

Hans Günter Dosch

# Jenseits der Nanowelt

Leptonen, Quarks und Eichbosonen

24. März 2006

Springer

Berlin Heidelberg New York

Hong Kong London

Milan Paris Tokyo



## Inhaltsverzeichnis

1.4	Die Quantenphysik wird entscheidend .....	1
1.4.1	Spezielle Relativitätstheorie und Quantenphysik	1
1.4.2	Feldtheorie und Quantenphysik .....	6
6.5	Laufende Kopplung und asymptotische Freiheit .....	18



## 1.4 Die Quantenphysik wird entscheidend

Die Quantenphysik war entwickelt worden, um Vorgänge auf atomarem Niveau zu beschreiben. Ob sie für subatomare Vorgänge, etwa für Prozesse im Atomkern, gültig ist, war für einige Zeit recht unsicher. Es herrschte durchaus die Meinung, daß für die Kernphysik neue Gesetze gefunden werden müßten, die sich von denen der Atomphysik ebenso unterschieden, wie die der Atomphysik von denen der klassischen Physik. Es stellte sich aber heraus, daß die Quantenphysik offenbar allgemein gültig ist. Es ist allerdings nicht die durch die Quantenpostulate modifizierte *Mechanik*, die auf die Elementarteilchen angewandt werden kann, sondern die Quantenfeldtheorie, die quantisierte Form der *Feldtheorie*. In diesem Abschnitt, der nicht streng historisch aufgebaut ist, will ich versuchen, einige der entscheidenden Resultate der Quantenfeldtheorie mit möglichst wenig Formalismus vorzustellen. Dies führt notwendigerweise zu einer Gratwanderung zwischen Verfälschung und Unverständlichkeit, doch ich glaube, daß sich einige wesentliche Gedanken auch für Nicht-Spezialisten weitgehend nur mit Worten darstellen lassen. Die wenigen Formeln, auf die ich unter keinen Umständen verzichten kann, mögen vielleicht durch die darin auftretenden ungewohnten Symbole kompliziert erscheinen, aber ich versichere Ihnen, daß von höherer Mathematik kein Gebrauch gemacht wird. Ich bemühe mich nur das zu sagen, was wahr ist, wenn ich auch nicht immer *alles* sage, was wahr ist.

### 1.4.1 Spezielle Relativitätstheorie und Quantenphysik

Wir beginnen mit einer der wichtigsten Beziehungen, die im letzten Jahrhundert gefunden wurde: Der von Einstein 1905 entdeckte allgemeine Zusammenhang zwischen Energie  $E$ , Impuls  $\mathbf{p}$  und Masse  $m$  eines Teilchens ist

$$E^2 = m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2,$$

wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

Diese Formel enthält doppelten Zündstoff: Einmal gibt sie für Teilchen mit verschwindendem Impuls, also ruhende Teilchen, die berühmte Gleichung für die Ruhenergie:

$$E = mc^2,$$

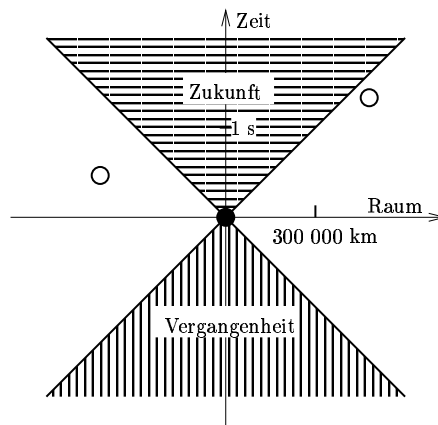
zum anderen erlaubt sie für gegebene Masse und Impuls *zwei* Lösungen: eine positive und eine negative:

$$E = +|\sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}| \quad \text{und} \quad E = -|\sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}|.$$

In der klassischen Physik ist die negative Lösung nicht weiter interessant; man erklärt sie schlechterdings für „unphysikalisch“ und vergißt sie. In der Quantenmechanik ist das nicht so einfach. Hier werden den Meßgrößen „Ort“ (Lage), „Impuls“ und „Energie“ nicht direkt Meßwerte, also Zahlen, zugeordnet, sondern Operatoren. Das sind Objekte, die nicht durch ihre Werte, sondern durch ihre Wirkung gekennzeichnet sind. Die Energie eines Zustandes ist dadurch bestimmt, wie der Energie-Operator auf ihn wirkt. Wenn man nun gewisse Meßwerte als unphysikalisch verwirft, so muß man dafür den Operator, der den Meßgrößen in der Quantenphysik zugeordnet ist, modifizieren. Es stellt sich heraus, daß diese Modifikation Konsequenzen hat, die im Widerspruch zu den Prinzipien steht, auf denen eine relativistische Quantenphysik aufgebaut ist. Eines der Prinzipien, die verletzt werden, wenn man die negativen Energiezustände einfach wegläßt, ist das der Lokalität. Da es in der Teilchenphysik eine große Rolle spielt, will ich kurz darauf eingehen.

Das Prinzip der Lokalität besagt – etwas salopp ausgedrückt – daß ein Ereignis, das von einem anderen nichts wissen kann, auch nicht durch dieses beeinflusst werden kann. Ein Ereignis kann demnach nicht durch ein zukünftiges Ereignis beeinflusst werden. Es kann aber auch kein Einfluß stattfinden, wenn die beiden nicht durch ein Lichtsignal miteinander kommunizieren können. Dabei wird berücksichtigt, daß sich nach der speziellen Relativitätstheorie Signale prinzipiell nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können. In Abb. 1.1 ist der Einflußbereich in Raum und Zeit eines durch einen vollen Kreis gekennzeichneten Ereignisses quergestreift eingezeichnet, der Bereich, der selbst einen Einfluß auf dieses Ereignis ausüben kann, längsgestreift. Je weiter ein Raumpunkt von dem des ursprünglichen Ereignisses entfernt ist, also desto weiter er am rechten oder linken Rande der Abbildung liegt, desto später kann erst der Einfluß einsetzen. So kann z. B. eine Eruption auf der Sonne irdische Ereignisse erst nach acht Minuten beeinflussen, weil das Licht solange braucht, um von der Sonne zur Erde zu gelangen. Hier ist vielleicht die Anmerkung angebracht, daß bei allen Berichten über „Teleportation“ in der Quantenmechanik mit Über-Lichtgeschwindigkeit es sich nicht um Signale handelt, die Informationen übermitteln.

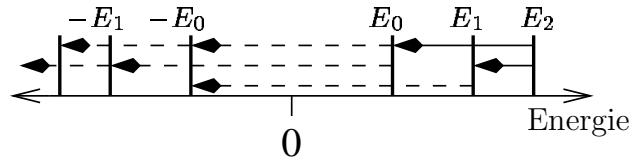
Nun kann man natürlich annehmen, daß in der Quantenmechanik dieses Lokalitätsprinzip nicht gilt. Es hat sich aber im Verlauf der Wissenschaftsgeschichte herausgestellt, daß es sich oft lohnt, konservativ zu sein und Prinzipien nicht zu schnell aufzugeben. Oft genug hat diese konservative Prinzipientreue zu revolutionären Ergebnissen geführt, und so war es auch hier, wie wir sehen werden.



**Abbildung 1.1.** Illustration der Lokalität. Das Raum-Zeitgebiet, auf das durch einen vollen Kreis gekennzeichnete Ereignis einen Einfluß haben kann, ist quergestreift eingezeichnet, das Gebiet, das selbst einen Einfluß ausüben kann, ist längsgestreift. Ereignisse, die z. B. an den durch offene Kreise gekennzeichneten Raum-Zeitpunkten stattfinden, sind von dem mit dem vollen Kreis vollkommen unabhängig

P.A.M. Dirac hatte 1928 eine quantenmechanische Gleichung für das Elektron gefunden, die die oben angegebenen relativistische Beziehung zwischen Energie und Impuls in die Quantenphysik überträgt. Diese Gleichung löste viele Rätsel der Atomphysik mit einem Schlag: Sie zeigte, daß die Elektronen Spin  $\frac{1}{2}\hbar$  haben *müssen*, daß das Verhältnis von magnetischem Moment zu diesem Spin tatsächlich um einen Faktor zwei größer ist als beim üblichen Bahndrehimpuls, und sie erklärte mit größter Präzision die beobachteten Linien im Wasserstoffspektrum, d. h. die Wellenlängen des von einem angeregten Wasserstoffatom ausgesandten Lichts. O. Klein und Y. Nishina benützten die Dirac-Gleichung, um die Streuung von Photonen an Elektronen zu berechnen, und auch hier waren die Ergebnisse sehr befriedigend, wenn auch wegen der experimentellen Unsicherheiten nicht so zwingend wie beim Spektrum des Wasserstoffs. Allerdings hatte die Dirac-Gleichung ein gewaltiges Problem, was nach der vorigen Diskussion nicht verwunderlich ist: Sie sagte die Existenz von Zuständen mit negativer Energie voraus, und zwar zu jedem Zustand mit positiver Energie gab es einen entsprechenden Zustand, für den die Energie den gleichen Betrag, aber das negative Vorzeichen hatte. Der russische Physiker I.E. Tamm und der Schwede I. Waller zeigten unabhängig voneinander, daß diese nega-

tiven Zustände auch tatsächlich nötig sind, um aus der oben erwähnten Klein-Nishina-Formel im klassischen Grenzfall, nämlich für sehr langwellige Strahlung, das altbekannte Thomsonsche Resultat für die Streuung von Licht an Elektronen zu erhalten. Wenn aber diese negativen Energiezustände wirklich existierten, dann war nicht einzusehen, warum nicht gewöhnliche Zustände, also solche mit positiver Energie, unter Aussendung von Licht in die Zustände mit negativer Energie übergingen, genauso wie ein angeregter Zustand in einem Atom in einen Zustand niedrigerer Energie übergeht. In Abb. 1.2 ist das bildlich dar-



