

Quantenstatistik

3 verschieden Statistiken (Verteilungen)

	Bose	Boltzmann	Fermi
Teilchen	ununterscheidbar	unterscheidbar	ununterscheidbar
Spin	ganzzahlig (0, 1, 2, ...)	-	halbzahlig ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$)
Eigenfunktionen	symmetrisch	-	antisymmetrisch
qualitatives Verhalten	besetzen bevorzugt gleiche Zustände	-	Pauli-Prinzip: besetzen nie gleiche Zustände
P(E)	$\frac{1}{e^{(\alpha + E/kT)} - 1}$	$\frac{1}{e^{(\alpha + E/kT)}}$	$\frac{1}{e^{(\alpha + E/kT)} + 1}$
übliche Schreibweise	$\frac{1}{e^{(\alpha + E/kT)} - 1}$	$Ae^{-\frac{E}{kT}}$	$\frac{1}{e^{(E - E_F)/kT} + 1}$
Beispiele	Photonengas (Plancksches Gesetz) Phononengas flüssiges Helium Bose-Einstein-Kondensat	klassische Gase bei jeder Temperatur	Entartetes Elektronengas in Festkörper-, Atom-, Kern- und Astrophysik

Three different statistics

$$P(E) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T}} = A e^{-\frac{E}{k_B T}} & \begin{array}{l} \text{classical particles} \\ \text{Maxwell-Boltzmann} \\ \text{statistics} \end{array} \\ \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} - 1} \quad \mu < 0 & \begin{array}{l} \text{Bosons} \\ \text{Bose-Einstein} \\ \text{statistics} \end{array} \\ \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T} + 1} \quad \mu = E_F & \begin{array}{l} \text{Fermions} \\ \text{Fermi-Dirac} \\ \text{statistics} \end{array} \end{array} \right.$$

Quanten Statistik

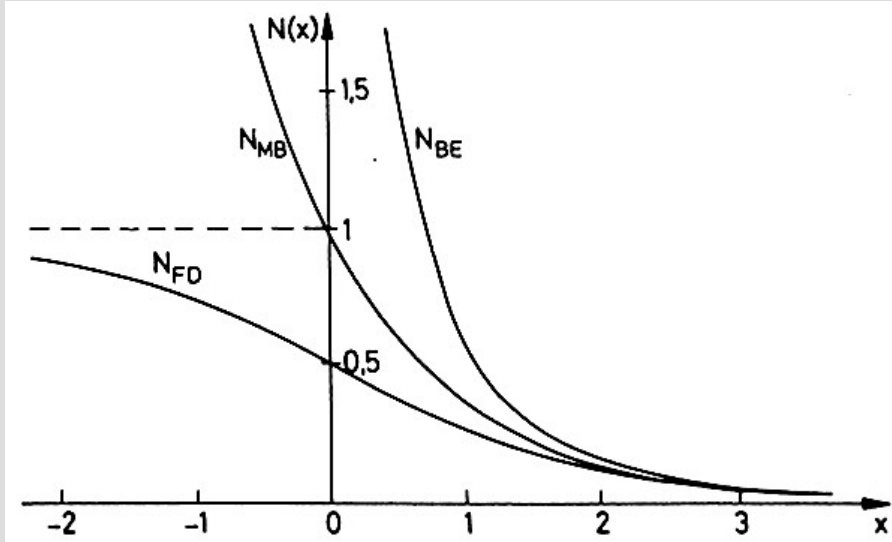
Vergleich der Verteilungen für Bosonen, Fermionen

$$\sigma = e^{\frac{\mu}{kT}}, \quad x := \frac{\epsilon - \mu}{kT},$$

$$N_{iBE} = \frac{1}{\sigma^{-1} e^{\epsilon_i/kT} - 1} \rightarrow N_{BE}(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$

$$N_{iMB} = \frac{1}{\sigma^{-1} e^{\epsilon_i/kT}} \rightarrow N_{MB}(x) = \frac{1}{e^x}$$

$$N_{iFD} = \frac{1}{\sigma^{-1} e^{\epsilon_i/kT} + 1} \rightarrow N_{FD}(x) = \frac{1}{e^x + 1}$$

