Spaltstellungen jeweils die Breite des Spalts und die ‚Breite‘ des Beugungsbildes z.B. den Abstand der beiden Beugungsmaxima 2. Ordnung. Prüfen sie nach, ob tatsächlich das Produkt der beiden Breiten konstant ist.

Sie haben soeben eine ganz grundlegende Erkenntnis der Wellenoptik verifiziert: das Produkt aus der ‚Breite‘ des Ortsbildes in einer Richtung z.B. in x-Richtung Δx und die ‚Breite‘ Δk_x der Verteilung von k_x ist konstant. Wenn die ‚Breite‘ der Verteilungen mathematisch sauber definiert wird (siehe Kasten ‚Fouriertransformation‘), dann gilt

$$\Delta x * \Delta k_x = 2\pi \quad ; \text{ dies ist die ‚klassische Unschärferelation‘}$$

Die ist eine zwingende Folge davon, dass Licht Wellencharakter hat.

Die Korrespondenz von Ortsbild und Beugungsbild

Die Wellenoptik sagt voraus, dass das Ortsbild und das Beugungsbild dieselbe Information enthalten (mathematisch sind Ortsbild und Beugungsbild ‚Fouriertransformierte‘). Wenn sie also das Beugungsbild messen können sie daraus das Ortsbild berechnen – das ist die Grundlage der wichtigsten Methoden zur Strukturbestimmung nicht nur in der Optik sondern auch im Röntgenbereich oder der Streuung von Elektronen an Atomkernen (→ siehe Kasten Strukturbestimmung).

Im Versuch gehen wir einen etwas anderen Weg. Wenn wir das Beugungsbild verändern, dann muss sich das Ortsbild ebenfalls verändern. In unserem Experiment ist nach dem beleuchteten Objekt noch vor dem Strahlteiler als erstes ein Fokus eingebaut. Wenn wir in diese Brennebene ein Papier halten sehen wir ein (sehr kleines) Beugungsbild des Objekts z.B. unseres Spalts. Wir können jetzt in dieser Fokalebene durch eine zweiten Spalt oder durch kleine Bleche Teile des Beugungsbildes entfernen und beobachten, welchen Effekt das auf das Ortsbild hat.

→ Versuch 3: Grenze der Auflösung

Wir wählen als Objekt zuerst ein Gitter mit 50 Linien pro mm, also einer Gitterkonstanten von 20 μm . Das Beugungsbild des Gitters, bei dem die Breite der Spalte b wesentlich kleiner ist als der Abstand der Spalte g , ist besonders einfach. Wir finden Interferenzmaxima immer dann, wenn der Gangunterschied zweier benachbarter Spalte ein Vielfaches der Wellenlänge ist.

$$\text{Maximum } n\text{-ter Ordnung bei: } g \sin\alpha = n \lambda \quad \text{oder } g k_x = n 2\pi$$

Drehen sie jetzt den Spalt im Zwischenfokus langsam zu und beobachten sie, wie die höheren Beugungsordnungen nach und nach verschwinden. Beobachten sie gleichzeitig das Ortsbild. Solange die Beugungsordnungen erster Ordnung noch vorhanden sind sieht man das Streifenmuster des Gitters, auch wenn die Gitterkonturen ‚unscharf‘ werden. Schneiden sie jetzt die Beugungsmaxima erster Ordnung weg – dazu das Gitter zentrieren. Schlagartig verschwindet das Streifenmuster und es entsteht eine gleichmäßig beleuchtete Fläche. Das muss so sein: das Beugungsbild einer homogen beleuchteten Fläche ist ein einziges

Maximum in Vorwärtsrichtung. Denselben Effekt, allerdings etwas frappierender, können sie mit dem Kreuzgitter beobachten

→ **Versuch 4** Kreuzgitter

Das Beugungsbild besteht jetzt aus horizontalen und vertikalen Reihen von Beugungsmaxima. Wenn sie jetzt den Spalt in der Fokalebene zudrehen bis auch die erste horizontal gelegene Beugungsordnung verschwindet, dann sehen sie im Ortsbild plötzlich ein horizontales Gitter statt des Kreuzgitters.

Eine wichtige Folgerung daraus ist, dass mit der optischen Abbildung zwei Gitterlinien nur dann getrennt gesehen werden können, **wenn bei der Abbildung wenigstens noch die erste Beugungsordnung von den abbildenden Linsen erfasst wird.**

Damit ergibt sich als maximale Auflösung eines abbildenden Systems in einer Richtung:

$$a \geq \lambda / \sin \alpha \quad , \text{ wo } a \text{ der kleinstmögliche Abstand in einer Dimension ist, der noch gesehen werden kann}$$

Diese Beziehung wurde von Abbe in seiner Theorie des Auflösungsvermögens 1873 erstmals gefunden.