**Abbildung 1.2.** Die positiven und negativen Energiezustände bei der Dirac-Gleichung. Neben den beobachteten Übergängen zwischen den Zuständen positiver Energie (*durchgezogene Pfeile*) erwartet man auch – nicht beobachtete – Übergänge von Zuständen positiver Energie in solche negativer Energie und Übergänge zwischen Zuständen negativer Energie (*gestrichelte Pfeile*)

gestellt. Die durchgezogenen Pfeile zeigen die beobachteten Übergänge zwischen Zuständen positiver Energie, wie sie z. B. zu den bekannten von Atomen ausgesandten Spektrallinien führen, die gestrichelten Pfeile deuten die nicht beobachteten, aber durch nichts ausgeschlossenen Übergänge an, bei denen am Ende ein Zustand negativer Energie vorliegt. Die dabei ausgesandte Strahlung kann erhebliche Energie mit sich tragen. Der niedrigste positive Energiezustand eines Elektrons hat dessen Ruhenergie, also etwa eine halbe Million Elektronenvolt. Neben diesem gibt es nach der Dirac-Gleichung einen negativen Zustand mit einer Energie von minus einer halben Million Elektronenvolt. Ginge also der positive Energiezustand in den negativen über, so würde dabei eine Million Elektronenvolt frei, die das ausgesandte Photon mit sich trüge. Um so harte, d. h. energiereiche, Röntgenstrahlung zu erzeugen, müßte man an eine Röntgenröhre mindestens eine Million Volt anlegen. Doch damit nicht genug. Da die Energie der Zustände nach unten nicht begrenzt ist, würde ein Zustand zu immer tieferen Energien zerfallen können und dabei laufend Strahlung aussenden: Es gäbe also gar kein stabiles Universum.



Es ist deshalb schon verständlich, daß die Diracsche Theorie auf herbe Kritik stieß. Pauli erfand in diesem Zusammenhang das zweite Pauli-Prinzip: Eine solche Theorie müßte auf den Körper ihres Erfinders angewandt werden. Dann würde dieser sofort zerstrahlen und könnte eine solche Theorie gar nicht erst verbreiten.

Es gab also ein echtes Dilemma: Zum einen hatte die Dirac-Gleichung erstaunlich gut erfüllte Vorhersagen gemacht, zum anderen führte sie zu solch absurden Konsequenzen, wie den eben geschilderten. Nun waren drei Haltungen möglich: Einmal, man verwirft die Dirac-Gleichung in Bausch und Bogen. Eine andere Möglichkeit besteht darin anzunehmen, daß die Dirac-Gleichung schon ihre Bedeutung hat, daß aber bei der Interpretation etwas noch nicht stimmt. Oder man findet eine geniale Ausrede, die das Gute erhält und die unerwünschten Konsequenzen verhindert.

Auf eine bessere Interpretation zu warten, wäre eigentlich zu dieser Zeit sehr legitim gewesen, denn auch die nicht-relativistische Quantenmechanik hatte (und hat) ihre Probleme. Aber Warten bei solch brisanten Fragen liegt nicht in der Natur der Physiker, und so fand Dirac eine geniale Ausrede zur Lösung des Problems.

Das (erste) Paulische Ausschließungsprinzip war bereits bekannt: Falls ein Zustand von einem Elektron besetzt ist, findet kein weiteres in diesem Zustand Platz. Dies erklärt z. B. das Periodische System der Elemente. Das angeregte Leuchtelektron des Natrium-Atoms fällt nicht in den absolut niedrigsten Zustand, der ist nämlich schon besetzt, sondern in den niedrigsten unbesetzten Zustand auf einer höheren Schale; die chemischen Eigenschaften eines Elementes werden durch diese höchsten besetzten Energie-Zustände bestimmt. Dirac schlug vor, daß all die unerwünschten negativen Zustände zwar vorhanden, aber schon besetzt wären. Deshalb könnten die Elektronen positiver Energie nicht in diese negativen fallen, die Welt wäre also stabil. Allerdings mußte er dazu annehmen, daß all die besetzten negativen Energiezustände (unendlich viele) unbeobachtbar seien; man würde jedoch bemerken, wenn einmal ein Zustand negativer Energie *nicht* besetzt sei: Dieses „Loch“ verhielte sich wie ein Teilchen mit einer Ladung, die entgegengesetzt der des Elektrons ist, also wie ein Teilchen positiver Ladung. Da man bis dahin nur zwei Arten geladener Teilchen kannte, das negative Elektron und das positive Proton, schlug Dirac vor, die Löcher mit den Protonen zu identifizieren. Er nahm an, daß die Wechselwirkung dafür Sorge, daß das „Loch“ die Masse des Protons habe, also etwa 2000 mal schwerer sei als das Elektron. Die unbeobachtbaren aufgefüllten Zustände negativer Energie wurden „Dirac-See“ genannt.

Auch diese Theorie wurde im allgemeinen nicht gerade enthusiastisch begrüßt, und führte, je nach Temperament, zu den verschiedensten Reaktionen. Heisenberg berichtete, daß das „magnetische Elektron“ den Göttinger Physiker Pascual Jordan, einen der am stärksten mathematisch orientierten Väter der Quantentheorie, trübsinnig mache. Enrico Fermi hielt in Rom einen „Schauprozeß“ ab, bei dem Dirac – symbolisch – zur Bastonade verurteilt wurde, da er gegen ein gewichtiges Prinzip der Quantenmechanik verstoßen habe, nämlich keine unbeobachtbaren Größen einzuführen. Niels Bohr erfand eine weitere „Wie-fängt-man-wilde-Tiere“-Geschichte, nämlich „Wie fängt man Elefanten lebendig“: An der Wasserstelle der Elefanten stellt man ein Poster mit den Diracschen Vorschlägen auf. Der Elefant, der ja bekanntlich ein sehr weises Tier ist, liest dieses Poster und ist für einige Minuten vollkommen schockiert. In dieser Zeit kann der Jäger, der sich in der Nähe verborgen hielt, ihn fesseln und sicher zu Hagenbeck nach Hamburg schicken.

Als es klar wurde, daß die Identifikation des Loches mit dem Proton unhaltbar war, kam Dirac 1931 zur Sache: „Ein Loch, wenn es ein solches gäbe, wäre eine neue Art von Teilchen, den Experimentalphysikern unbekannt, das die gleiche Masse und die entgegengesetzte Ladung des Elektrons hätte“, formulierte er vorsichtig, aber eindeutig. Ein Jahr später veröffentlichte der Experimentalphysiker C.D. Anderson einen Artikel mit dem ebenso vorsichtigen Titel: „Die offensichtliche Existenz leicht ablenkbarer positiver Ladungen“. Leicht ablenkbar bedeutet: sehr viel geringere Masse als das Proton. Das Teilchen, das dem Loch im Dirac-See entspricht, war gefunden. Doch davon später. Dem Vorschlag de Broglies folgend wird dieses Loch im Teilchensee „Antiteilchen“ genannt.

#### 1.4.2 Feldtheorie und Quantenphysik

Ich komme nun zum kompliziertesten Teil dieses theoretischen Abschnitts, nämlich einer kurzen Darstellung einiger wesentlicher Grundzüge einer relativistischen Quantenfeldtheorie, d. h. einer Theorie, die den Feldbegriff, die spezielle Relativitätstheorie und die Quantentheorie vereint.