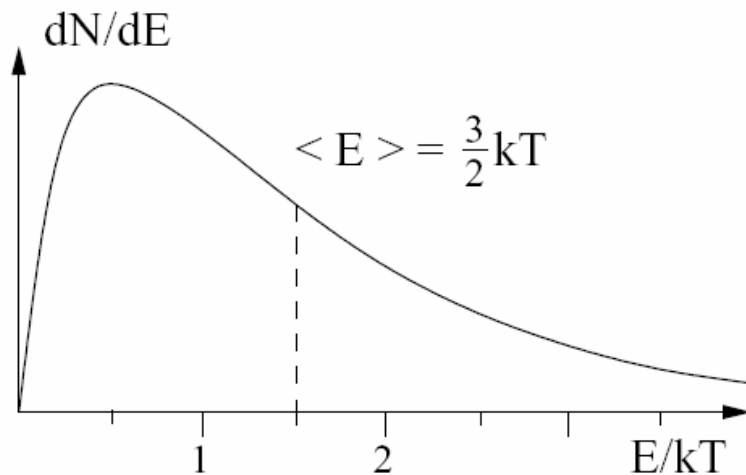


Maxwell-Boltzmann Verteilung

unterscheidbare Teilchen

Totale Teilchenzahl N_0 fest; Normierung aus

$$\frac{dN}{dE} = N_0 \frac{g(E) e^{-E/kT}}{\int_0^\infty g(E) e^{-E/kT} dE}$$

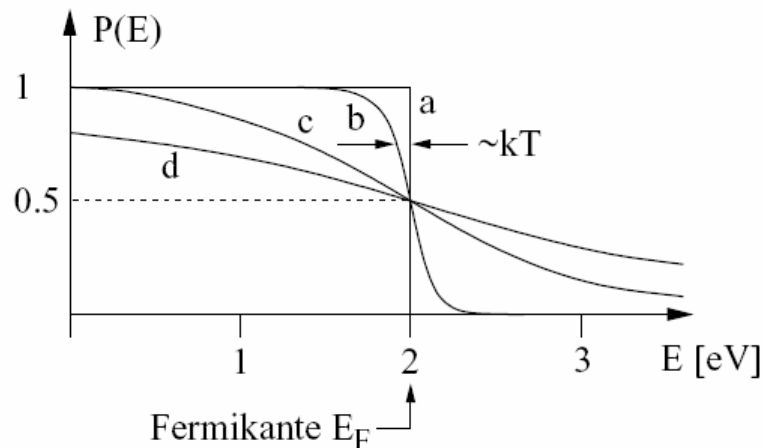


$$\frac{dN(E)}{dE} = \frac{2N_0}{(\pi kT)^{3/2}} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}}$$

Beachte: die Masse m kommt explizit nicht vor; das ermöglicht gerade das Konzept der mittleren kinetischen Energie als Temperaturdefinition (s. exzellente Diskussion dazu im Feynman). Das Planck'sche Wirkungsquantum h kommt (natürlich) auch nicht vor.

Fermi-Verteilung I

Annahme: E_F fest (s.u.); numerisches Beispiel für $E_F = 2$ eV, $T_F = E_F/k = 23\,000$ K



	T (K)	kT (eV)
a	0	0
b	1000	0.085
c	5000	0.43
d	20000	1.7

Diskussion der Kurven:

- a $T = 0$: alle Phasenraumzellen der Zustände E_i bis zur Grenze E_F mit je **1** Fermion besetzt, also *voll*; $P(E) = 1$. Für $E_i > E_F$ alle Zellen leer, d.h. $P(E) = 0$.
- b, c $T > 0$, aber $kT \ll E_F$: Abrundung, Verschmierung der Fermikante
- d $T \gg 0$, $kT \approx E_F$: selbst für die niedrigsten Zustände E_i gibt es unbesetzte Zellen
 \Rightarrow irgendwann Grenzfall Boltzmann

Allgemeine Regel: Im Bereich $E \gg E_F$ Boltzmann-„Schwanz“: dort $e^{-E/kT}$ immer ausreichend!

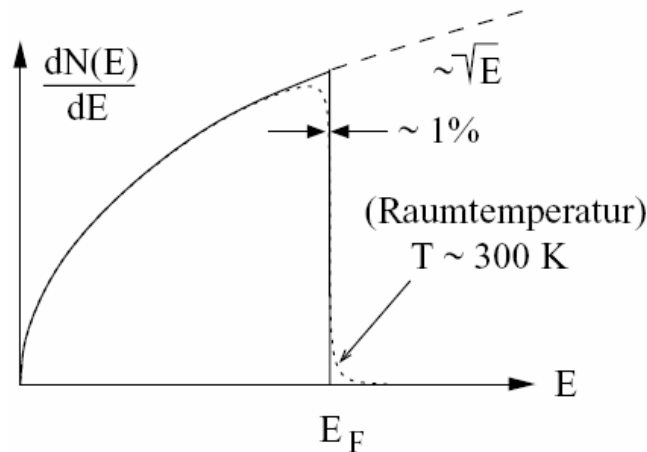
Fermi-Verteilung II

Leitungselektronen

$$\frac{dN}{dE} = \frac{V}{h^3} 8\pi\sqrt{2m^3}\sqrt{E} \frac{1}{e^{(E - E_F)/kT} + 1}$$