Auflösung am Doppelspalt: → **Versuch 5**

Wir haben schon gesehen, dass die Interferenz am Doppelspalt sehr wichtig für die Entwicklung der Wellentheorie des Lichts war. Um das Auflösungsvermögen eines optischen Systems zu beurteilen erscheint es auch realistischer, das am Doppelspalt zu beurteilen, bei dem die Frage einfach heißt: wann kann ich sehen, dass ich zwei getrennte Objekte (2 Spalte) habe und nicht nur einen.

Das Beugungsbild des Doppelspalts ist etwas komplizierter als das des Gitters. Es ist in Abb. 4 gezeigt

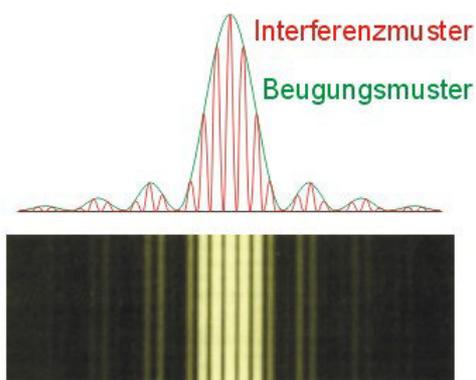


Abb.4 Beugungsbild (rot) eines Doppelspalts mit einem Spaltabstand $g \gg b$, der Spaltbreite. Die Grüne Kurve zeigt das Beugungsbild des Einzelspalts.

Unteres Bild: Helligkeitsverteilung schematisch.

Das Beugungsbild des Doppelspalts ist das Produkt aus der Intensität am Einzelspalt und der eines Doppelspalts mit Spaltbreite Null im Abstand g . Der Doppelspalt ‚moduliert‘ also das Beugungsbild des Einzelspalts.

Diese Modulation ist von Auge auf dem Schirm schwer zu sehen, man sieht im Wesentlichen die Minima und Maxima des Einzelspalts. Daher schauen sie sich als erstes das Beugungsbild mit der CCD –Kamera an. Drehen sie jetzt den Spalt in der Fokalebene langsam zu und beobachten sie das Ortsbild auf dem Schirm.

Wenn das Beugungsbild so weit beschnitten ist, dass nur noch die nullte Beugungsordnung des Einzelspalts zu sehen ist, dann zeigt das Ortsbild immer noch zwei klar getrennte helle

Streifen, die allerdings keine scharfen Kanten mehr haben. Erst wenn auch die ersten Beugungsordnungen des Doppelspalts weggeschnitten werden verschmelzen die beiden Ortsbilder zu einem hellen Fleck – die Grenze der Auflösung ist erreicht. Natürlich folgt daraus wieder dieselbe Bedingung für die maximale Auflösung, wie für das Gitter.

Versuch 5: 2-d Objekte

Bisher haben wir und nur 1-dimensionale Strukturen angeschaut. Schauen sie sich deswegen jetzt mit der CCD-Kamera auch das Beugungsbild einer Lochblende an. Sie sehen ein kreisförmiges Maximum unter Null Grad und konzentrische Beugungsmaxima drum herum. Dieses Bild ist wichtig, denn fast alle optischen Abbildungssysteme nutzen kreisförmige Linsen oder Spiegel. Dann legt der Radius R des Abbildungssystems die Grenze der Auflösung durch die Beugung an dieser Kreisfläche fest. So zeigen z.B. astronomische Teleskope als Bilder von (praktisch) punktförmigen weit entfernten Sternen immer Beugungsscheiben, wie sie mit der CCD-Kamera für die Lochblende zu sehen sind. Zwei Sterne können nur dann voneinander getrennt werden, wenn die Beugungsringe erster Ordnung getrennt abgebildet werden. Deren Größe ist aber umgekehrt proportional zum Durchmesser des Hauptspiegels. Also brauchen Teleskope hoher Auflösung große Spiegel. (siehe → Kasten astronomische Teleskope)

Versuch 6

Methoden der Bilderkennung durch Bearbeitung des Beugungsbildes

Zum Schluss sollen noch einige wichtige praktische Anwendungen für die Bilderkennung und Analyse experimentell gezeigt und diskutiert werden.

Ausgangspunkt ist das Faktum, dass das Beugungsbild (mathematisch gesprochen das Fourierbild) die vollständigen Informationen über das Ortsbild hat. Die Frage ist nur, welche Informationen über das Ortsbild stecken wo im Beugungsbild.