Ganz allgemein ist ein Feld eine Zuordnung der Raum-Zeitpunkte zu irgendwelchen Eigenschaften, mathematisch gesehen eine Abbildung der Raum-Zeitpunkte auf diese Eigenschaften. Eine Wetterkarte stellt ein Feld dar: sie zeigt zu einem festen Zeitpunkt – etwa dem 4. August 1913, 12 Uhr - für jeden Punkt der Erdoberfläche den Luftdruck. Die physikalische Eigenschaft, die Feldgröße, ist hier der Luftdruck. In

diesem Beispiel haben wir einen materiellen Träger der Eigenschaft, nämlich die Luft; aber in der Elektrodynamik hat man sich an eine Zuordnung physikalischer Eigenschaften, nämlich elektrischer und magnetischer Feldstärken, an Raum-Zeitpunkte auch ohne materiellen Träger gewöhnt. Die Verknüpfungen der Felder an verschiedenen Raum- und Zeitpunkten werden durch die Feldgleichungen ausgedrückt. Berühmte Feldgleichungen sind die Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik und die Navier-Stokes-Gleichungen der Hydrodynamik. Typisch für Feldtheorien sind Überlagerungsphänomene: rührt von einer Quelle an einem Punkt eine gewisse Feldstärke her, so kann diese durch eine gleichgroße, entgegengesetzt gerichtete Feldgröße von einer anderen Quelle zum Verschwinden gebracht werden. In der Akustik sind die Schwebungen eines Tones ein typisches Überlagerungsphänomen, in der Optik sind es die Interferenzphänomene. In der Quantenfeldtheorie werden die Prinzipien der Quantenphysik mit denen der Feldtheorie vereint. Im Rahmen der klassischen Feldtheorie, wie sie von Euler und Lagrange entwickelt wurde, kann man das Feld selbst als eine Verallgemeinerung der Lagekoordinaten auffassen und eine Feldenergie durch die Felder ausdrücken. Auch kann man einen zum Feld „kanonisch konjugierten“ Feldimpuls einführen (nicht zu verwechseln mit dem durch das Feld getragenen Impuls). Ich hatte bereits erwähnt, daß in der Quantenmechanik den beobachtbaren Größen (Observablen) – wie Energie und Impuls – Operatoren zugeordnet sind, die auf Zustände wirken. Eine Besonderheit dieser Operatoren ist, daß sie sich nicht miteinander vertauschen lassen. Wenn ich erst den Operator des Orts und dann den des Impulses auf einen Zustand wirken lasse, so erhalte ich ein anderes Ergebnis, als wenn ich die Reihenfolge vertausche, also erst den Impuls- und dann den Ortsoperator auf den Zustand wirken lasse. Bezeichnen wir den Ortsoperator mit  $\mathbf{X}$ , den Impulsoperator mit  $\mathbf{P}$ , so ist eines der Grundpostulate der Quantenphysik, daß folgende *Vertauschungsrelation* gilt:

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{P} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{X} = i\hbar.$$

Hierbei bedeutet  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{P}$ , daß ich zuerst den rechts stehenden Operator, also den Impulsoperator  $\mathbf{P}$  und dann den links stehenden Operator, also den Ortsoperator  $\mathbf{X}$  auf einen Zustand wirken lasse. Die obige Gleichung besagt in einfachen Worten: wenn ich einmal auf einen Zustand erst  $\mathbf{P}$  und dann  $\mathbf{X}$  wirken lasse, zum anderen erst  $\mathbf{X}$  und dann  $\mathbf{P}$  und die beiden Ergebnisse voneinander abziehe, so erhalte ich ein sehr einfaches Ergebnis, nämlich den ursprünglichen Zustand der mit der Zahl  $i\hbar$  multipliziert ist. Hier ist  $\hbar$  das Plancksche Wirkungsquantum und  $i$  die imaginäre Einheit, also die (komplexe) Zahl, die

mit sich selbst multipliziert  $-1$  ergibt. Beim Orts- und Impulsoperator führt diese Vertauschungsrelation zu den berühmten Heisenbergschen Unschärferelationen.

In der quantisierten Feldtheorie sind die den Raum-Zeitpunkten zugeordneten Eigenschaften nicht wie in der klassischen Feldtheorie direkte Meßgrößen, also Zahlen, sondern Operatoren. Diesen Operatoren sowie den aus ihnen gebildeten Operatoren des Feldimpulses und der Feldenergie werden strukturell die gleichen Vertauschungsrelationen zugeordnet wie dem Ort, dem Impuls und der Energie in der *Quantenmechanik*. Neben den erwähnten, für die Quantenphysik typischen Vertauschungsrelationen müssen die Feldoperatoren auch den aus der klassischen Feldtheorie bekannten Gleichungen (z. B. in der Elektrodynamik den Maxwell-Gleichungen) genügen.

Dies ist zwar alles begrifflich und technisch hoch kompliziert, aber ich möchte betonen, daß die in der Quantenmechanik entwickelten Prinzipien der Quantisierung zusammen mit der Euler-Lagrangeschen klassischen Feldtheorie ein sehr wichtiges heuristisches Führungsprinzip bildeten, so daß man bei der Quantisierung der Felder nicht vollständig im Dunkeln tappte wie zu Beginn der Quantenmechanik. Deshalb waren Versuche von O. Klein und P. Jordan, eine klassische Feldtheorie zu quantisieren (die sogenannte zweite Quantisierung), schon zwei Jahre nach der Quantisierung der Mechanik erfolgreich.

Für freie Felder, also solche die nicht untereinander wechselwirken, ist das Problem der Quantisierung vollständig gelöst. Freie Felder scheinen zwar zunächst uninteressant, aber dennoch lassen sich schon wichtige Züge einer Quantenfeldtheorie an ihnen diskutieren. Das Problem der negativen Energielösungen und der Antiteilchen läßt sich sehr befriedigend lösen. Vor allem aber ist die freie Theorie der Ausgangspunkt für eine störungstheoretische Behandlung wechselwirkender Felder. Man quantisiert zunächst die freie Theorie und behandelt dann die Wechselwirkung als eine Störung. Die meisten Ergebnisse der Quantenfeldtheorie sind mit Hilfe dieser Störungstheorie gewonnen. Wir behandeln erst später im Abschn. ?? eine Methode, die über die Störungstheorie hinausgeht.

Die Maxwellsche Theorie der elektromagnetischen Wechselwirkung ohne Ladungen und Ströme ist eine freie Theorie, und die Quantisierung ist vollständig geklärt (ich verwende mit Absicht nicht das Wort „verstanden“, um eine Diskussion, was „verstehen“ bedeutet von vornherein zu vermeiden). Der quantenmechanische Operator, der dem klassischen elektromagnetischen Potential am Raum-Zeitpunkt mit den Raum-Koordinaten  $\boldsymbol{x}$  zur Zeit  $t$  entspricht, besteht aus zwei Teilen,  $a$  und  $a^*$ , die durch eine wohldefinierte mathematische Operation, die

sogenannte hermitesche Adjunktion, verbunden sind:

$$A(\mathbf{x}, t) = a(\mathbf{x}, t) + a^*(\mathbf{x}, t).$$

Die hermitesche Adjunktion, gekennzeichnet durch den Stern  $*$  läßt alle algebraischen Strukturen ungeändert, und es gilt insbesondere, daß man bei zweimaliger Anwendung der hermiteschen Adjunktion wieder den ursprünglichen Operator erhält:  $(a^*)^* = a$ . Man sieht daraus, daß das oben definierte Feld  $A(\mathbf{x}, t)$  selbstadjungiert ist, d. h. bei Anwendung der hermiteschen Adjunktion unverändert bleibt. Die Vertauschungsrelationen, die der Operator  $A$  nach den oben erwähnten Vorschriften der Quantisierung erfüllen muß, bedingen die folgende Interpretation der beiden Teile:  $a^*(\mathbf{x}, t)$  *erzeugt* ein Photon am Ort  $\mathbf{x}$  zur Zeit  $t$  und  $a(\mathbf{x}, t)$  *vernichtet* ein Photon. Das heißt zum Beispiel:  $a^*$ , angewandt auf einen Zustand, der kein Photon enthält, macht daraus einen Zustand, der ein Photon enthält;  $a$  angewandt auf einen Zustand, der drei Photonen enthält, macht daraus einen Zustand, der nur noch zwei enthält. Daß solche Operatoren auftreten, ist nicht verwunderlich, denn schließlich werden ja bei atomaren Prozessen Photonen ausgesandt, also erzeugt oder sie werden absorbiert, also vernichtet. Da eine solche Erzeugung und Vernichtung von Photonen in der Quantenmechanik nicht vorkommt, kann ein so wichtiger Prozeß wie die Aussendung von Licht adäquat nur durch die Quantenfeldtheorie beschrieben werden.

Für Elektronen ist das Konzept der Quantisierung mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren schon wesentlich kühner als bei Photonen. Es ist vielleicht kein Zufall, daß es von Fermi 1934 erstmals konsistent im Zusammenhang mit der Theorie des radioaktiven *beta*-Zerfalls eingeführt wurde. Im alten Kernmodell vor 1932 hatte man angenommen, der Kern bestünde aus Protonen und Elektronen, beim *beta*-Zerfall mußte in diesem Bild also nur ein Elektron aus dem Kern herauskommen. Aber nachdem es nach der Entdeckung der Neutronen klar war, daß der Kern nur Protonen und Neutronen, aber keine Elektronen enthielt, mußte man den *beta*-Zerfall als einen genuine Erzeugungsprozeß von Elektronen betrachten.

Das Elektron und das Positron werden durch einen gemeinsamen Feldoperator beschrieben. Er besteht ebenfalls aus einem Vernichter und einem Erzeuger:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = b(\mathbf{x}, t) + d^*(\mathbf{x}, t),$$

wobei  $b$  ein Elektron vernichtet und  $d^*$  ein Positron erzeugt. Der hermitesch adjungierte Operator,  $\psi^*(\mathbf{x}, t)$  ist nach der oben erwähnten Eigenschaft der hermiteschen Adjunktion

$$\psi^*(\mathbf{x}, t) = b^*(\mathbf{x}, t) + d(\mathbf{x}, t),$$

enthält also einen Erzeugungsoperator für ein Elektron und einen Vernichtungsoperator für ein Positron.