Totale Teilchenzahl N_0 fest: E_F aus $N_0 = \int_0^\infty \frac{dN}{dE} dE \Big|_{T=0}$

$$E_F = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N_0}{\pi V} \right)^{2/3}$$



Typische Zahlen: $E_F = 2 \dots 7$ eV $\gg kT!$

„Entartungstemperatur“:

$$T_F = E_F/k = 23\,000 - 82\,000 \text{ K!}$$

\Rightarrow Fermi-Verteilung extrem scharfkantig bei Raumtemperatur

Quanten Statistik

Bosonen

Bose Einstein Verteilung

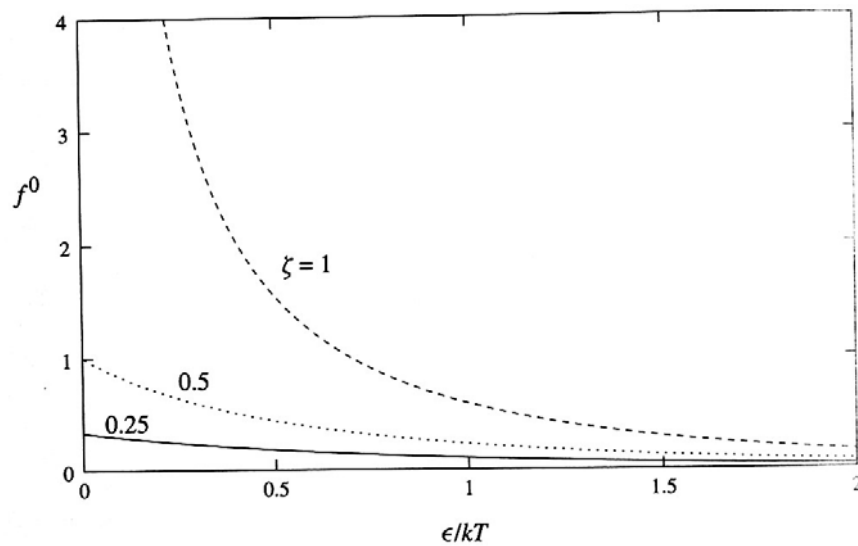


Fig. 2.1. The Bose distribution function f^0 as a function of energy for different values of the fugacity ζ . The value $\zeta = 1$ corresponds to temperatures below the transition temperature, while $\zeta = 0.5$ and $\zeta = 0.25$ correspond to $\mu = -0.69kT$ and $\mu = -1.39kT$, respectively.

Anzahl der Teilchen im Kondensat

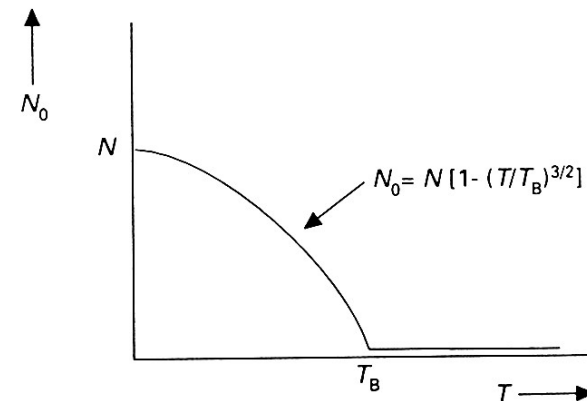


Abb. 8.1: Die Abhängigkeit von N_0 , der Anzahl der Bosonen im Grundzustand eines idealen Bose-Einstein-Gases, als Funktion der Temperatur.

