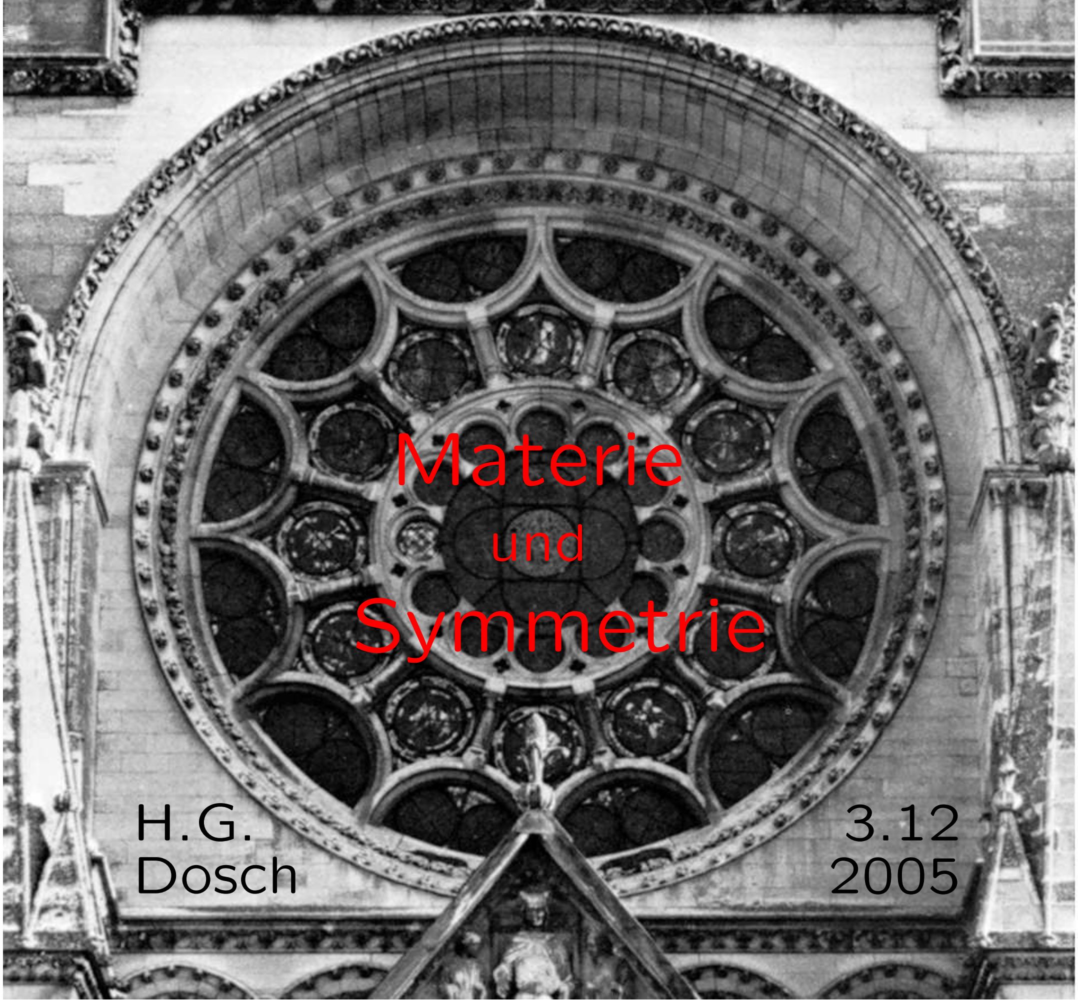

Materie
und
Symmetrie
H.G.
Dosch
3.12
2005

Dynamik
und
Symmetrie

H.G. Dosch

2006

Ouverture

Werden und Vergehen Sein

Heraklit Eleaten

Synthese: Atome und das Leere
Demokrit, 5. Jh. v. Chr.