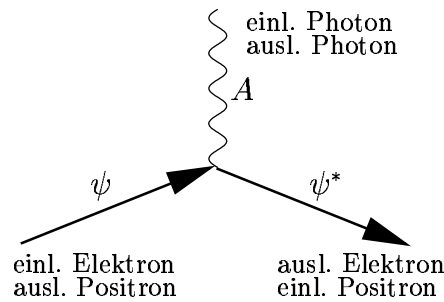
Da der Feldoperator die Dirac-Gleichung erfüllen muß, müssen in ihm sowohl positive als auch negative Energien vorkommen. Das ist auch der Fall, aber nun sind die positiven Energien den Vernichtungsoperatoren, die negativen aber den Erzeugungsoperatoren zugeordnet. Berechnet man die Feldenergie, dann führt diese verschiedene Zuordnung dazu, daß diese immer positiv ist. Dies ist die mathematisch saubere Formulierung der Diracschen Löchertheorie, die im vorigen Unterabschnitt besprochen wurde. Da es in der *Quantenmechanik* keine Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren gibt, ist es nicht verwunderlich, daß dort das Problem der negativen Energien nicht befriedigend gelöst werden konnte.

Beim elektromagnetischen Potential bezogen sich der Erzeugungs- und der Vernichtungsoperator auf das gleiche Teilchen, das Photon, während beim Elektronenfeld  $\psi$  Vernichtungsoperatoren  $b$  für Teilchen (Elektronen) und Erzeugungsoperatoren  $d^*$  für Antiteilchen (Positronen) auftreten. Man kann dies so zusammenfassen, daß beim Photon Teilchen und Antiteilchen identisch sind, nicht aber beim Elektron und Positron. Man nennt die Teilchen, die den Quantenfeldern entsprechen *Feldquanten*. Das Photon ist also das Feldquant des quantisierten elektromagnetischen Feldes, das Elektron und das Positron sind die Feldquanten des oben beschriebenen Feldes  $\psi^*(\mathbf{x}, t)$ .

Richtig interessant wird es aber erst, wenn wir Wechselwirkungen betrachten. In der Quantenelektrodynamik (im folgenden mit QED abgekürzt), also der Theorie von Elektronen, Positronen und dem elektromagnetischen Feld, ist der Wechselwirkungsoperator durch allgemeine Prinzipien festgelegt, die wir in Abschn. ?? behandeln werden. Er besteht aus dem Produkt von drei Feldoperatoren:

$$L_{\text{Wechselwirkung}} = e \psi^*(\mathbf{x}, t) A(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t).$$

Die Stärke der Kopplung ist gegeben durch die elektrische Ladung  $e$  des Elektrons. Daneben treten noch weitere Faktoren auf, die das Leben erschweren und auf die es bei der quantitativen Berechnung zwar sehr, aber hier bei der allgemeinen Diskussion nicht ankommt. Ich überspringe nun zunächst einmal 20 Jahre mühsamer Arbeit an der Entwicklung solcher Ausdrücke und führe gleich die geniale graphische Methode ein, die Richard Feynman entwickelte, um sehr schnell die Formeln für die quantenmechanischen Wahrscheinlichkeitsamplituden hinzuschreiben, aus denen man dann zum Beispiel Wirkungsquerschnitte oder



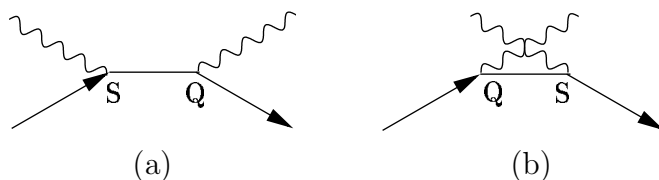
**Abbildung 1.3.** Graphische Darstellung der Wechselwirkung von Photonen und Elektronen

Zerfallswahrscheinlichkeiten berechnen kann. Aus der Wahrscheinlichkeitsamplitude berechnet man die Wahrscheinlichkeit als das Quadrat des Absolutbetrages der Amplitude.

Wir stellen die oben angegebene Wechselwirkung durch einen „Vertex-Graphen“ dar, wie in Abb. 1.3 gezeigt. Die Wellenlinie steht für das Photonenfeld  $A$ , enthält also Erzeuger und Vernichter und dementsprechend Photonen, die in den Vertex hineinlaufen, sowie solche, die aus ihm herauslaufen. Die durchgezogene Linie mit dem Pfeil zum Vertex stellt das Feld  $\psi$  dar, enthält also einen Elektronenvernichter und Positronenerzeuger, dementsprechend stellt sie ein *einlaufendes (vernichtetes) Elektron* oder ein *auslaufendes (erzeugtes) Positron* dar. Die Linie, die vom Vertex weg zeigt, steht für  $\psi^*$ , enthält also einen Elektronenerzeuger und einen Positronenvernichter und steht daher für ein *auslaufendes Elektron* oder ein *einlaufendes Positron*. Um eine Streuung z. B. eines Photons an einem Elektron zu beschreiben, brauchen wir Graphen, bei dem ein Elektron und ein Photon einlaufen und ein Elektron und ein Photon auslaufen; das entspricht der experimentellen Situation. Wir müssen diese experimentell realisierbare Reaktion durch die Wechselwirkung erzeugen, also aus dem obigen Vertexgraphen, der die elementare Wechselwirkung beschreibt, zusammensetzen: Die einfachsten zwei Möglichkeiten sind in Abb. 1.4 dargestellt.

Im Graphen Abb. 1.4a wird ein Photon und ein Elektron an dem Punkt  $S$  vernichtet und ein einzelnes Elektron wird – allerdings nur für kurze Zeit – erzeugt. Das ist eigentlich mit dem Satz von der Erhaltung der Energie nicht vereinbar, wie man sich leicht überlegen kann. Aber in der Quantenphysik gilt eine Unschärfebeziehung zwischen Energie und Zeit; das Produkt aus Zeitauflösung und Energieauflösung ist größer oder gleich dem Planckschen Wirkungsquantum. Lebt ein Zustand al-

so nur eine kurze Zeit, so brauchen wir es mit dem Energiesatz nicht allzu genau zu nehmen. Und das ist hier der Fall: Der Zwischenzustand lebt nur kurz, am Punkte  $Q$  wird das dazwischen auftretende Elektron vernichtet, und die auslaufenden Zustände, ein Elektron und ein Photon, erzeugt. Für den kurzlebigen Zwischenzustand ist wegen der Unschärfebeziehung die Energie gar nicht so scharf definiert, als daß man von einer Verletzung des Energiesatzes sprechen könnte. Im Endzustand muß der Energiesatz wieder im Lot sein, also ist die Gesamtenergie des Elektrons und des Photons nach der Reaktion wieder gleich der Gesamtenergie vor der Reaktion. Man nennt das dazwischen auftretende Elektron, dessen reale Existenz nicht mit dem Energiesatz vereinbar ist, ein „virtuelles Teilchen“. Beim Graphen Abb. 1.4b wird an der Stelle  $Q$  ein Elektron vernichtet und ein reelles Photon sowie ein virtuelles Elektron erzeugt, wieder unter scheinbarer Verletzung der Energieerhaltung; doch nach der Vernichtung des intermediären Elektrons und des einlaufenden Photons bei gleichzeitiger Erzeugung des auslaufenden Elektrons an der Stelle  $S$  ist die Energie wieder erhalten.



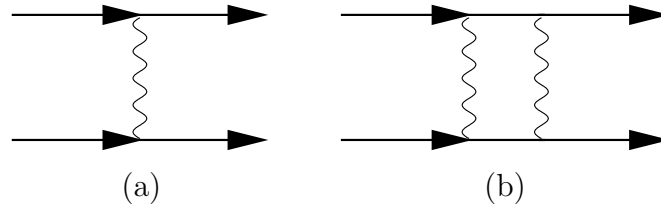
**Abbildung 1.4.** Feynman-Graphen für die Streuung eines Photons an einem Elektron

Den beiden Graphen entsprechen wohldefinierte mathematische Ausdrücke für die Streuung, die genau die im vorigen Abschnitt erwähnten Formeln von Klein und Nishina für die Compton-Streuung ergeben. Es sind diese mathematischen Formeln, die den eigentlichen Sinn der Feynman-Graphen ausmachen. Die virtuellen Teilchen beschreiben im Grunde genommen die Ausbreitung von Quantenfeldern; man sollte sich davor hüten, ihnen eine realistische physikalische Bedeutung zu geben. Man kann übrigens anstatt mit der Energieunschärfe genauso gut mit einer Massenunschärfe argumentieren. Man sagt dann, die virtuellen Teilchen haben eine unphysikalische Masse.

Auch die Streuung zweier Elektronen aneinander läßt sich aus dem Vertexgraphen 1.3 leicht konstruieren. Abbildung 1.5 zeigt zwei Graphen, die zu dieser Streuung beitragen. Da hier virtuelle Photonen an verschiedenen Elektronenlinien angreifen, spricht man vom „Aus-



tausch“ virtueller Photonen, und man kann sagen, daß die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen geladenen Körpern durch den Austausch virtueller Photonen zustandekommt.