Bose Verteilung II

Planck'sches Strahlungsgesetz

Behandlung relativistisch (s. 3.2) $\Rightarrow E = h\nu$

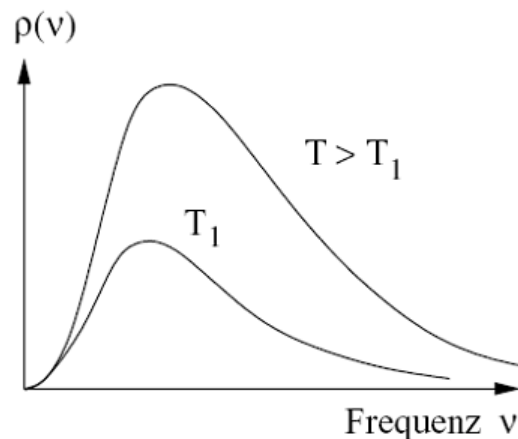
2 Polarisationszustände des Photons $\Rightarrow g_s = 2$

Mit $g(E)dE = g(h\nu)d(h\nu)$ $g(\nu)d\nu = V \frac{8\pi}{h^3} \frac{(h\nu)^2}{c^3} d(h\nu) = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu$

Totale Photonenzahl nicht fest, sondern massiv temperaturabhängig
 $\Rightarrow \alpha = 0, e^\alpha = 1$ (α nicht durch N_0 fixierbar)

Anzahldichte der Photonen $\frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$

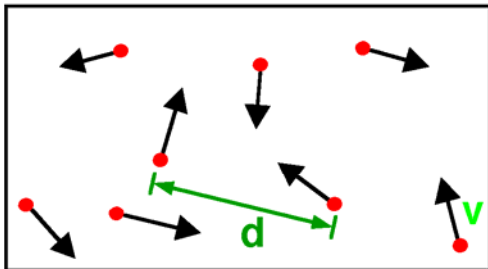
Energiedichte des Photonen,,gases“ $\rho(\nu) = \frac{1}{V} \frac{dN}{d\nu} h\nu$



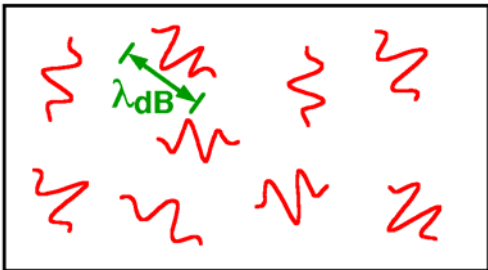
$$\Rightarrow \rho(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \quad \text{Planck}$$

BEC

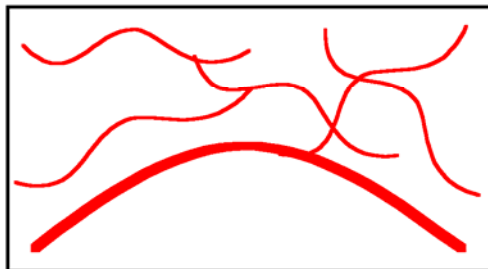
basic introduction



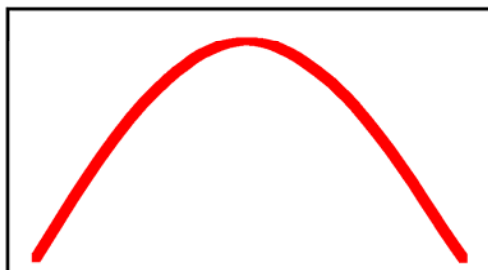
High Temperature T:
thermal velocity v
density d^{-3}
"Billiard balls"



Low Temperature T:
De Broglie wavelength
 $\lambda_{dB} = h/mv \propto T^{-1/2}$
"Wave packets"



$T = T_{crit}$:
Bose-Einstein Condensation
 $\lambda_{dB} \approx d$
"Matter wave overlap"



$T = 0$:
Pure Bose condensate
"Giant matter wave"

What is BEC? What is its underlying Physics? What the fundamental concept?

Colloquial: *'all particles are in the same state'*

- Broken Gauge Symmetry,
- Off-diagonal long range order (ODLRO)
- Long range phase coherence
- Macroscopic wave function of the condensate

These concepts were first introduced in studying superconductivity and superfluidity

What is the signature?

- Delta function of the occupation number of particles with zero momentum associated with long range phase coherence
- Bose narrowing (decrease in average energy as density gets higher). For fermions it is the opposite.
- Process of stimulated scattering: The scattering rate contains a factor $(1+N_f)$ where N_f is the occupation number of the final state

BEC

basic introduction

BEC is a common phenomenon occurring in physics on all scales

- Condensed matter
- atomic physics
- nuclear and elementary particle physics
- astrophysics

Bosonic degrees of freedom are composite, they originate from Fermionic degrees of freedom (in most cases).