Ewig Seiendes: **Atome**;

Veränderung:**Lage im Raum** (Leeren)

Seit 17. Jh. Beginn einer Wiss. Theorie:

In Physik entscheidend: Lage in Raum und **Masse**

Erhaltungssätze:

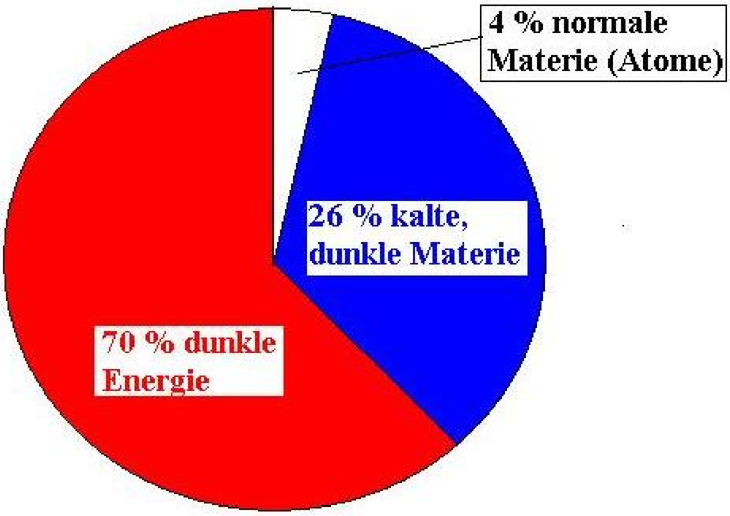
In Chemie: Massenerhaltung (Chemie der Waage) (ca 1800)

Physik: Energieerhaltung (Maier, Joule, Helmholtz. ca 1840)

Einstein 1905: $E = mc^2$.

Nur noch **ein Erhaltungssatz: Energie**

Seit einigen Jahren Standardmodell:



Nur die 4% ,,normale'' Materie in dieser Matine behandelt

Systematische Einteilung der Grundbaustei-
ne:

nach Drehsymmetrie (Spin)

Spin 1/2, Materie im engeren Sinne:

Leptonen : Elektron, Muon, Neutrinos

Hadronen: Quarks, Bausteine von Proton, Neutron,pi-Meson

Spin 1 und 2 Eichbosonen, vermitteln Wechselwirkung:

Elektromagnet Ww.: Photon (S=1)

Schwache Ww. W- und Z-Boson (S=1)

Gravitation: Graviton(?) S=2.

Higgs-Boson(?)vermittelt Masse

Davon stabil nur: Elektron, u-Quark (Proton: uud), Neutrinos, da leicht.

In natürlichen Masseneinheiten gilt:

Alle Elementarteilchen haben die Masse Null (in sehr guter Näherung)

Natürliche Masseneinheiten:

Geschwindigkeit [Länge/Zeit]:

Lichtgeschw. c= 300 000 000 m/s

Wirkung, Drehimpuls [Masse·Länge^2/Zeit]:

Planck'sches Wirkumsquantum

$\hbar = h/(2\pi) = 1.5 \cdot 10^{-34}$ Js.

Masse: Planck-Masse

$m_P = \sqrt{\hbar c/G_N} = 0.021$ mg;

G_N Newtonsche Gravitationskonstante.

Schwerstes Elementarteilchen: (t-Quark Atomgewicht ca 180) $1.5 10^{-17} m_P$

Fermionen ,,masselos'' wegen

Chiraler Symmetrie

Eichbosonen ,,masselos'' wegen

Eichsymmetrie

Higgs-Boson (?) ,,masselos'' (Atomgewicht ca 200) wegen

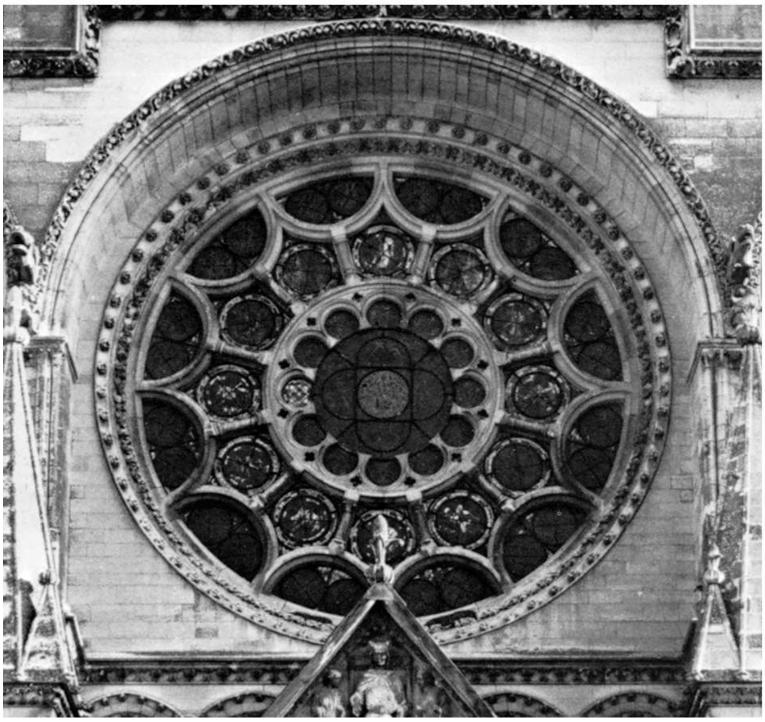
Supersymmetrie (?)