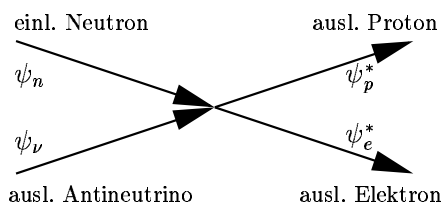


**Abbildung 1.5.** Feynman-Graphen für die Streuung zweier Elektronen. **(a)** Beitrag niedrigster Ordnung **(b)** Beitrag höherer Ordnung

Die beiden Graphen aus Abb. 1.5 illustrieren das Prinzip der Störungstheorie. Der linke Graph mit nur einer inneren Photonlinie ist der Beitrag der Störungstheorie in niedrigster Ordnung, d. h. es gibt keinen einfacheren Graphen, der zur Streuung beiträgt. Da in ihm zweimal die Kopplung eines Photons an eine Elektronlinie vorkommt ist dieser Beitrag proportional zum Quadrat der Ladung des Elektrons,  $e^2$ . Der Graph rechts repräsentiert einen Beitrag höherer Ordnung, er ist proportional zu  $e^4$ . Wenn die elektromagnetische Wechselwirkung klein ist, d. h.  $e$  eine kleine Zahl ist, so ist der Beitrag rechts gegenüber dem Beitrag niedrigster Ordnung stark unterdrückt, nämlich um einen Faktor  $e^2$ . Eine genauere Analyse zeigt, daß die Unterdrückung der nächsthöheren Ordnung typischerweise von der Größe  $\alpha = e^2/(4\pi\hbar c)$  ist. Diese Zahl ist die sogenannte Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante und tatsächlich sehr klein, nämlich ungefähr  $1/137$ .

Die erste Feldtheorie, bei der die Idee der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren auch auf Teilchen mit Spin  $\frac{1}{2}\hbar$  (Fermionen) übertragen wurde, war – wie bereits erwähnt – von Fermi 1933 für den *beta*-Zerfall entwickelt worden. Dabei zerfällt das freie oder im Kern gebundene Neutron in ein Proton, ein Elektron und ein Antineutrino. Das Neutron wird also vernichtet, das Proton, das Elektron und das Antineutrino werden erzeugt. Die entscheidende Wechselwirkungs-Struktur ist eine „Vier-Fermion-Wechselwirkung“, bei der vier Feldoperatoren für Fermionen miteinander multipliziert werden. Für den *beta*-Zerfall des Neutrons tritt das Produkt des Neutron- und des Neutrino-feldes sowie der adjungierten Proton- und Elektronfelder auf, wie in Abb. 1.6 dargestellt. Da der (nicht adjungierte) Feldoperator  $\psi_\nu(x, t)$  des Neutrinos einen Erzeugungsoperator für ein Antineutrino enthält, steht diese ein-

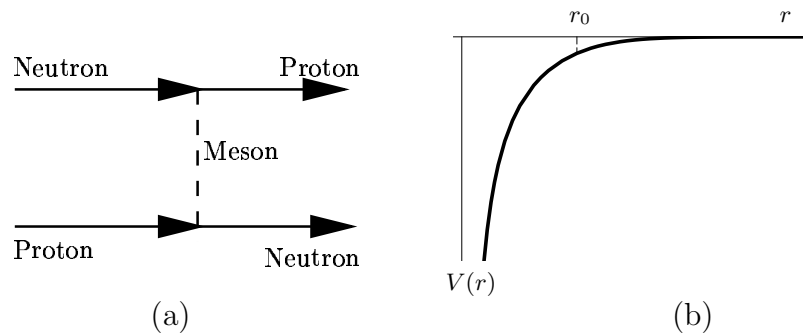
laufende Linie für ein auslaufendes Antineutrino. Mit dieser Theorie konnte Fermi die Eigenschaften der beobachteten *beta*-Zerfälle sehr gut beschreiben. Aus der Lebensdauer z. B. des Neutrons, kann man die Kopplung, mit der die vier Fermionen aufeinander wirken, berechnen. Diese Konstante, genannt die Fermi-Konstante  $G_F$ , ist sehr klein, man nennt diese Wechselwirkung daher auch die *schwache* Wechselwirkung.



**Abbildung 1.6.** Graphische Darstellung des *beta*-Zerfalls des Neutrons durch die Vier-Fermion-Wechselwirkung. Das beim Zerfall erzeugte Antineutrino wird durch eine einlaufende Linie dargestellt.

Nach dem Erscheinen der Arbeit Fermis über den *beta*-Zerfall versuchte Heisenberg, die Kraft zwischen einem Proton und einem Neutron durch den Austausch eines Elektron-Neutrino-Paares zu erklären, doch es stellte sich heraus, daß die resultierende Kraft zwischen Neutron und Proton bei den relevanten Abständen viel zu schwach war, um die starke Bindung im Kern zu erklären. Die Wechselwirkung, die die Kerne zusammenhält, wird die *starke* Wechselwirkung genannt.

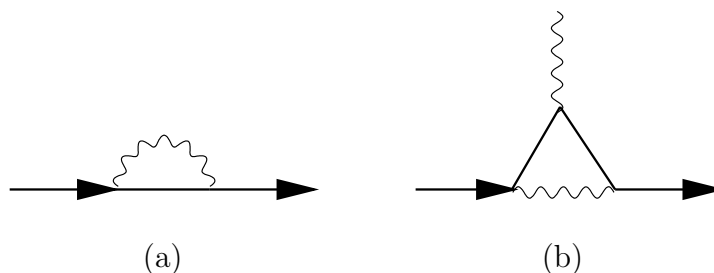
Für den japanischen Physiker H. Yukawa war aber die Heisenberg'sche Arbeit eine entscheidende Anregung. Er schlug vor, die kurzreichweitigen Kräfte im Atomkern durch ein noch unbekanntes Teilchen zu erklären, das stark mit dem Proton und dem Neutron wechselwirkt. Wir wollen im folgenden dieses Teilchen schon mit seinem späteren Namen *Meson* bezeichnen. Die Wechselwirkung ist eine Drei-Teilchen-Wechselwirkung, analog der elektromagnetischen Wechselwirkung, s. Abb. 1.5. Sie wird durch den Graphen in Abb. 1.7a dargestellt, wobei die gestrichelte Linie ein virtuelles Meson darstellt. Die resultierende Wechselwirkung ist umso stärker, je größer die Kopplung des Mesons an das Proton und das Neutron ist, und die Reichweite der Wechselwirkung ist umgekehrt proportional zur Masse des ausgetauschten Teilchens. Diese wichtige Beziehung zwischen der Reichweite der Wechselwirkung und der Masse läßt sich zumindest qualitativ plausibel machen: Je schwerer das ausgetauschte Teilchen ist, desto stärker ist der Energiesatz verletzt, desto kürzer lebt also der Zwischenzustand, und desto



**Abbildung 1.7.** Erklärung der Kernkräfte durch Mesonenaustausch. (a) Austausch eines mittelschweren Teilchens (Mesons) zwischen einem Proton und einem Neutron. (b) Die resultierende Wechselwirkung zwischen dem Proton und dem Neutron in Abhängigkeit vom gegenseitigen Abstand der beiden Teilchen

kürzer ist die Strecke, die das ausgetauschte Teilchen zurücklegen kann. Die quantitative Beziehung zwischen der Masse  $m$  des Mesons und der Reichweite  $r_0$  der Wechselwirkung ist:  $r_0 = \hbar/(m c)$ . Die Wechselwirkungsenergie zwischen einem Neutron und einem Proton in Abhängigkeit von deren gegenseitigem Abstand  $r$  ist in Abb. 1.7b dargestellt. Man wußte, daß die Kernkräfte nur eine Reichweite  $r_0$  von etwa einem Femtometer, d. h. einem millionstel Nanometer haben. Daraus konnte Yukawa auf einen Wert für die Masse des neuen Teilchens von etwa  $200 \text{ MeV}/c^2$  schließen.

Ich möchte noch einmal betonen, daß man den Begriff Austausch nicht wörtlich nehmen sollte; dies sieht man schon daran, daß der Graph 1.7 auf zweierlei Weisen interpretiert werden kann: Das einlaufende Neutron wird vernichtet und ein negatives virtuelles Meson und ein Proton werden erzeugt; das negative virtuelle Teilchen vernichtet sich mit dem einlaufenden Proton und ein auslaufendes Neutron wird erzeugt. Genausogut kann man sagen: Das Proton wird vernichtet und ein positives Meson und ein Neutron werden erzeugt; das positive Meson vernichtet sich mit dem Neutron und ein Proton wird erzeugt. Bei der zweiten Interpretation läuft in dem Graphen das positive virtuelle Teilchen von unten nach oben, bei der ersten das negative Antiteilchen des positiven Mesons von oben nach unten. Die scheinbar widersprechenden Interpretationen werden dadurch verständlich, daß der „Austausch eines virtuellen Teilchens“ die Umschreibung für die Ausbreitung eines Quantenfeldes ist, und dieses Quantenfeld beschreibt sowohl das positive Meson als auch sein Antiteilchen.