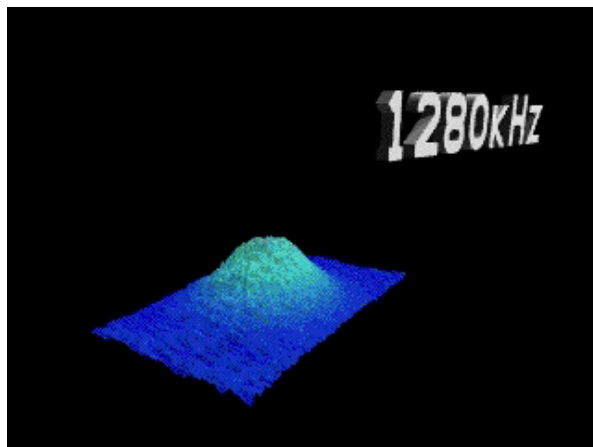
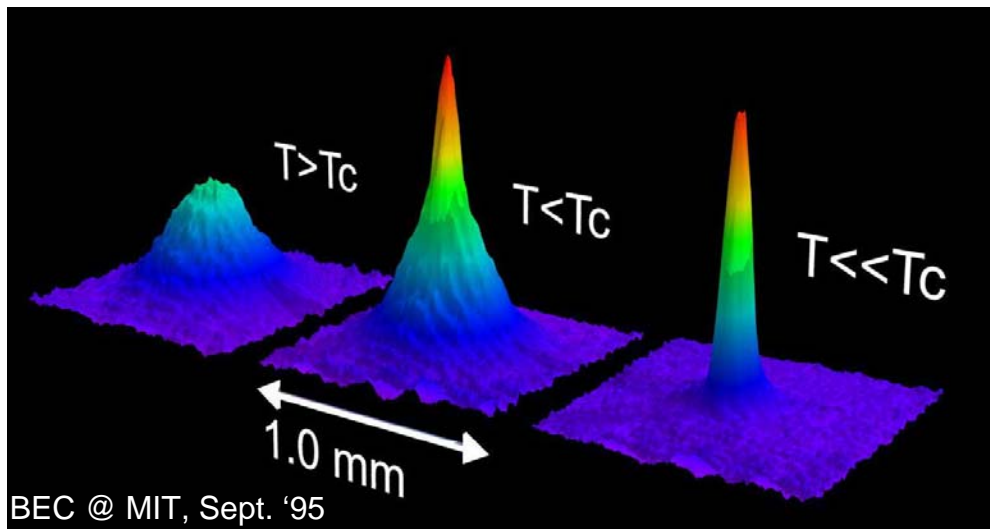
- Fundamental Bosons:
gauge Bosons : Photon, W,Z
- Fundamental Fermions:
p,n,e

Table 1. *Bosons under study*

Particle	Composed of	In	Coherence seen in
Cooper pair	e^-, e^-	metals	superconductivity
Cooper pair	h^+, h^+	copper oxides	high- T_c superconductivity
exciton	e^-, h^+	semiconductors	luminescence and drag-free transport in Cu_2O
biexciton	$2(e^-, h^+)$	semiconductors	luminescence and optical phase coherence in $CuCl$
positronium	e^-, e^+	crystal vacancies	(proposed)
hydrogen	e^-, p^+	magnetic traps	(in progress)
4He	$^4He^{2+}, 2e^-$	He-II	superfluidity
3He pairs	$2(^3He^{2+}, 2e^-)$	3He -A,B phases	superfluidity
cesium	$^{133}Cs^{55+}, 55e^-$	laser traps	(in progress)
interacting bosons	nn or pp	nuclei	excitations
nucleonic pairing	nn or pp	nuclei neutron stars	moments of inertia superfluidity and pulsar glitches
chiral condensates	$\langle \bar{q}q \rangle$	vacuum	elementary particle structure
meson condensates	pion condensate $= \langle \bar{u}d \rangle$, etc. kaon condensate $= \langle \bar{u}s \rangle$	neutron star matter	neutron stars, supernovae (proposed)
Higgs boson	$\langle \bar{t}t \rangle$ condensate (proposed)	vacuum	elementary particle masses

Observing BEC phase transition, expansion

phase transition



Expansion

man "sieht" den Grundzustand und in der Expansion erkennt man die Unschärferelation
 Kurze Zeiten: sieht δx
 Lange Zeiten: sieht δp
 kleines $\delta x \rightarrow$ großes δp (schnelle Expansion)
 großes $\delta x \rightarrow$ kleines δp (langsame Expansion)