Symmetrien

Allgemeines.

Symmetrietransformation: Bringt System mit sich zur Deckung.

Bsp: Drehsymmetrie. Kontinuierlich oder Diskret.



Symmetrietransformationen bilden Gruppe:

1. Drehung mal Drehung ist wieder Drehung, i.A. nicht kommutativ
2. Drehung kann rückgängig gemacht werden. Drehung mal Drehung^{-1} $= \mathbf{1}$
3. (Drehung mal Drehung) mal Drehung= Drehung mal (Drehung mal Drehung)

Darstellung einer linearen Transformation:

Algebraische Darstellung durch Matrizen.

Bsp: Drehmatrix in Ebene:

$$
\begin{aligned}
x' &= \cos\phi \ \ x + \sin\phi \ \ y \\
y' &= -\sin\phi \ \ x + \cos\phi \ \ y
\end{aligned}
$$

Fundamentale Darstellung: niedrigst dimensionale (nicht-triviale) Matrix.

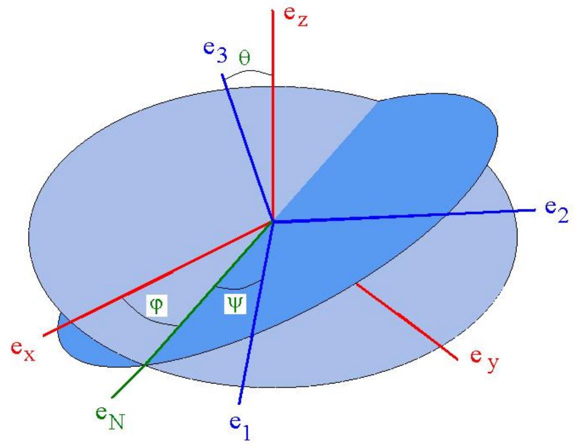
Erzeugende einer Darstellung: Aus ihnen lässt sich jede Transformation erzeugen.

Zahl der Erzeugenden = Zahl der unabhängigen Parameter der Transformation

Bsp: Drehung in der Ebene: Eine Erzeugende, ein Parameter (Winkel ϕ)

Drehungen, Spin und chirale Symmetrie

Bsp: Drehung im Raum



drei Erzeugende, drei Parameter, Euler'sche Winkel

$\phi, \ \psi, \ \theta$

Fundamentale Darstellung ist dreidimensionale Drehmatrix die auf den Koordinatenvektor wirkt

Erzeugende:

L_x, L_y, L_z mit $[L_x, L_y] = iL_z$

SU(2) hat 2-dimensionale fundamentale Darstellung, Erzeugende:

S_x, S_y, S_z mit $[S_x, S_y] = iS_z$

Grosses Wunder:

Die Natur macht von dieser Möglichkeit Gebrauch:

S_x, S_y, S_y, Spin-Matrizen, wirken auf Spinoren.

Spin 1/: 2 („Eigendrehipuls")

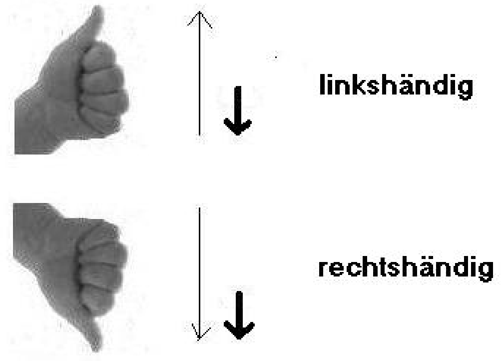
Einstellmöglichkeiten: $+1/2, \ -1/2$.