**Abbildung 1.8.** Beispiele für Quantenkorrekturen **(a)**: Ein Beitrag zur „Selbstenergie“ des Elektrons; das Elektron wechselwirkt mit seinem eigenen Strahlungsfeld. **(b)** Eine Quantenkorrektur zur elektrischen Ladung

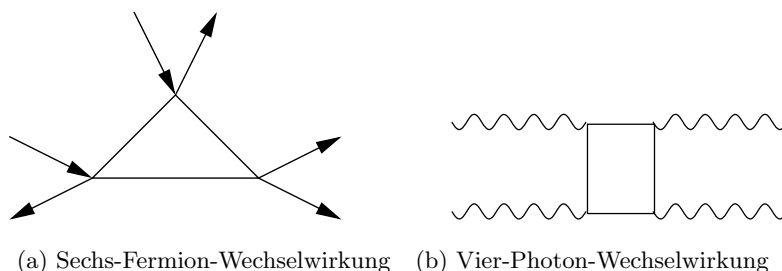
Man kann auch die Wechselwirkung eines Elektrons (oder Positrons) mit seinem eigenen Strahlungsfeld berechnen: Ein Elektron emittiert ein virtuelles Photon und absorbiert es dann wieder, d. h. der Endzustand ist wieder ein Elektron, wie dies in Abb. 1.8a dargestellt ist; man nennt einen solchen Beitrag eine Quantenkorrektur. Rechnet man nun den dazu gehörigen Ausdruck aus, erlebt man eine böse Überraschung, er ist nämlich unendlich groß, d. h. die Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld führt zu einer unendlich großen Wechselwirkung des Elektrons mit sich selbst und damit zu einer unendlich großen Elektronmasse. Genauso führt die Korrektur zur Kopplung des Photons an das Elektron (Abb. 1.8b), zu einer unendlichen Korrektur der Ladung des Elektrons. Der Grund für die Unendlichkeiten sind die Zwischenzustände mit sehr hoher Energie. Diese können nach der Unschärferelation zwar nur sehr kurz leben, dafür gibt es aber bei hohen Energien auch sehr viele Möglichkeiten für den Zwischenzustand, und unter dem Strich kommt es zu den erwähnten Unendlichkeiten.

Wir werden auf diese Probleme später noch öfters stoßen, deshalb möchte ich hier ganz kurz die Strategie beschreiben, die Ende der vierziger Jahre des 20. Jahrhunderts von R. Feynman, J. Schwinger, S.-I. Tomonaga und F. Dyson entwickelt wurde, um dieses Probleme zu umgehen. Man *regularisiert* zunächst die Ausdrücke, z. B. indem man die Beiträge bei hohen Energien oberhalb einer gewissen Obergrenze (*cutoff*) abschneidet. Dann sind die Resultate endlich, hängen aber natürlich von der Obergrenze ab, die dabei verwandten Werte für die Ladung und die Masse heißen die „nackten“ Parameter. Nach der Regularisierung erfolgt eine Renormierung der Eingangsparameter, nämlich Masse und Ladung. Die Abhängigkeit der Eingangsparameter von der Obergrenze wird so gewählt, daß gewisse meßbare Resultate, wie z. B.

der Wirkungsquerschnitt der Elektron-Photon-Streuung bei einer bestimmten Energie, der sogenannten Skala, den experimentellen Wert ergeben; schließlich läßt man die Obergrenze gegen Unendlich gehen. Dies führt zur sogenannten renormierten Ladung und zur renormierten Masse. Das sind die einzigen freien Parameter der Theorie. Hat man sie einmal für einen gewissen Prozeß bei einer festen Energie bestimmt, so kann man alle denkbaren Prozesse bei jeder beliebigen Energie berechnen. Wir werden auf die enormen Erfolge dieser Theorie noch mehrmals zurückkommen. Die renormierte Masse und die renormierte Ladung hängen von der an sich willkürlichen Skala ab, bei der man die Ergebnisse der theoretischen Rechnung mit dem Experiment vergleicht. Allerdings gibt es in der QED eine sehr natürliche Wahl für die Skala der Anpassung, nämlich den klassischen Grenzwert sehr niederenergetischer Photonen (langwelliges Licht), den J.J. Thomson schon 1906 berechnet hatte.

Eine Theorie, die es erlaubt, mit einer endlichen Anzahl von Eingangsbedingungen die Eingangsparameter vollständig zu fixieren, soweit man auch die Rechnung treibt, heißt *renormierbare* Quantenfeldtheorie. Wie F. Dyson zeigte, ist die QED eine renormierbare Theorie. Muß man dagegen immer mehr Parameter einführen, je weiter man die Rechnung treibt, dann ist die Theorie nicht renormierbar. Die Fermi-Theorie der schwachen Wechselwirkung, die wir oben kurz behandelt haben, ist nicht renormierbar. Die Vier-Fermion-Kopplung von Abb. 1.6 führt beispielsweise zu einer Sechs-Fermionen-Kopplung, dargestellt in Abb. 1.9a, die nicht mit Hilfe der renormierten Parameter der Vier-Fermion-Kopplung berechnet werden kann. Im Gegensatz dazu kann die Vier-Photon-Wechselwirkung, dargestellt in Abb. 1.9b, sehr wohl im Rahmen der renormierten QED berechnet werden.

Es lassen sich auch Graphen ohne äußere Linien konstruieren. In Abb. 1.10 sind einige Graphen dargestellt, die die Erzeugung eines virtuellen Elektron-Positron-Paares aus dem Nichts beschreiben. Diese Graphen führen zu einer Energiedichte des Vakuums, und Sie werden schon vermuten, daß auch diese unendlich ist. Eine Vakuumenergie macht sich bei Reaktionen nicht bemerkbar, da immer nur Energiedifferenzen gemessen werden, denken Sie nur an die gewaltige „Ruhenergie“ eines Teilchens,  $E = mc^2$ , von der man ja lange Zeit nichts ahnte. In der Gravitation würde sich aber eine solche „Vakuumenergie“ bemerkbar machen, da eine Energiedichte zur Schwerkraft beiträgt. Hier liegt eines der großen ungelösten Probleme an der Nahtstelle von Elementarteilchenphysik und Kosmologie, auf das wir in Abschn. ?? eingehen werden.



**Abbildung 1.9.** Kopplungen durch Quantenkorrekturen. (a) Die Sechs-Fermionen-Wechselwirkung, die aus der Existenz der Vier-Fermion-Wechselwirkung von Abb. 1.6 folgt, kann nicht berechnet werden. (b) Die Vier-Photon-Wechselwirkung, die aus der renormierbaren Wechselwirkung von Abb. 1.3 folgt, kann berechnet werden

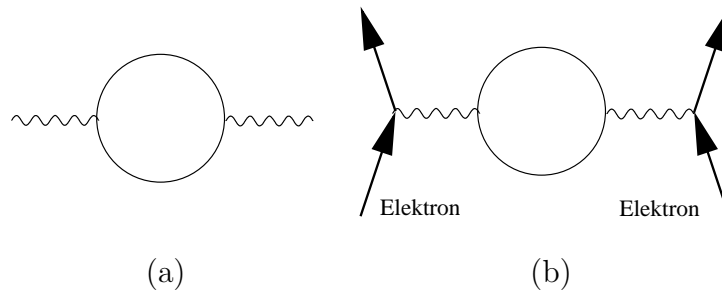


**Abbildung 1.10.** Beiträge zur Selbstenergie des Vakuums. Hier entsteht spontan aus dem Nichts (Vakuum) ein virtuelles Elektron-Positron-Paar

### 6.5 Laufende Kopplung und asymptotische Freiheit

Schon in der QED spielte die sogenannte Vakuumpolarisation eine große Rolle. Sie drückt aus, daß ein Photon in ein virtuelles Elektron-Positron-Paar aufspalten kann, also sozusagen das Vakuum in zwei entgegengesetzte Ladungen „polarisiert“. Der einfachste Beitrag für die Vakuumpolarisation ist als Feynman-Graph in Abb. 6.11a dargestellt.

Schon kurz nach der ersten Diskussion dieser Vakuumpolarisation durch Dirac und Heisenberg im Jahre 1934 hatten R. Serber und E.A. Uehling 1935 gefunden, daß die Wechselwirkung zweier Ladungen durch die Vakuumpolarisation modifiziert wird. Der Beitrag der Vakuumpolarisation zur Elektron-Elektron-Streuung ist in Abb. 6.11b dargestellt. Er führt dazu, daß die Wechselwirkung im Vergleich zur klassischen Elektrodynamik immer stärker wird, je kleiner der Abstand zwischen den Ladungsträgern wird. Dies ist anschaulich zumindest qualitativ zu verstehen: Nehmen wir die Vakuumpolarisation ganz bildlich, so bedeutet dies, daß sich eine negative Ladung mit Elektron-Positron-Paaren umgibt. Die Positronen werden von der negativen Ladung angezogen, die Elektronen abgestoßen. Daher befinden sich die Positronen bevor-



**Abbildung 6.11.** (a) Beitrag zur Vakuumpolarisation in der QED. Ein (virtuelles) Photon dissoziiert in ein virtuelles Elektron-Positron Paar. (b) Beitrag der Vakuumpolarisation zur Elektronstreuung, er führt zu einem Anwachsen der renormierten elektromagnetischen Kopplung (Ladung) bei kleinen Abständen

zugt in der Nähe der Ladung und schirmen sie zu größeren Abständen hin ab.

Diese Überlegungen wurden im Rahmen der renormierten Feldtheorie 1953 von M. Gell-Mann und F.E. Low sowie von E.C.G. Stückelberg und A. Petermann wieder aufgenommen und führten zu einer der wichtigsten Methoden der Quantenfeldtheorie, der sogenannten Renormierungsgruppe. Es ist hier nicht möglich, auch nur annähernd adäquat darauf einzugehen, und so will ich nur ganz kurz zwei Zugänge zu dieser Methode schildern.