Als einfachstes Objekt nehmen wir zuerst wieder den variablen Spalt und beobachten das Orts- und Beugungsbild dieses Spalts gleichzeitig mit den CCD-Kameras.

Drehen sie den Spalt in der Fokalebene langsam zu und beobachten sie das Ortsbild mit der Kamera. Je stärker die hohen Beugungsordnungen abgeschnitten werden, desto unscharfer werden die Kanten des Spalts. Wenn nur noch die erste Ordnung abgebildet wird, dann zeigt das Ortsbild maximale Helligkeit in der Mitte, die nach außen stetig auf Null abfällt. Daraus schließen wir, dass die kleinen Ordnungen die Information für die Flächenhelligkeit tragen während die hohen Ordnungen für die Kantenerkennung zuständig sind. Das kann leicht überprüft werden. Setzen sie statt des Spalts jetzt das Diapositiv mit den Stegen in die Fokalebene und zentrieren einen Steg so, dass er die niedrigen Ordnungen im Beugungsbild symmetrisch ausblendet. Sie beobachten im Ortsbild, dass jetzt nur die Kanten hell sind.

Genau so können sie im 2D-Beugungsbild der Lochblende mit einer der schwarzen Scheiben auf dem Dia ‚Kreise‘ im Beugungsbild die niedrigen Beugungsordnungen ausblenden und sich den Effekt im Ortsbild anschauen.

In der Bildbearbeitung heißt das: Um die Flächenhelligkeit zu betonen benutzt man einen Tiefpass. Dieser schneidet die hohen Beugungsordnungen weg. Sollen dagegen die Kanten betont werden, dann benutzt man einen Hochpass – dieser schneidet die niedrigen Ordnungen,

insbesondere die nullte Ordnung weg.

Welche Eigenschaften des Bildes werden jetzt betont ?

So arbeiten Programme wie z.B. Photoshop. Dies können sie auf dem Experimentrechner ausprobieren (Kurzanleitung unten). Sie können das aber auch mit Hilfe von applets ausprobieren z.B. unter

<http://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/AP/info/Fourieroptik/fourieroptik2.php>

Versuch 7: Manipulation von Photos durch Änderung des Beugungsbildes (des ‚Fourierbildes‘).

Hierzu ist auf dem Experimentrechner das Bildbearbeitungsprogramm Photoshop installiert zusammen mit einem zusätzlichen Plugin, das Fouriertransformationen und inverse Transformationen erlaubt. Dazwischen kann das Fourier-(Beugung-) bild beliebig verändert werden.

Kurzanleitung:

Starten sie auf dem desktop das Programm ‚Adobe Photoshop‘. Durch Klick auf [Datei](#)→[öffnen](#) können sie ein Bild einlesen z.B. aus dem Ordner ‚Testphotos‘ auf dem Desktop.

1. Sie müssen das Photo erst in den ‚RGB‘ Farbmodus transferieren:

[Bild](#)→[Modus](#)→[RGB](#)

2. Erstellen sie als nächstes das Beugungsbild:

[Filter](#)→[Fouriertransform](#)→[FFT](#)

3. Mit dem Pinsel können sie nun Teile des Beugungsbildes schwärzen. Hierzu die



Pinselgröße passend wählen.

Hinweis: Striche im Ortsbild unter einem Winkel α ergeben im Beugungsbild helle Beugungsmuster senkrecht dazu, also unter dem Winkel $\alpha+90^\circ$. Eine Schwärzung der Bildmitte (niedrige Beugungsordnungen) bewirkt eine Kantenerkennung, die Bildhelligkeit nimmt stark ab.

4. Die Auswirkungen ihrer Manipulationen auf das Photo sehen sie, wenn sie jetzt die inverse Fouriertransformation aktivieren:

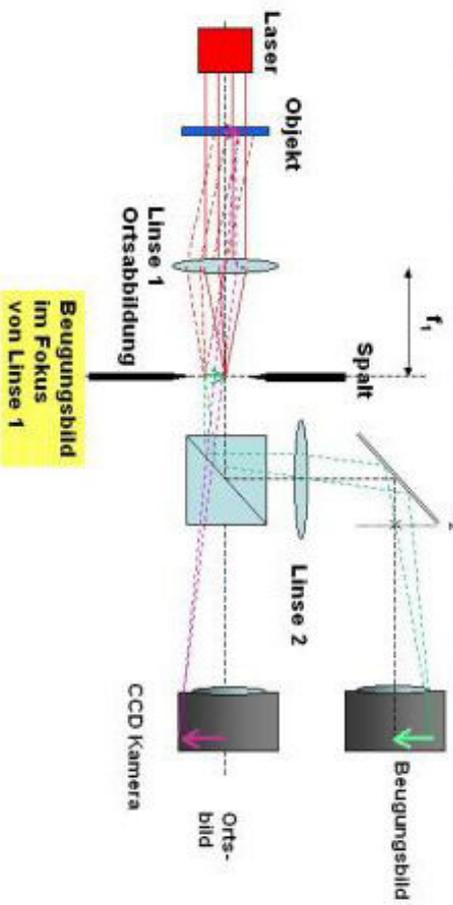
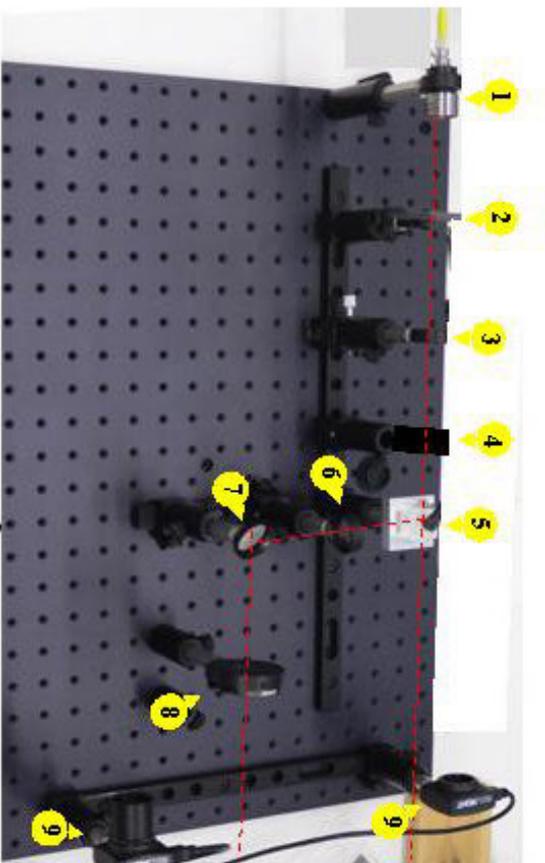
[Filter](#) → [Fourier Transform](#) → [IFFT](#)

Viel Spaß beim Rumprobieren...

Anhang:

Aufbau und Strahlengang

1. Laserstrahlaufweitung
2. Beugungsobjekt
3. Linse 1
4. Spalt in Fourierebene
5. Strahlteiler
6. Linse 2
7. Spiegel
8. Polarisator zur Helligkeitsregelung
9. CCD Kameras (nicht im Strahlengang)



Aufbau beim Schülerversuch zur optischen Abbildung

Der rote Laser liefert mit Hilfe einer Aufweitungsoptik paralleles Licht mit einem runden Querschnitt von etwa 9 mm und beleuchtet das Beugungsobjekt (Spalt, Doppelspalt, Gitter, etc).

Die Linse L1 hat 2 Funktionen:

1. sie erzeugt das Ortsbild in der CCD Kamera. Dazu muss eine Struktur des Beugungsobjekts- in der Animation dargestellt als magentafarbener Pfeil- auf die Detektorebene der Kamera scharf abgebildet werden. Dies erreicht man dadurch, dass die Gegenstandsweite (Abstand Objekt zu Linse 1) durch Verschieben des Objekts richtig gewählt wird (1. Mausklick in der Animation)
2. die Linse erzeugt in ihrem Fokus ein (kleines) Beugungsbild des Objekts. Dies ist in der Animation dargestellt (Mausklick 2) durch die roten Lichtstrahlen. Parallele vom Objekt ausgehende Strahlen werden alle auf einen Punkt in der Brennebene fokussiert. Dieses Beugungsbild ist in der Animation durch den grünen Pfeil symbolisiert.

Durch einen Spalt oder durch einen Draht etc. der in die Fokalebene von Linse 1 gestellt wird, lassen sich daher Teile des Beugungsbildes ausblenden.

Die Linse L2 hinter dem Strahlteiler dient dazu, das Beugungsbild auf die Detektorebene der Kamera 2 abzubilden (Mausklick 3). Hierzu wird Linse 2 so verschoben, dass ein scharfes Abbild in Kamera 2 erscheint.

Hinweis: den Strahlengang gibt es auch als Powerpoint-Animation

<http://www.physi.uni-heidelberg.de/~eisele/schuelerlabor/>