Wunder geht weiter: Lorentzgruppe

Fundamentale Darstellung: 4-dimensionale Matrizes (Lorentztrafo), wirken auf Raum **und** Zeit-Koordinaten (x, y, z, ct), 6 Erzeugende.

SL(2C), 2-dimensionale Matrizen, Erzeugende haben die gleichen Relationen wie Lorentzgruppe.

2 fundamentale Darstellungen:



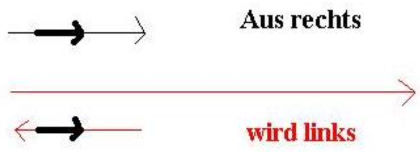
Weil-
Spinoren
(1929)

Unter Raum Zeit Transformationen verhalten sich die links und rechtshändigen Spinoren vollkommen getrennt: **Chirale Symmetrie**.

W. Pauli (1933) „Indessen sind diese Wellengleichungen . . . nicht invariant gegenüber Spiegelungen (Vertauschungen von rechts und links) und infolgedessen sind sie auf die physikalische Wirklichkeit nicht anwendbar."

1957 Paritätsverletzung

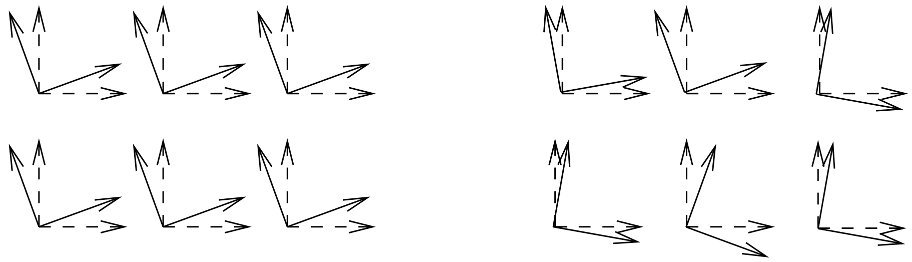
Endliche Masse $\rightarrow v < c$, d.h. kann überholt werden.



Nur masselose Teilchen können definierte Händigkeit haben.

Die verschwindend kleine Masse der Fermionen wird durch die chirale Symmetrie erklärt

Eichsymmetrie



(a) globale Drehung (b) „geeichte'' Drehung

Globale und geeichte (lokale) Transformation, hier eine Drehung. (**a**) Bei einer globalen Drehung ist der Drehwinkel an allen Punkten der gleiche, (**b**) bei einer geeichten Drehung kann er an verschiedenen Punkten verschieden sein.

$$m\ddot{x}_1 = F(x_1 - x_2) \quad m\ddot{x}_2 = -F(x_1 - x_2) \tag{1}$$

Nicht invariant unter $x \to x' = x + a(t)$

Aber

$$m\ddot{x}_1 = F(x_1 - x_2) + mF_G(t) \tag{2}$$

invariant unter der gemeinsamen Eichtrafo:

$$x \to x' = x + a(t), \;\; F_G(t) \to F'_G(t) = F_G(t) + \ddot{a}(t) \tag{3}$$

Vorhersagen:

1. „Schwere“ = Träge Masse

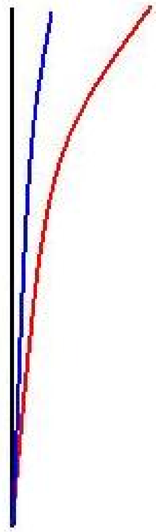
2. Lichtablenkung

$$x \;\longrightarrow\; x' = x + \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = vt \quad , \quad x = 0$$

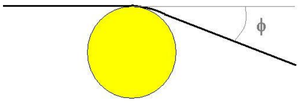
$$y = vt \quad , \quad x = \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = ct \quad , \quad x = \frac{1}{2}gt^2$$



Einschub

Lichtablenkung eines Teilchens am Sonnenrand.