Der eine Zugang ist direkt mit der Methode der Renormierung verknüpft. Ich hatte in Abschn. 1.4.2 erwähnt, daß man in der störungstheoretischen Rechnung die „nackten“ Parameter der Theorie – wie Ladung und Masse – zunächst unbestimmt läßt und dann die renormierten Parameter durch Angleichung an Experimente bei einer gewissen Skala – sei diese eine Energie oder ein Abstand – festlegt. Es ist einsichtig, daß die renormierten Parameter von dieser Renormierungsskala abhängen. Andererseits dürfen direkt physikalisch meßbare Größen wie Wirkungsquerschnitte nicht von dieser Skala abhängen. Diese Forderung erlaubt, die Abhängigkeiten der renormierten Parameter von der Skala durch die sogenannte Renormierungsgruppen-Gleichung zu bestimmen und zu verknüpfen. Einen gewissen Abschluß dieser Entwicklung bilden die 1970 von C.G. Callan und K. Szymanzik aufgestellten und nach diesen Autoren benannten Gleichungen. Aus ihnen kann man direkt ablesen, wie der Graph der Abb. 6.11a zum Anwachsen der (renormierten) Ladung bei kleinen Abständen führt.

Ein weniger formaler Zugang, der vor allem bei Anwendungen in der Quantentheorie der Festkörper von Bedeutung ist, geht auf den L.P. Kadanoff zurück. Bei diesem Zugang hat die renormierte Konstante eine recht anschauliche Bedeutung: in ihr sind alle Effekte pauschal zusammengefaßt, die bei kleinen Abständen von Bedeutung sind; klein heißt dabei: kleiner als die Renormierungsskala. Nur bei renormierbaren Quantenfeldtheorien ist eine solche pauschale Zusammenfassung der Effekte bei kleinen Abständen überhaupt möglich.

Doch nun kommen wir wieder zur Hochenergiephysik zurück. Im Parton-Modell für die tief inelastische Streuung (Abschn. ??) ging man davon aus, daß die punktförmigen Bestandteile der Hadronen – die Partonen – bei kleinen Abständen praktisch nicht untereinander wechselwirken. Wollte man die Partonen mit den Quarks identifizieren, mußte man annehmen, daß bei kleinen Abständen die Wechselwirkung zwischen diesen sehr klein und bei großen Abständen sehr groß wird. Nur so konnte man erklären, daß es trotz intensiver Versuche nicht gelungen war, Quarks aus Hadronen zu isolieren. Man benötigte also für die Wechselwirkung in den Hadronen genau das entgegengesetzte Verhalten wie in der QED. Dies schien aber unmöglich, denn bereits die anschauliche Interpretation der Vakuumpolarisation ergibt ja eine Zunahme der Wechselwirkung bei kleinen Abständen. Man könnte daher denken, daß die Entdeckung, daß in der QCD genau ein der QED entgegengesetztes Verhalten vorliegt, wie eine Bombe einschlug. Dem war aber nicht so, und ich erzähle die recht absurd erscheinende Geschichte dieser Entdeckung, bevor ich weiter auf die physikalischen Konsequenzen eingehe.

Bereits 1965 berechneten die zwei russischen Physiker V.S. Vanyashin und M.V. Terentev die Vakuumpolarisation für eine Theorie massiver geladener Teilchen mit Spin 1, effektiv eine direkt gebrochene  $SU(2)$ -Eichtheorie. Diese Theorie ist zwar nicht renormierbar, aber die niedrigste Quantenkorrektur kann noch (mit Tricks) berechnet werden. Sie stellten fest, daß bei der Vakuumpolarisation genau der entgegengesetzte Effekt auftrat wie bei der QED, daß also in dieser Theorie die renormierte Ladung mit wachsendem Abstand nicht abgeschirmt wird, sondern zunimmt; die Autoren fanden dies übrigens „sehr wenig wünschenswert“. Obwohl die Arbeit in einer angesehenen (und ins Englische übersetzten) russischen Zeitschrift publiziert wurde, hat sie niemand auf das Parton-Modell angewandt, auch die Autoren selbst nicht.

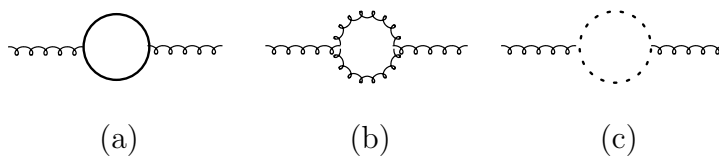
Noch seltsamer ist der zweite Akt. Der junge brillante Physiker 't Hooft hatte nach dem Beweis der Renormierbarkeit der QCD auch die renormierte Farb-Ladung berechnet und die Abnahme bei kleiner wer-



denden Abständen festgestellt. Im Gegensatz zu der Entdeckung der beiden russischen Physiker war dies nun ein Effekt in einer konsistenten Theorie und für sich allein schon sehr interessant. Bei einer kleinen Konferenz in Marseille im Juni 1972 traf 't Hooft den Hamburger Physiker K. Szymanzik. Dieser war ein großer Spezialist in diesen Fragen; er erzählte ihm, noch auf dem Flughafen, daß bei gewissen sehr unrealistischen Theorien ein solcher Abfall der Wechselwirkung mit kleiner werdendem Abstand auftreten könne und dies für das Parton-Modell höchst relevant sei. Darauf berichtete ihm 't Hooft, daß auch bei der QCD, dieses Verhalten auftrete. Szymanzik war überrascht und wohl auch skeptisch; er riet seinem jungen Kollegen: „Wenn dies wahr ist, ist es sehr wichtig, und Sie sollten Ihr Resultat so schnell wie möglich publizieren; wenn Sie es nicht publizieren, wird es jemand anderes tun.“ Nun, 't Hooft erwähnte zwar sein Resultat bei dem Treffen in Marseille, folgte aber nicht dem Rat Szymanziks, es so schnell wie möglich zu publizieren. So mußte dieses besondere Verhalten der QCD noch einmal entdeckt werden, nämlich 1973 durch D.J. Gross und F. Wilczek sowie, unabhängig davon, von H.D. Politzer.

Da die Stärke der Wechselwirkung immer kleiner wird, zu je kleineren Abständen man kommt, hat sich für diese Eigenschaft der Name „asymptotische Freiheit“ eingebürgert. Im Nachhinein kann man sich wundern, daß man darauf nicht schon früher aufmerksam wurde, denn sie ist qualitativ ähnlich leicht zu verstehen wie die Abschirmung in der QED, der Abelschen Eichtheorie. Der Unterschied zwischen der QCD und der QED liegt darin, daß in der QED die Photonen keine Ladung tragen, also nicht untereinander direkt wechselwirken. In der QCD ist das anders: hier tragen die Eichbosonen eine Ladung und wechselwirken direkt miteinander. Dies hat für die Vakuumpolarisation eine wichtige Konsequenz: Das Eichboson der QCD, das Gluon, kann nicht nur in ein Quark und ein Antiquark dissoziieren, sondern auch in zwei Gluonen. Bei den Gluonen können sich aber auch gleichnamige Ladungen anziehen, und dadurch kommt der einer Abschirmung entgegengesetzte Effekt zustande: Die Wechselwirkung wird umso kleiner, je näher man der Farbladung kommt.

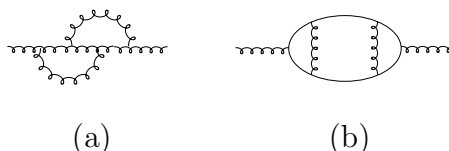
Die Feynman-Graphen für die Vakuumpolarisation durch ein Eichboson der QCD, also die Dissoziationsmöglichkeiten für ein Gluon, sind in Abb. 6.12 dargestellt. Die geschlungene Linie repräsentiert ein Gluon, die durchgezogene Linie ein Quark. In Abb. 6.12a, ist die auch aus der QED bekannte Dissoziation in ein Fermion und Anti-Fermion, d. h. Quark und Antiquark, dargestellt. Die beiden anderen Graphen treten nur in einer nicht-Abelschen Theorie wie die QCD auf. In Abb. 6.12b dissoziiert das Gluon in zwei virtuelle Gluonen. Der dritte Graph



**Abbildung 6.12.** Beiträge zur Vakuumpolarisation in der QCD. Die *geschlungenen Linien* repräsentieren Gluon-, die *durchgezogenen* Quark- und die *gestrichelten Linien* Geisterfelder (siehe Abb. ??). Graph (a) ist analog zur Vakuumpolarisation in der QED (Abb. 6.11). Die für die QCD typischen Beiträge (b) und (c) bewirken, daß die Kopplung mit abnehmenden Abstand kleiner wird.

(Abb. 6.12c) zeigt die Dissoziation in einen *Geist* und einen *Anti-Geist*. Die Quantenfelder für die „Geister-Zustände“ treten in der Theorie zunächst nicht auf, müssen aber eingeführt werden, um die Theorie konsistent zu halten, z. B. um die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit zu garantieren. Ihr Auftreten ist unter anderem der Grund dafür, warum zwischen der Aufstellung der klassischen nicht-Abelschen Eichtheorie durch Yang und Mills (1954), und der vollständigen Quantisierung derselben (1971) eine so lange Zeit verstrich. Wie der Name sagt, haben die „Geisterfelder“ recht merkwürdige Eigenschaften, aber wir wollen auf sie hier nicht näher eingehen, obwohl der Graph der Abb. 6.12c genauso wichtig ist wie die leichter einsichtigen (6.12a) und (6.12b).

