1.4 Biergläser und Bierfässer (25 Punkte)

a) (10 Punkte) Wie groß ist der Fehler der Bestimmung des Volumens eines zylindrischen Bierglases aus jeweils fehlerbehafteten Messungen von Durchmesser und Höhe des Glases?

b) (*) (15 Punkte) Der ehrliche Wirt schenkt das Bier aus einem 50 Liter Fass in identischen Halblitergläsern mit Durchmessern von 10 cm aus. Dabei gelingt es ihm leider nur, die Füllhöhe mit einer Genauigkeit von 5% (Sigma einer Normalverteilung), jedoch mit dem korrekten Mittelwert hinzubekommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Fass bereits nach 95 bzw. 90 Gläsern leer ist? Mit welcher Wahrscheinlichkeit zapft der gute Mann hingegen 105 oder gar 110 Gläser aus einem 50 Liter Fass?

Lösung:

---

a) Annahme, dass systematische Fehler ausgeschlossen werden können, Gaußsche Fehlerfortpflanzung. Mit Durchmesser D, Höhe h und den Unsicherheiten der Einzelmessungen (Standardabweichung) ΔD, Δh:

$$\Delta V = \sqrt{(\frac{\partial V}{\partial D}\Delta D)^2 + (\frac{\partial V}{\partial h}\Delta h)^2} = \sqrt{(\frac{\pi}{4} \cdot 2Dh \cdot \Delta D)^2 + (\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot \Delta h)^2}$$

Ein typischer Maßkrug (Eichstrich bei 1 l) hat einen Innendurchmesser von 8,5 cm und eine Innenhöhe von 19 cm. Unter der Annahme, dass die Innenwand keine Unebenheiten aufweist und die Unsicherheit beim Ablesen 0.5 mm beträgt, ergibt dies einen Fehler von

$$\Delta V = 13 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{l}$$

b) Ansatz: Jeder Zapfvorgang ist eine Einzelmessung mit einem Fehler von $\Delta V = 5\,\% \hat{=} 0.025\,\mathrm{l}$. Drei Vorschläge zur Lösung:

- Berechne das gezapfte Volumen nach 100 Gläsern und dessen Verteilung:

$$\begin{aligned} V_{\text{ges}} &= \sum_{i=1}^{100} V_{\text{Glas}} = 50\,\mathrm{l} \\ \Delta V_{\text{ges}} &= \sqrt{\sum_{i=1}^{100}(\frac{\partial V_{\text{ges}}}{\partial V_{\text{Glas,i}}}\Delta V)^2} = \sqrt{100 \cdot (\Delta V)^2} = 10 \cdot \Delta V = 0.25\,\mathrm{l} \end{aligned}$$

  Wenn man beide Seiten durch die Anzahl Gläser teilt, erhält man den Fehler des Mittelwerts, der mit $\frac{1}{\sqrt{N}}$ kleiner wird.

  Um nach 90 Gläsern leer gezapft zu haben, muss ein Glas im Mittel $50\,\mathrm{l}/90 = 0.\bar{5}\,\mathrm{l}$ enthalten. Nach 100 Gläsern hätte der Wirt also 55.6 l gezapft. Das entspricht einer Abweichung von $\frac{5.6\,\mathrm{l}}{0.25\,\mathrm{l}} = 22.4\sigma$. Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens diese Menge (pro Glas) gezapft wurde, entspricht der Fläche unter der Normalverteilung von 22.4σ bis $+\infty$: $p_{90} \cong 2 \cdot 10^{-111} \approx 0$.

  Ebenso: 95 Gläser, 10.5σ, $p_{95} \cong 4.3 \cdot 10^{-24} \approx 0$.

  Symmetrisch: $p_{105} \cong 4.3 \cdot 10^{-24}$, $p_{110} \cong 2 \cdot 10^{-111}$.

  Die Wahrscheinlichkeit, nur ein halbes Glas (0.25 l) abzuweichen liegt bei 1σ, beträgt also 16 %. Hier wird deutlich, wie wichtig die Höhe des Eichstrichs an den Gläsern ist...

  Natürlich ändert sich der Fehler der Gesamtmessung für 90, 95, 105 und 110 Gläser mit der Wurzel der Anzahl der Einzelmessungen/Gläser. Dies wurde hier vernachlässigt.