Aus Drehimpulserhaltung und Energieerhaltung folgt für die Ablenkung eines (leichten) gravitierenden Teilchens:

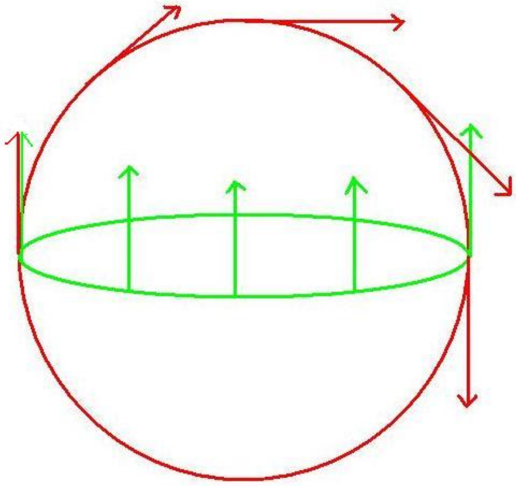
$$\phi = \frac{2M_\odot G_N}{R_\odot v^2} = 0.85'' \quad \text{mit} \quad v \to c$$

praktisch unabhängig von der Masse.

Vermutet von Newton, berechnet von G. v.Soldner 1804, auch Einsteins Wert bis 1915.

1915: Aus ART (Raumkrümmung) folgt, dass Lichtablenkung doppelt so gross.

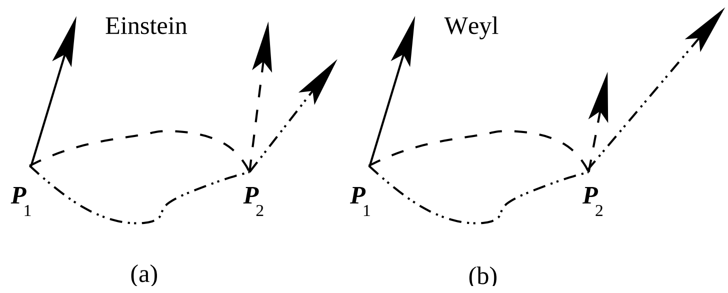
1919: Einsteins ART bestätigt (Eddington et. al).



Paralleltransport über den Nordpol oder den Äquator

Gravitation folgt aus ,,Eichinvarianz'' der Lorentzgruppe.

$\Delta\phi = \pi = F/R^2$



Parallelverschiebung einer gerichteten Größe (**a**) nach der allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins und (**b**) nach Weyl. Einstein geht von der Riemannschen Geometrie aus, hier hängt zwar die Richtungsänderung vom Zwischenweg ab, aber nicht die Länge. Bei der Weylschen „Nahgeometrie“ kann auch noch die Länge des verschobenen Vektors vom Zwischenweg abhängen

Weyl'sche Vermutung (1918):

Eichung der Lorentztrafo $\longrightarrow$ Einsteinsche ART

Eichung der Länge $\longrightarrow$ Elektrodynamik.

Weyl: Gott tut mir leid, wenn er von dieser elganten Möglichkeit, Elektromagnetismus und Gravitation zu vereinheitlichen keinen Gebrauch gemacht hat.

Einstein: Wenn der Liebe Gott dies gemacht hätte, wäre Weyl II gekommen und hatte sich beschwert, dass Ähnlichkeitsbeziehungen den Paralleltransport überleben. ,,Weil aber der Herrgott schon vor der Entwicklung der Theoretischen Physik gemerkt hat, dass er den Meinungen der Menschen nicht gerecht werden kann, macht er es eben, wie er will.''.

Weyl(viel später):„Aus dem Jahre 1918 datiert der von mir unternommene erste Versuch, eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektromagnetismus zu entwickeln, und zwar auf Grund des Prinzips der Eichinvarianz, das ich neben dasjenige der Koordinaten-Invarianz stellte. Ich habe diese Theorie selber längst aufgegeben, nachdem ihr richtiger Kern: die Eichinvarianz, in die Quantentheorie herübergerettet ist als ein Prinzip, das nicht die Gravitation, sondern das Wellenfeld des Elektrons mit dem elektromagnetischen verknüpft.“

Schrödingergleichung:

$$i\hbar\dot{\psi} = H\psi \tag{4}$$

ist nicht invariant unter geeichter Phasentransformation
$\psi(t) \to \psi'(t) = e^{-i\lambda(t)}\psi(t)$
Aber

$$i\hbar\dot{\psi} = (H + \phi(t))\psi \tag{5}$$

mit Umeichung:

$$\psi(t)- > \psi'(t) = e^{-i\lambda(t)}\psi(t), \quad \phi \to \phi' = \phi + \hbar\dot{\lambda} \tag{6}$$

ist invariant.