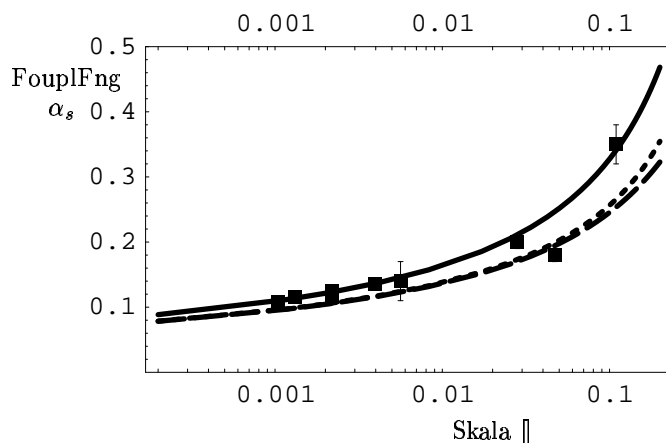
Hat man die Ausdrücke von Abb. 6.13 ausgerechnet, so kann man damit mit Hilfe der Renormierungsgruppe berechnen, wie sich die Wechselwirkung mit dem Abstand verändert. Will man dies noch genauer wissen, muß man noch mehr und erheblich kompliziertere Graphen berechnen.



**Abbildung 6.13.** Beiträge höherer Ordnung zur Vakuumpolarisation in der QCD

Das kann man natürlich auch quantitativ fassen. Wir bezeichnen mit  $g_s$  die Kopplungskonstante der QCD (der Index  $s$  steht für *strong*). Sie ist die Farbladung und bestimmt die Stärke der Wechselwirkung

eines Gluons mit einem Quark oder der Gluonen untereinander. Bei Quantenkorrekturen tritt stets die Größe  $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$  auf. Die den Graphen von Abb. 6.12 entsprechenden Beiträge sind, da zwei Wechselwirkungsterme (sogenannte Vertices) auftreten, proportional  $g_s^2$ , also  $\alpha_s$ . Daneben gibt es natürlich kompliziertere, die quadratisch oder mit einer noch höheren Potenz von  $\alpha_s$  gehen. In Abb. 6.13 sind die Graphen für zwei solche Beiträge dargestellt. Graph 6.13a enthält vier Wechselwirkungsterme, ist also proportional  $\alpha_s^2$ , Graph 6.13b enthält sechs Terme, ist also proportional  $\alpha_s^3$ . Je kleiner die Kopplung ist, desto unwichtiger sind natürlich auch die höheren Beiträge. Nehmen wir einmal an, bei einem gewissen Abstand sei  $\alpha_s = 0.1$ . Dann sind die Beiträge, die in Abb. 6.12 nicht berücksichtigt sind, mindestens mit einem Faktor  $\alpha_s^2 = 0.01$  versehen. Wir können deshalb hoffen, daß die noch fehlenden Beiträge nur etwa 10 % von den bereits berechneten ausmachen.



**Abbildung 6.14.** Die laufende Kopplung in der QCD. Die *ausgezogene Kurve* ist die niedrigste Näherung, die *lang gestrichelte* die nächste Ordnung und die *kurz gestrichelte* die noch höhere Ordnung. Die experimentellen Punkte sind aus Experimenten gewonnen, für die die entsprechende Skala besonders wichtig ist

In Abb. ist die Kopplung  $\alpha_s = 6.14g_s^2/(4\pi)$  als Funktion des Abstands dargestellt. Die durchgezogene Kurve ist in der niedrigsten Ordnung berechnet, also wurden hier nur die Graphen, die in Abb. 6.12 dargestellt sind, berücksichtigt. Die Kurve mit den langen Strichen berücksichtigt auch noch die schon wesentlich komplizierteren Beiträge,

die proportional dem Quadrat der Kopplung sind, die kurzen Striche schließlich berücksichtigen die in wahrhaft heroischen Rechnungen erhaltenen Terme, die kubisch in der Kopplung sind. Ob die nächste Ordnung jemals berechnet werden wird, ist äußerst zweifelhaft, es sei denn es hat jemand eine ganz neue Idee, die schon fast astronomische Anzahl der dann auftretenden Graphen zu berechnen.

Man sieht in Abb. 6.14, daß bis zu Abständen von etwa 0.2 fm, was einer Energie von etwa 1 GeV entspricht, die niedrigste Ordnung zumindest qualitativ mit den höheren Ordnungen, die nächste Ordnung aber schon recht gut mit der übernächsten übereinstimmt. Dies ermöglicht nun ein ganz neues Theoretikergefühl: nämlich quantitative Rechnungen bei der starken Wechselwirkung durchzuführen.

Ebenfalls in Abb. 6.14 eingetragen sind experimentelle Werte für die Kopplung  $\alpha_s$ , die bei verschiedenen Skalen gewonnen wurden. Ich will hier nicht auf die Einzelheiten eingehen, wie die Kopplungen mit den theoretischen Kurven verglichen werden sollten, es kommt mir nur darauf an zu zeigen, daß das „Laufen der Kopplung“ tatsächlich direkt experimentell beobachtet ist.

Die Wechselwirkung wird bei größeren Abständen stärker, aber je größer die Wechselwirkung ist, desto unzuverlässiger werden die Kurven aus Abb. 6.14, denn diese sind ja unter der Annahme einer kleinen Kopplung  $\alpha_s$  gewonnen. Dies wird dadurch sichtbar, daß mit zunehmendem Abstand die niedrigste Näherung und die höheren Näherungen immer weiter auseinander laufen. Es ist nicht ausgeschlossen, daß die Kopplung bei großen Abständen so groß wird, daß es nicht möglich ist, die Quarks aus dem Hadron herauszureißen. Diesen Effekt nennt man im Gegensatz zur asymptotischen Freiheit „Infrarote Sklaverei“. Aber anders als die asymptotische Freiheit ist die infrarote Sklaverei eher ein frommer Wunsch als ein theoretisch hergeleitetes Konzept. Glücklicherweise gibt es aber auch Möglichkeiten die QCD bei großen Abständen zu untersuchen, wie wir im Abschn. ?? sehen werden.

Die Stärke der Kopplung läßt sich durch eine für die QCD charakteristische Skala ausdrücken, die *Lambda-QCD* ( $\Lambda_{\text{QCD}}$ ) genannt wird. Sie hat den Wert von etwa einem Femtometer, in Energieeinheiten ausgedrückt etwa 200 MeV. Bei Abständen, die klein gegenüber dieser Skala sind, ist auch die Kopplung der QCD klein, und die Störungstheorie kann angewandt werden. Bei Abständen die vergleichbar mit ihr sind, bricht die Störungstheorie zusammen. Bildlich kann man dies so ausdrücken: mit einem Mikroskop, das Abstände auflöst, die klein gegen diese Skala von etwa einem Femtometer sind, sieht man Quarks und Gluonen, bei einer viel schwächeren Auflösung dagegen Hadronen.

Die asymptotische Freiheit kann nicht nur die Besonderheiten der tief inelastischen Streuung erklären, sie hat noch einen weiteren grundsätzlichen Vorteil. Gegen asymptotisch freie Theorien gelten die Argumente die 1955 von Landau und Pomeranchuk gegen die QED und die Quantenfeldtheorie allgemein vorgebracht wurden (Abschn. ??) nicht. Sie hatten argumentiert, daß die Quantenkorrekturen der QED dazu führten, daß die Ladung 0 sein müsse, es also gar keine elektromagnetische Wechselwirkung gebe. Die Grundidee der Argumentation ist: Die Renormierung bei einem bestimmten Abstand (Skala) bedeutet, daß wir alle Effekte, die bei kleineren Abständen wichtig werden, pauschal durch die renormierte Ladung berücksichtigt haben. Natürlich können wir nie bis zum Abstand 0 vordringen, das heißt, was bei kleinsten Abständen vorgeht, wird uns stets verborgen bleiben. Bei einer asymptotisch freien Theorie ist das nicht schlimm, da bei immer kleineren Abständen immer weniger passiert. Bei einer Theorie, die nicht asymptotisch frei ist, werden dagegen die nicht berechenbaren Effekte immer wichtiger, zu je kleineren Abständen wir kommen. Wir können also gar nicht hoffen, daß wir das Verhalten bei kleinen Abständen vollständig in der renormierten Ladung absorbieren können, es sei denn, die Wechselwirkung ist von vornherein Null.

Man hatte zwar mit Recht darauf hingewiesen, daß diese Überlegungen auf der Störungsrechnung mit kleiner Kopplung basieren, doch haben nichtstörungstheoretische numerische Rechnungen der QED die Richtigkeit der Landauschen Vermutung sehr unterstützt. Die Nützlichkeit der QED als effektive Theorie bei den Abständen, die wir momentan oder auch in ferner Zukunft untersuchen können, bleibt von diesen Überlegungen allerdings unangetastet. Ich werde auf das Problem einer Quantenfeldtheorie, die nicht asymptotisch frei ist, noch einmal kurz zu Beginn von Abschn. ?? eingehen.

Im nächsten Abschnitt wollen wir kurz einige Beispiele für die Anwendung der Störungsrechnung betrachten, also Phänomene, die sich bei kleinen Abständen und entsprechend schwacher Kopplung abspielen.