- Alternativ, aber ebenso ungenau, über die Anzahl Gläser:

$$N = \frac{V_{\text{Fass}}}{V_{\text{Glas,mittel}}} = 100$$

  mit dem Volumen des Fasses V_{Fass} und dem mittleren gezapften Volumen $V_{\text{Glas,mittel}}$. Der Knackpunkt ist hier nun, dass $V_{\text{Glas,mittel}}$ nach N Zapfungen einen anderen Fehler hat, als das Volumen einer einzelnen Zapfung (Fehler des Mittelwerts vs. Fehler der Einzelmessung). Hier muss der Fehler des Mittelwerts verwendet werden: $\Delta V_{\text{Glas,mittel}} = \frac{\Delta V_{\text{Glas}}}{\sqrt{N}} = 0.0025\,\mathrm{l}$. Also:

$$\Delta N = \sqrt{(\frac{\partial N}{\partial V_{\text{Glas,mittel}}}\Delta V_{\text{Glas,mittel}})^2} = \frac{V_{\text{Fass}}}{V^2_{\text{Glas,mittel}}} \cdot 0.0025\,\mathrm{l} = 0.5$$

  95 und 105 Gläser liegen also 10σ entfernt vom Erwartungswert für N, 90 und 110 Gläaser sogar 20σ. Zahlenergebnisse ähnlich oben.

- Präziser formulierte Variante: Dieser Rechenweg ist der mathematisch korrekte. Allerdings ist der eigentliche Zweck der Aufgabe, die Fehlerfortpflanzung korrekt anzuwenden. Da die obigen Ergebnisse zumindest „ähnlich“ sind, können wir hier beides gelten lassen. Die Abweichungen ergeben sich, da in den ersten beiden Varianten die Abhängigkeit des Fehlers des Mittelwerts von der Anzahl der Zapfungen vernachlässigt wurde.
  - Für unabhängig identisch verteilte (insbes. unabhängig gaußverteilte) Variablen $X_i \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ gilt:
    * Der Erwartungswert (oder auch Mittelwert) der Summe ist gleich der Summe der Erwartungswerte:

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) \quad \text{oder} \quad \mu\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(X_i)$$

      Siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/Erwartungswert#Erwartungswert_der_Summe_von_n_Zufallsvariablen`
    * Die Varianz der Summe ist gleich der Summe der Varianzen:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) \quad \text{oder} \quad \sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2(X_i)$$

      Siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/Varianz_(Stochastik)#Varianz_von_Summen_von_Zufallsvariablen`
      Das ergibt sich in der ersten Lösung quasi auch aus der Fehlerfortpflanzung.

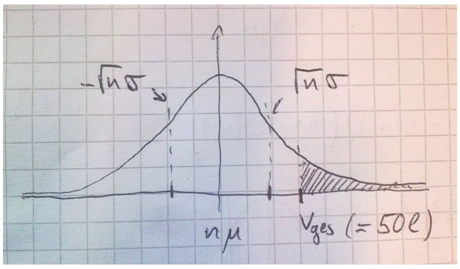
    Das heißt, die Summe über alle X_i ist ebenfalls gaußverteilt, mit Erwartungswert $n\mu$ und Varianz $n\sigma^2$: $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\left(n\mu, n\sigma^2\right)$
  - Damit kann man nun für jede gesuchte Anzahl n an Variablen X_i mit identischen μ und σ^2 die Verteilung der Summe $\sum_{i=1}^{n} X_i$ berechnen:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} e^{-\frac{(x-n\mu)^2}{2n\sigma^2}}$$

  - Ersetzt man nun X_i durch eine Glasfüllung $V_{\mathrm{Glas,i}}$ und $\sum_{i=1}^{n} X_i$ durch das gezapfte Volumen V_{ges}, so entspricht die Wahrscheinlichkeit, bei n Zapfvorgängen mindestens V_{ges} Liter gezapft zu haben, der Fläche unter der Verteilung von V_{ges} bis $+\infty$. (D.h. das Fass ist nach n Zapfvorgängen auf jeden Fall leer.) Also:

$$p(n) = \int_{V_{\mathrm{ges}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma^2}} e^{-\frac{(x-n\mu)^2}{2n\sigma^2}} \, dx$$

    Man erhält also für jedes n eine andere Verteilung mit jeweils unterschiedlichen Mittelwerten und Varianzen/Standardabweichungen. Grafisches Beispiel siehe rechts.



  - Für $n = 90$ und $V_{\mathrm{ges}} = 50\,\mathrm{l}$:

$$p(n=90) = \int_{50\,\mathrm{l}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 90 \cdot (0.025\,\mathrm{l})^2}} e^{-\frac{(x-90\cdot 0.5\,\mathrm{l})^2}{2\cdot 90\cdot(0.025\,\mathrm{l})^2}} \, dx = 5.8 \cdot 10^{-99} \approx 0$$

    und

$$\begin{aligned} p(n=95) &= 5.3 \cdot 10^{-25} \approx 0 \\ p(n=105) &= 8.4 \cdot 10^{-23} \approx 0 \quad \text{Integral von } -\infty \text{ bis } 50\,\mathrm{l} \\ p(n=110) &= 2.3 \cdot 10^{-81} \approx 0 \end{aligned}$$

    Man erkennt auch, dass die Wahrscheinlichkeiten aufgrund der unterschiedlichen n's nicht symmetrisch zu 100 Gläsern sind.