Nähere Analyse: Elektromagnetische Felder sind eine Konsequenz der Forderung nach Invarianz unter geeichten Phasentransformationen

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow e^{i\frac{e}{\hbar}\lambda(\vec{x},t)}\psi(\vec{x}, t) \tag{7}$$

Das Schwerefeld und das elektrodynamische Feld sind eine Konsequenz der Eichinvarianz.

In der Quantenphysik entsprechen den Eichfeldern Teilchen, die masselos sein müssen, da sonst die Eichinvarianz gebrochen wäre.

Bsp. Elektrodynamik:

Skalares Potential: ϕ, Vektorpotential $\vec{A}$.
Elektrisches Feld: $\vec{E} = -\vec{\partial}\phi + \frac{1}{c}\partial_t A$
Magnetisches Feld: $\vec{B} = [\vec{\partial} \times \vec{A}]$
Eichtransformation:

$$\phi \to \phi + \frac{1}{c}\partial_t \lambda, \quad \vec{A} \to \vec{A} + \vec{\partial}\lambda$$

ändert nicht elektromagnet. Feld.

Massenterm: $m^2(c^2\phi^2 - \vec{A}.\vec{A})$,

ist nicht invariant unter Eichtransformation, also verboten durch

Eichinvarianz.

Technischer Einschub: Umeichung in der relativistischen Wellengleichung

$(x_0 \equiv ct)$

$$\left(\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - mc^2\right) u(\vec{x}, t) = 0 \tag{8}$$

Geeichte Phasentransformation:

$$u(\vec{x}, t) \rightarrow u'(\vec{x}, t) = e^{ie\lambda(\vec{x}, t)} u(\vec{x}, t) \tag{9}$$

$$u(\vec{x},t) \rightarrow u'(\vec{x},t) = e^{ie\lambda(\vec{x},t)} u(\vec{x},t) \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - m\right) u'(\vec{x},t) \\
= & \Big(\gamma_0 [\frac{\partial}{\partial x_0} u(\vec{x},t) + i\,e\,u(\vec{x},t) \frac{\partial}{\partial x_0} \lambda(\vec{x},t)] \\
+ & \gamma_1 [\frac{\partial}{\partial x_1} u(\vec{x},t) + i\,e\,u(\vec{x},t) \frac{\partial}{\partial x_1} \lambda(\vec{x},t)] \\
+ & \gamma_2 [\frac{\partial}{\partial x_2} u(\vec{x},t) + i\,e\,u(\vec{x},t) \frac{\partial}{\partial x_2} \lambda(\vec{x},t)] \\
+ & \gamma_3 [\frac{\partial}{\partial x_3} u(\vec{x},t) + i\,e\,u(\vec{x},t) \frac{\partial}{\partial x_3} \lambda(\vec{x},t)] - m\,u(\vec{x},t)\Big) e^{i\lambda(\vec{x},t)} \\
= & \Big(\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0} \lambda(\vec{x},t) + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \lambda(\vec{x},t) + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \lambda(\vec{x},t) + \\
& \quad \gamma_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \lambda(\vec{x},t)\Big) i\,e\,u(\vec{x},t) \neq 0
\end{aligned}$$

$$(i\gamma_0[\frac{\partial}{\partial x_0} + ieA^0] + \gamma_1[\frac{\partial}{\partial x_1} + ieA^1] + \gamma_2[\frac{\partial}{\partial x_2} + ieA^2] \\ + \gamma_3[\frac{\partial}{\partial x_3} + ieA^3] - m)u(\vec{x},t) = 0 \tag{11}$$

$$A^\rho(\vec{x},t) \rightarrow A'^\rho(\vec{x},t) = A^\rho(\vec{x},t) - \frac{\partial}{\partial x_\rho}\lambda(\vec{x},t), \quad \rho = 0\ldots3 \tag{12}$$

kompensiert

$$\Big(\gamma_0\frac{\partial}{\partial x_0}\lambda(\vec{x},t) + \gamma_1\frac{\partial}{\partial x_1}\lambda(\vec{x},t) + \gamma_2\frac{\partial}{\partial x_2}\lambda(\vec{x},t) + \\ \gamma_3\frac{\partial}{\partial x_3}\lambda(\vec{x},t)\Big)i\,e\,u(\vec{x},t)$$

Kovariante Ableitung:

$$D_\mu \equiv (\partial_\mu + i\, e\, A_\mu)$$

Wird die kovariante Ableitung auf eine Wellenfunktion angewandt, so kompensiert die Umeichung des Vektorpotentials die Phasentransformation der Wellenfunktion:

$$D'_\mu u'(\vec{x}, t) = e^{ie\lambda(\vec{x},t)} D_\mu u(\vec{x}, t)$$

Elektromagnetische Feldtensor:

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$$

Diese Formulierungen lassen sich direkt auf kompliziertere Eichgruppen übertragen.

Die Symmetrien werden mehrdimensional

Nächster Eich-Schritt, nach U(1): Eichung von SU(2) etc.

Komplikation: Mehr Erzeugende, vertauschen nicht miteinander.

Von physikalischem Interesse, da diese Gruppen in der Klassifikation der Elementarteilchen auftreten.

Erste recht weitgehende Versuche: O. Klein 1938;

klassisch gelöst durch Yang und Mills 1954;

Quantisierung durch ’t Hooft und Veltmann ca 1970.

$$U(1): \qquad e^{i\lambda} \longrightarrow e^{i\lambda(\vec{x},t)}$$

$$SU(2): \qquad e^{i\sum_{n=1}^{3}\lambda_n\sigma_n} \longrightarrow e^{i\sum_{n=1}^{3}\lambda_n(\vec{x},t)\sigma_n}$$

In U(1) ($A_0 = c\phi, \vec{A}$) eingeführt, um $(\partial_0\lambda, \partial_1\lambda, \partial_2\lambda, \partial_3\lambda)$ zu kompensieren, in SU(2) 3 Felder nötig, jedes der 3 λ_n zu kompensieren. Sonst vieles ähnlich, vieles komplizierter.

In SU(2) 3 Eichbosonen ($W^{\pm}, Z$) mit Spin 1, die bei ungebrochener Symmetrie masselos sind; die beobachtete Masse der Eichbosonen ist aus Brechung der Symmetrie durch Higgs berechenbar

In SU(3) 8 Erzeugende und daher 8 Eichbosonen (Gluonen).

Die kovariante Ableitung in der SU(2) lautet:

$$D_\mu = (\partial_\mu - ie\vec{\sigma}\vec{A}_\mu)$$

wobei $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ die drei Pauli-Matrizen sind und $\vec{A}_\mu$ die drei 4er-Potentiale der SU(2).

Entsprechendes gilt in der SU(3), hier werden die 3 Pauli-Matrizen durch die 8 Gell-Mann-Matrizen ersetzt.

Warum ist das Higgs-Boson „leicht"?

Gängige Hypothese: Higgsboson mit Fermionen und Eichbosonen in einem Multiplett der Supersymmetrie

Interessante neue Art der Symmetrie: Es treten bei den Erzeugenden nicht nur Kommutatoren sondern auch Antikommutatoren auf.

$$[Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}]_+ = 2P_0 - 2\vec{\sigma}_{\alpha\dot{\beta}}\vec{P}$$

Susy sagt eine ganze Menge neuer Teilchen voraus, squarks, gauginos von denen bis jetzt noch keines gefunden wurde. Hoffnung auf LHC

Weitere Vorteile der Susy: 1)Grosse Vereinheitlichung, 2)mögliche Erklärung für die 26% kalte dunkle Materie.

Zusammenfassung

- Materie: chirale Fermionen, $m \approx 0$
  Eichsymmetrie $\rightarrow$ Eichbosonen

- ART: Geeichte Lorentztrafo, Gravitonen

- Elektroschwache Theorie:
  geeichte SU(2)$\otimes$U(1), $W^{\pm}, Z$, γ

- Starke Wechselw.: geeichte SU(3), Gluonen

- Higgs-Boson. Massen durch Symmetriebrechung

- Supersymmetrie ?

Die Welträtsel der Elementarteilchen

1. Warum 6 Quarks und 6 Leptonen
2. Woher kommen die Massen
3. Warum Eichsymmetrie und warum gerade diese Gruppe
4. Wie können wir die Schwerkraft in die Elementarteilchenphysik einbauen.
5. Was ist die kalte dunkle Materie
6. Warum ist die dunkle Energie so sehr verdünnt?